Ann. of Phys., 1967, v. 41, N3, p. 349-371

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р-2621

Д.Ц. Стоянов, И.Т. Тодоров

ДИНАМИЧЕСКАЯ СИММЕТРИЯ И СПЕКТР МАСС АДРОНОВ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1966

Р-2621

Д.Ц. Стоянов, И. Т. Тодоров

ДИНАМИЧЕСКАЯ СИММЕТРИЯ И СПЕКТР МАСС АДРОНОВ

Направлено в Annals of Physics

1. Введение

В ряде работ [1-10] рассматривается объединение пространственно-временной симметрии (группа Пуанкаре) с внутренней симметрией элементарных частиц в виде полупрямого произведения групп, в котором некомпактная группа внутренней симметрии является нормальным делителем. Характерным для этого подхода является то обстоятельство, что (однородная) группа Лоренца встречается дважды в объединенной группе G; один раз – как (однородная) часть группы Пуанкаре $\mathcal{P}$, второй раз – как часть группы внутренних симметрий (спинорная группа Лоренца $SL(2,C)$). Соответственно с этим можно ввести два 4-вектора Паули-Лубанского-Баргмана:

$$w_\mu = \tfrac{1}{2}\epsilon_{\rho\sigma\lambda\mu} M^{\rho\sigma} k^\lambda, \qquad \tilde{w}_\mu = \tfrac{1}{2}\epsilon_{\rho\sigma\lambda\mu} S^{\rho\sigma} k^\lambda \tag{1.1}$$

и два (трехмерных) вектора спина J_i и $\tilde{J}_i$

$$J_i = \frac{1}{\sqrt{k^2}}\left(w_i - \frac{w_0 k_i}{k_0+\sqrt{k^2}}\right). \tag{1.2}$$

Здесь $M^{\rho\sigma}$ – оператор момента количества движения, $S^{\rho\sigma}$ – соответствующие генераторы спинорной группы $SL(2,C)$, рассматриваемой как часть группы внутренней симметрии, k^λ – 4-мерный импульс (рассматриваются лишь "физические" представления группы, в которых операторы $k^2 \equiv (k\,k)$ и k^0 – положительно определенные). Далее, поскольку у каждой частицы только один спин, постулируется, что частицы описываются лишь такими представлениями группы G, в которых векторы w_μ и $\tilde{w}_\mu$ совпадают. Для того чтобы этот постулат не привел к слишком узкому классу представлений (например, таких, где представление группы внутренних симметрий тривиально) необходимо потребовать, чтобы пространство, натянутое на четырех операторах $w_\mu - \tilde{w}_\mu$, было инвариантным относительно группы G. Другими словами, требуется, чтобы для любого инфинитезимального оператора X группы G коммутатор $[X, w_\mu - \tilde{w}_\mu]$ являлся линейной комбинацией $w_\mu - \tilde{w}_\mu$.

В настоящей работе рассматривается группа G такого же типа, а именно[x)]

$$G = \mathcal{P} \circledS U(6,6). \tag{1.3}$$

При этом, в отличие от предыдущих работ, предполагается, что физический импульс не коммутирует тождественно с группой внутренних симметрий $U(6,6)$. Требуется лишь его перестановочность с операторами заряда и гиперзаряда. Эти условия, наряду с коммутативностью компонент импульса между собой, определяют "обобщенный импульс" с точностью до трех произвольных постоянных и трех знаков (§ 3). Отметим, что первая попытка /16/ ввести в группу обобщенный импульс, не коммутирующий с генераторами внутренней симметрии, окончились неудачей (см. /17/) потому, что в /16/ рассматривались лишь компактные группы внутренних симметрий. Для нашей же конструкции, как будет видно из дальнейшего, существенно, что группа внутренней симметрии содержит (некомпактную) подгруппу, изоморфную группе Пуанкаре[xx)].

Определенный нами обобщенный импульс обладает, однако, двумя особенностями, которые трудно согласовать с физической интерпретацией импульса. Во-первых, он является суммой вектора и аксиала; во-вторых, он не коммутирует со спином. Из вектора p и из пространственно-отраженного вектора $p' = U(P)\,p\,U^{-1}(P)$ можно построить однопараметрическое семейство скаляров, переходящих в p^2 в случае, когда аксиальная часть вектора p равна нулю. Мы постулируем, что оператор квадрата массы m^2 является одним из операторов этого семейства. Далее рассматривается определенный класс унитарных (бесконечномерных) представлений группы G (определяемый в § 2), в котором оператор m^2 имеет дискретный спектр[xxx)]. Физические

---

x) В работах /4,5/ и /7-10/ в качестве инвариантной подгруппы выбиралась группа $SL(6,C)$. Группа $U(6,6)$ как релятивистская группа симметрий изучалась в ряде работ Салама с сотрудниками (см., например, обзорную статью /11/, где имеются ссылки на предыдущие работы; унитарные бесконечномерные представления этой группы, с которыми мы будем иметь дело, рассматривались в /12-15/).

xx) Возможность определения спектра масс включением массового оператора в некоторую некомпактную алгебру, содержащую внутреннюю симметрию, обсуждалась с общей точки зрения в /18/.

xxx) На самом деле сходимость итерационного ряда, определяющего собственные значения m^2, нами не доказана. Получение дискретного спектра масс во всяком случае не противоречит теореме O Raifeartaigh /19,20/, так как у нас не выполнены условия этой теоремы, поскольку импульс не коммутирует со спином. Отметим в этой связи, что несмотря на дефекты в доказательстве упомянутой теоремы (см. /21/), она, по-видимому, является справедливой для конечных групп Ли (отмеченный пробел в ее доказательстве в этом случае можно восполнить).

частицы определяются как собственные функции массового оператора с определенными спином, зарядом, гиперзарядом и четностью (это возможно, поскольку операторы, соответствующие этим величинам, перестановочны с определенным нами массовым оператором). Тогда для векторов состояния физических частиц, разложенных по неприводимым **представлениям компактной** группы $U(6) \times U(6)$, получается бесконечная система линейных уравнений. Одновременно из условия совместимости системы определяются собственные значения оператора m^2. Бесконечную систему можно решать методом последовательных приближений, обрывая разложение векторов состояния. Здесь мы ограничиваемся первым приближением в случае барионов (**представление** $(\underline{56}, \underline{1})$ группы $U(6) \times U(6)$ – § 4) и вторым приближением для мезонов (представление $(\underline{1}, \underline{1}) + (\underline{6}, \underline{6}^*)$ – § 5). Полученные результаты хорошо согласуются с опытом в барионном случае и несколько менее убедительны в отношении мезонов. В § 6 обсуждаются возможные модификации теории, которые могли бы, в частности, привести к к лучшему согласию с опытом в мезонном случае.

2. Дискретная серия унитарных представлений "осцилляторного типа" группы U(6,6) и алгебра Ли группы G

Насколько нам известно, до сих пор нет полной классификации неприводимых унитарных представлений группы $U(6,6)$ (см.[33]). **В работе Дотана, Гелл-Манна и Неемана**[14] **предложено классифицировать адроны по дискретной вырожденной серии унитарных** представлений этой группы, описанной в [12-14]. В дальнейшем мы тоже примем эту гипотезу. Приведем здесь для удобства конструкцию **Курсуноглу-Фейнмана** (см.[12-15,10]).

Пусть ξ^A – двенадцатикомпонентный операторный спинор, удовлетворяющий перестановочным соотношениям

$$[\xi^A, \xi^B] = 0 , \qquad [\xi^A, \bar{\xi}_B] = \delta^A_B, \qquad [\bar{\xi}_A, \bar{\xi}_B] = 0 , \tag{2.1}$$

$$A, B = 1, \ldots, 12,$$

где[x)]

$$\bar{\xi} = \xi^* \beta , \qquad \beta = \gamma^0 \times I , \tag{2.2}$$

звездочкой обозначено эрмитово сопряжение, I – трехрядная единичная матрица ($I = \sqrt{\frac{3}{2}}\lambda_0$). Всюду в дальнейшем мы будем пользоваться представлением, в котором матрица γ^0 диагональна. В этом представлении перестановочные соотношения (2.1) будут иметь место, если положить

[x)] Мы пользуемся таким определением γ-матриц Дирака, при котором матрица γ^0 –эрмитова, а γ^j – антиэрмитовы, так что $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}\, 1$.

$$\xi = \begin{pmatrix} a_{\alpha i} \\ b^*_{\beta i} \end{pmatrix}, \qquad \bar{\xi} = \begin{pmatrix} a^*_{\alpha i} \\ -b_{\beta i} \end{pmatrix},$$

$$/\ \gamma^0 = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & -\sigma_0 \end{pmatrix}\ /, \qquad \alpha, \beta = 1,2; \qquad i, j = 1,2,3 \quad, \tag{2.3}$$

где $a^*_{\alpha i}$, $b^*_{\beta i}$ и $a_{\alpha i}$, $b_{\beta i}$ удовлетворяют правилам перестановки для бозевских операторов рождения и уничтожения (т.е. для 12-мерного гармонического осциллятора).

Мы будем рассматривать "осцилляторную" серию унитарных представлений группы U (6,6) , эрмитовы генераторы которых задаются равенствами:

$$M^0_s = \tfrac{1}{2}\bar{\xi}\, 1 \times \lambda_s \xi, \qquad M^j_s = \tfrac{1}{2}\bar{\xi}\, i\gamma^5 \gamma^0 \gamma^j \times \lambda_s \xi,$$

$$V^0_s = \tfrac{1}{2}\bar{\xi}\gamma^0 \times \lambda_s \xi, \qquad A^j_s = -\frac{i}{2}\bar{\xi}\gamma^5\gamma^j \times \lambda_s \xi; \tag{2.4}$$

$$N^0_s = -\tfrac{1}{2}\bar{\xi}\gamma^5 \times \lambda_s \xi, \qquad N^j_s = \frac{i}{2}\bar{\xi}\gamma^0\gamma^j \times \lambda_s \xi,$$

$$A^0_s = -\frac{i}{2}\bar{\xi}\gamma^5\gamma^0 \times \lambda_s \xi, \qquad V^j_s = \tfrac{1}{2}\bar{\xi}\gamma^j \times \lambda_s \xi, \tag{2.5}$$

$$s = 0, 1, \ldots, 8, \qquad j = 1, 2, 3.$$

72 генератора (2.4) порождают представление максимальной компактной подгруппы U(6) × U(6) группы U(6,6) . Операторы (2.5) можно назвать "некомпактными": в конечномерных представлениях U(6,6) они антиэрмитовы. Отметим, что "компактные" генераторы (2.4) являются четными, в то время как генераторы (2.5) - нечетными относительно пространственного отражения

$$U(P) = \eta\, e^{i\pi\sqrt{\frac{3}{2}}V^0_0} = \eta\, e^{i\frac{\pi}{2}\bar{\xi}\beta\xi}, \qquad |\eta| = 1; \tag{2.6}$$

другими словами, имеют место равенства

$$U(P)\, M^\mu_s\, U^{-1}(P) = M^\mu_s, \ldots; \qquad U(P)\, N^\mu_s\, U^{-1}(P) = -N^\mu_s, \ldots \tag{2.7}$$

Перестановочные соотношения генераторов (2.4), (2.5) определяются из правил коммутации и антикоммутации матриц γ и λ, если учесть, что в силу (2.1)

$$[\bar{\xi}\, 0_1\, \xi,\ \bar{\xi}\, 0_2 \xi] = \bar{\xi}\, [0_1, 0_2]\, \xi. \tag{2.8}$$

Явный вид структурных постоянных группы U(6,6) выписывался в ряде работ (см., например,[22,23]; мы придерживаемся здесь обозначений, принятых в [23]).

Неприводимые унитарные представления группы U(6,6) рассматриваемой серии однозначно определяются заданием собственного значения генератора центра группы

$$3B = \bar{\xi}\,\xi + 6\,(=\sqrt{6}\,M^{\circ} + 6) = a^{*}\,a - b^{*}\,b \ . \qquad (2.9)$$

Операторы $a^{*}_{\alpha i}$ и $a_{\alpha i}$ можно интерпретировать как операторы рождения и уничтожения верхнего ("кваркового"[x)]) индекса $(\alpha\ i)$, в то время как $b^{*}_{\alpha i}$ и $b_{\alpha i}$ – как операторы рождения и уничтожения нижнего ("антикваркового") индекса. Число B, равное одной трети разности верхних и нижних индексов, интерпретируется как барионное число рассматриваемого (бесконечного) мультиплета.

Каждое неприводимое представление U(6,6) рассматриваемого класса при редукции по максимальной компактной подгруппе U(6) × U(6) разлагается на бесконечное число неприводимых симметричных тензоров с $\nu+3B$ верхними индексами и ν нижними индексами. При фиксированном B каждый такой тензор однозначно задается суммарным числом n верхних и нижних индексов, которое просто связано с собственным значением генератора $V^{\circ}_{\circ}$:

$$n = \sqrt{6}\,V^{\circ}_{\circ} - 6 = \bar{\xi}\beta\,\xi - 6 = a^{*}a + b^{*}\,b \ . \qquad (2.10)$$

В частности, мезонное и барионное представления следующим образом раскладываются по неприводимым представлениям U(6) × U(6)

$$\begin{array}{llllll} B=0: & (\underline{1},\ \underline{1}) & +(\underline{6},\ \underline{6}^{*}) & +(\underline{21},\ \underline{21}^{*}) & +(\underline{56},\ \underline{56}^{*}) & + \ldots\ldots \\ n = & 0 & 2 & 4 & 6 & \end{array} \qquad (2.11)$$

$$\begin{array}{lllll} B=1: & (\underline{56},\underline{1}) & +(\underline{126},\ \underline{6}^{*}) & +(\underline{252},\ \underline{21}^{*}) & + \ldots\ldots \\ n = & 3 & 5 & 7 & \end{array}$$

При помощи оператора n оператор пространственного отражения (2.6) приобретает вид :

$$U(P) = i^{n} \qquad (2.12)$$

(мы положили $\eta=-1$, с тем, чтобы представление $(\underline{6},\underline{6}^{*})$ описывало псевдоскалярные и векторные мезоны). Из (2.12) видно, что частицы, принадлежащие двум соседним мультиплетам компактной подгруппы, в разложении типа (2.11) обладают противоположной четности.

---

x) Подчеркнем условность этого названия: "кварки" получаются в рассматриваемой схеме при $B=1/3$, следовательно, они выражаются в виде прямой суммы тензоров $\psi^{a} + \psi^{a_1 a_2}_{b_1} + \psi^{a_1 a_2 a_3}_{b_1 b_2} + \ldots\ldots$, так что, строго говоря, нельзя говорить об одном кварковом индексе.

Перестановочные соотношения между генераторами группы Пуанкаре $\mathcal{P}$ и генераторами $U(6,6)$ задаются следующим образом. Инфинитезимальные трансляции k^μ коммутируют с группой внутренних симметрий, в то время как операторы момента количества движения M^i и N^i имеют те же перестановочные соотношения с генераторами $U(6,6)$, что и операторы $\sqrt{\frac{3}{2}}\, M^i_0$ и $\sqrt{\frac{3}{2}}\, N^i_0$ (см. (2.4), (2.5)).

3. Обобщенный импульс и оператор квадрата массы

Если отождествить физический импульс с операторами k^μ, коммутирующими с $U(6,6)$, то будет иметь место полное вырождение по массе (все частицы, входящие в одном бесконечном мультиплете с заданным барионным числом, будут обладать одной и той же массой). С другой стороны, можно учесть расщепление по массам, не выходя за рамки группы G, если по иному определить физический импульс. Действительно, группа G играет роль динамической группы /24-28/ в том смысле, что все состояния данной системы (например, все барионные резонансы) входят в одном неприводимом представлении G, и поэтому естественно считать, что 4-мерный импульс, по аналогии с обобщенным импульсом в случае уравнения Дирака во внешнем электромагнитном поле, тоже отражает динамику системы и не коммутирует тождественно с инвариантной подгруппой $U(6,6)$. Мы найдем наиболее общий вид такого "динамического" импульса, определяя его как функцию генераторов группы G, удовлетворяющую следующим требованиям.

1. Динамический импульс p является лоренцовым 4-вектором, т.е. обладает теми же трансформационными свойствами относительно группы $\mathcal{P}$, что и генераторы трансляции k^μ.

2. Алгебра Ли $\underline{U}(6,6)$ группы внутренней симметрии остается инвариантной при коммутировании с p^μ:

$$[p^\mu, \underline{U}(6,6)] \subset \underline{U}(6,6). \tag{3.1}$$

3. Импульс коммутирует с операторами заряда и гиперзаряда:

$$[p^\mu, Q] = [p^\mu, Y] = 0, \tag{3.2}$$

где

$$Y = \frac{2}{\sqrt{3}} M^0_8, \qquad Q = M^0_3 + \frac{1}{\sqrt{3}} M^0_8. \tag{3.3}$$

Это требование учитывает сохранение заряда и гиперзаряда при сильных и электромагнитных взаимодействиях. Оно означает, что мы пренебрегаем слабыми взаимодействиями, которые приводят к несохранению гиперзаряда.

4. Принцип соответствия: в представлениях группы G, в которых инвариантная подгруппа $U(6,6)$ задается тривиальным (единичным) представлением, p^μ совпадает с (эрмитовыми) генераторами трансляции k^μ.

5. Компоненты обобщенного импульса коммутируют между собой:

$$[p^{\mu}, p^{\nu}] = 0 . \tag{3.4}$$

В дальнейшем будет рассмотрен также более общий случай, когда требование 5) отброшено. (Другая модель с некоммутирующими динамическими импульсами рассмотрена в [28]).

Покажем сначала, что 4-вектор, удовлетворяющий требованиям 1)-4), в каждом неприводимом представлении $\underset{\sim}{G}$ имеет вид:

$$p^{\mu} = k^{\mu} + T^{\mu} \equiv k^{\mu} + V^{\mu} - A^{\mu} , \tag{3.5}$$

где

$$V^{\mu} = 2 (c \ V^{\mu}_{o} + \sqrt{3} \ d \ V^{\mu}_{8} + f \ V^{\mu}_{3}) , \tag{3.6}$$

$$A^{\mu} = 2 (c_1 \ A^{\mu}_{o} + \sqrt{3} \ d_1 \ A^{\mu}_{8} + f_1 \ A^{\mu}_{3}) ;$$

операторы V^{μ}_{s} и A^{μ}_{s} в представлениях осцилляторной серии задаются формулами (2.4), (2.5); c, d, f и c_1, d_1, f_1 – произвольные вещественные числа (множители 2 и $\sqrt{3}$ выделены для удобства).

Приведем схему доказательства сформулированного утверждения.

Если фиксировано неприводимое представление $\underset{\sim}{G}$, тем самым фиксировано численное значение генератора центра группы $\underset{\sim}{B}$. Тогда, в силу 2), коммутации с p^{μ} задают некий автоморфизм алгебры Ли $\underset{\sim}{SU}(6,6)$. Поскольку однако эта алгебра – простая, то рассматриваемый автоморфизм должен быть ее внутренним автоморфизмом, т.е.

$$[p^{\mu} , \underset{\sim}{SU}(6,6)] = [T^{\mu}, \underset{\sim}{SU}(6,6)] , \quad T^{\mu} \in \underset{\sim}{SU}(6,6) . \tag{3.7}$$

Согласно 1) генераторы T^{μ} должны преобразовываться как лоренцов 4-мерный вектор, следовательно, T^{μ} является линейной комбинацией векторов V^{μ}_{s} и A^{μ}_{s} (других 4-мерных векторов в алгебре Ли $\underset{\sim}{SU}(6,6)$ нет). Далее, требование 3) приводит к тому, что T^{μ} имеет вид (3.5)-(3.6). С другой стороны, (3.7) означает, что разность $p^{\mu} - T^{\mu}$ коммутирует с $\underset{\sim}{U}(6,6)$ и в силу 4) равна k^{μ}. Таким образом, представление (3.5)-(3.6) доказано. Как следует из вывода, коэффициенты c, d, f и c_1, d_1, f_1 могут зависеть от барионного числа. Заметим, что из любого представления следует трансляционная инвариантность обобщенного импульса

$$[k^{\nu} , p^{\mu}] = 0 , \tag{3.8}$$

хотя мы ее заранее не предполагали.

Требование 5) коммутативности компонент импульса приводит к тому, что постоянные c_1, d_1, f_1 выражаются посредством постоянных c, d, f по одной из следующих восьми формул:

$$c_1 = \pm c, \qquad d_1 = \pm d, \qquad f_1 = \pm f; \tag{3.9}$$

$$c_1 = \pm \frac{1}{3}(c+4d), \quad d_1 = \pm\frac{1}{3}(2c-d), \quad f_1 = \pm f; \tag{3.10}$$

$$c_1 = \pm\frac{1}{3}(c-2d+2f), \quad d_1 = \pm\frac{1}{3}(2d-c+f), \quad f_1 = \pm(c+d); \tag{3.11}$$

$$c_1 = \pm\frac{1}{3}(c-2d-2f), \quad d_1 = \pm\frac{1}{3}(2d-c-f), \quad f_1 = \mp(c+d) \tag{3.12}$$

(в каждой из четырех групп формул необходимо брать либо только верхний, либо только нижний знак). Этот результат основан на том, что генераторы типа

$$\bar{\xi}\left\{\gamma^{\mu} \times \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix} + i\gamma^5\gamma^{\mu} \times \begin{pmatrix} \epsilon_1 a_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 a_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 a_3 \end{pmatrix}\right\}\xi, \tag{3.13}$$

где $\epsilon_1^2 = \epsilon_2^2 = \epsilon_3^2 = 1$, коммутируют между собой, так как обращается в нуль произведение матриц:

$$(1 \pm i\gamma^5)\gamma^{\mu}(1 \pm i\gamma^5)\gamma^{\nu} = 0. \tag{3.14}$$

Обычный (кинематический) импульс частицы удовлетворяет наряду с 1)–5) еще двум требованиям:

а) импульс коммутирует со спином: $[p^{\mu}, w_{\nu}] = 0$,

в) импульс является полярным вектором: $U(P)\, p^{\mu}\, U^{-1}(P) = g^{\mu\mu}\, p^{\mu}$.

Полученный выше результат показывает, что, если добавить хотя бы одно из этих требований к условиям 1)– 5), то мы получим $p^{\mu} \equiv k^{\mu}$, т.е. никакого расщепления масс внутри неприводимых представлений группы G не будет (в согласии с /19,20/).

Поясним это утверждение в случае а). Если в определении (1.1) заменить k^{μ} на вектор p^{μ} (3.5), то w_{μ} автоматически будет коммутировать с p^{ν} и может показаться, что проблема не возникает. Однако легко видеть, что при таком определении разность $w_{\mu} - \tilde{w}_{\mu}$ не будет порождать инвариантного подпространства относительно U(6,6). Поэтому мы считаем, что k^{μ} в определении (1.1) коммутирует с U(6,6), а тогда наше утверждение становится очевидным.

С другой стороны, отказ от требований а) и в) означает, что величина p, как уже отмечалось, является аналогом обобщенного импульса частицы, взаимодействующей с полем, и не совпадает с определяемым на опыте кинематическим импульсом. Поскольку опыт показывает, что сильные и электромагнитные взаимодействия инвариантны относительно пространственного отражения, то на равных правах с вектором p необходимо рассматривать как динамическую характеристику частицы и пространственно отраженный вектор p':

$$p_0' = k^0 + V^0 + A^0, \qquad p_i' = -k^i - V^i - A^i . \tag{3.15}$$

Заметим, что в то время как операторы p^μ коммутируют между собой (так же как и операторы p_μ', связанные с ними преобразованием подобия), то коммутатор $[p^\mu, p_\nu']$ не равен нулю.

Не останавливаясь на нетривиальном вопросе о физическом смысле (эрмитовых) операторов p и p', мы постулируем, что оператор квадрата массы m^2 является однородной квадратичной функцией этих операторов, инвариантной относительно полной группы Лоренца (включающей пространственное отражение). Потребуем еще чтобы выполнялся принцип соответствия: в случае, когда представление группы внутренних симметрий тривиальное, должна реализоваться обычная связь между массой m и 4-импульсом k : $m^2 = k^2$. Наиболее общее выражение, удовлетворяющее этим требованиям, имеет вид:

$$\begin{aligned} m^2 &= \frac{1-\kappa}{4}\,(p^2 + p'^2) + \frac{1+\kappa}{4}\,(pp' + p'p) = \\ &= (k + V)^2 - \kappa A^2 . \end{aligned} \tag{3.16}$$

При этом вещественная постоянная κ может зависеть от представления группы $U(6,6)$, т.е. от барионного числа B. Поскольку спин определяется вектором w (1.1), то связь между генераторами $U(6,6)$ и квантовыми числами частиц приобретает наиболее простой вид в системе покоя вектора k. Скалярный квадрат k^2 вектора k является оператором Казимира группы G и поэтому кратен единичному оператору в любом неприводимом представлении этой группы. В представлениях, описывающих частицы, мы будем предполагать, что k^2 положительно, т.е. что вектор k -времени-подобен:

$$k^2 = m_B^2, \qquad m_B > 0 \tag{3.17}$$

(индекс B указывает, что k^2, вообще говоря, зависит от барионного числа). В системе покоя вектора k уравнение (3.16) приобретает вид:

$$m^2 = m_B^2 + 2m_B V^0 + V^2 - \kappa A^2 . \tag{3.18}$$

Согласно (2.4), (2.5) и (3.6), операторы V^{μ} и A^{μ} выражаются следующим образом в терминах операторов рождения и уничтожения a^* , b^* и a , b :

$$V^{\circ} = 6c + a^*_{\alpha} \lambda a_{\alpha} + b^*_{\alpha} \lambda b_{\alpha} \equiv 6c + n_{\lambda} ,$$

$$V^{i} = a^* \sigma_i \times \lambda b^* + b\, \sigma_i \times \lambda a ,$$

$$A^{\circ} = a^*_{\alpha} \lambda_{(1)} b^*_{\alpha} + b_{\alpha} \lambda_{(1)} a_{\alpha} , \tag{3.19}$$

$$A^{i} = a^* \sigma_i \times \lambda_{(1)} a + b^* \sigma_i^T \times \lambda_{(1)} b ,$$

$$/ (\sigma_i^T)_{\alpha\beta} = (\sigma_i)_{\beta\alpha} /$$

$$\lambda = c I + \sqrt{3}\, d \lambda_8 + f \lambda_3 = \begin{pmatrix} c+d+f & 0 & 0 \\ 0 & c+d-f & 0 \\ 0 & 0 & c-2d \end{pmatrix} ,$$

$$\lambda_{(1)} = c_1 I + \sqrt{3}\, d_1 \lambda_8 + f_1 \lambda_3 \tag{3.20}$$

(по повторному индексу α подразумевается суммирование от 1 до 2).

Уравнение (3.18) и равенства (3.19-20) содержат все необходимое для нахождения спектра масс адронов. В следующих параграфах мы применим их к 56-плету барионов и 36-плету мезонов.

<u>Замечание.</u> Могло показаться, что более естественно определить m^2 как квадрат динамического импульса p , вместо того чтобы пользоваться более сложной формулой (3.16). Однако в таком подходе не только масса является смесью скаляра и псевдоскаляра, что не соответствует сделанным физическим предположениям, но, кроме того, как показал анализ, в случае барионов она убывает с возрастанием спина, что противоречит опыту. Можно добиться за счет отказа от коммутативности компонент импульса, чтобы сам импульс имел правильные трансформационные свойства относительно пространственного отражения, т.е. был полярным вектором. При этом мы перейдем к формуле (3.16) с $\kappa = 0$. Однако в этом случае, как будет видно из результатов следующего параграфа, потеряется зависимость барионных масс от спина, т.е. масса нуклона будет получаться равной массе $(\frac{3}{2},\frac{3}{2})$ -резонанса Δ , масса Σ -гиперона – массе Σ_{δ} и т.д.

Отметим еще, что для доказательства самосогласованности сформулированных постулатов необходимо показать положительную определенность оператора (3.16). Мы оставляем здесь этот вопрос открытым.

4. Массовые формулы для барионов

Если в разложении (2.11) для барионных векторов состояния ограничимся первым членом (входящим в представлении $(\underline{56}, \underline{1})$ группы $U(6) \times U(6)$), то оператор m^2 (3.18) будет иметь такие же матричные элементы, что и оператор

$$
\begin{aligned}
m^2_{(\underline{56})} = {} & m_1^2 + 2m_1 (9c + 3dY + 2fI_3) + 18[3(c^2 - d^2) - f^2] + \\
& + 2\kappa[3(c_1^2 - d_1^2) - f_1^2] + \kappa[4J(J+1) - 15][c_1^2 - 2d_1^2 - \\
& - (c_1 - 2d_1) f_1] + [9d^2 + 36cd - 3f^2 + \kappa(24c_1 d_1 - \\
& - 3d_1^2 + f_1^2)]Y + 9(d^2 + \kappa d_1^2) Y^2 + \\
& + \kappa[3(c_1 + d_1) d_1 - (c_1 - 2d_1 + f_1) f_1](4\underline{I}^2 - Y^2 - 6Y - 8) + \\
& + 12f(2c - d + dY) I_3 + 4\kappa f_1 (4c_1 + d_1 + 3d_1 Y) I_3 + \\
& + 4(f^2 + \kappa f_1^2) I_3^2 - 2\kappa(c_1 - 2d_1) f_1 (4\underline{L}^2 - Q^2 + 6Q - 8)
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

(см. приложение). Здесь использованы обычные обозначения для квантовых чисел частиц, в частности, $\underline{L}^2$ - квадрат L - спина (иногда называемый также U -спином). Его компоненты L_i задаются следующими генераторами

$$
\begin{aligned}
& L_1 = M^\circ_6, \qquad L_2 = M^\circ_7, \\
& L_3 = -\tfrac{1}{2} M^\circ_3 + \frac{\sqrt{3}}{2} M^\circ_8 = Y - \tfrac{1}{2} Q .
\end{aligned}
\tag{4.2}
$$

Все "частицы" из 56-плета за исключением Σ° и Λ (определяемые как собственные функции изоспина) являются собственными векторами оператора $\underline{L}^2$, причем для диагональных матричных элементов справедливо тождество

$$
\frac{2}{2I+1} \sum_{I_3=-I}^{I} \langle J, Y, I, I_3 | \underline{L}^2 | J, Y, I, I_3 \rangle = \frac{9}{4} + J(J+1) + \frac{3}{8} Y^2 - \frac{5}{6} I(I+1) . \tag{4.3}
$$

Действие оператора $\underline{L}^2$ на Σ° и Λ задается равенствами (см., например, [29])

$$L^2 |\Lambda> = \frac{3}{2} |\Lambda> - \frac{\sqrt{3}}{2} |\Sigma^\circ>,$$

$$L^2 |\Sigma^\circ> = -\frac{\sqrt{3}}{2} |\Lambda> + \frac{1}{2} |\Sigma^\circ> . \qquad (4.4)$$

Для декуплета барионов со спином 3/2, входящих в 56, формула (4.1) упрощается в силу тождеств, которые имеют место в части (10,4) представления 56:

$$4 I^2 = Y^2 + 6Y + 8, \qquad 4 L^2 = Q^2 - 6Q + 8 . \qquad (4.5)$$

Массовый оператор (4.1) приводит к следующим соотношениям между барионными массами в рассматриваемом приближении (символы частиц обозначают квадраты соответствующих масс; числа под каждой формулой дают экспериментальные значения соответствующих комбинаций с ошибками в Бэв^2):

$$\underset{0{,}020 \pm 0{,}003}{\Xi^- - \Xi^\circ + n - p} = \underset{0{,}019 \pm 0{,}0008}{\Sigma^- - \Sigma^+}, \qquad (4.6)$$

$$\underset{1{,}278 \pm 0{,}010}{\Omega^- - \Delta^-} = \underset{1{,}284 \pm 0{,}004}{3 (\Xi^-_\delta - \Sigma^-_\delta)}, \qquad (4.7)$$

$$\underset{0{,}085 \pm 0{,}0025}{p + n + \Xi^\circ + \Xi^- + \Sigma^+ + \Sigma^- - 3(\Sigma^\circ + \Lambda)} = \qquad (4.8)$$

$$= \underset{0{,}088 \pm 0{,}012}{\Xi^-_\delta + \Xi^\circ_\delta + \Delta^{++} + \Delta^- - \Sigma^+_\delta - \Sigma^-_\delta - 2\Sigma^\circ_\delta},$$

$$\underset{3{,}657 \pm 0{,}002}{\Sigma^-_\delta + \Xi^-} = \underset{3{,}773 \pm 0{,}003}{\Xi^-_\delta + \Sigma^-}, \qquad (4.9)$$

$$\Delta^{++} - \Delta^- = 3(\Delta^+ - \Delta^\circ) = 3(n - p),$$

$$\Xi^-_\delta - \Xi^\circ_\delta + \Delta^\circ - \Delta^+ = \Sigma^-_\delta - \Sigma^+_\delta . \qquad (4.10)$$

Мы видим, что соотношения (4.6) - (4.8) удовлетворяются в пределах экспериментальной точности, в то время как правая и левая части соотношения (4.9) отличаются на 3,3% от величины левой части. Формулу (4.10) практически нельзя еще сравнивать с опытом, так как первые измерения изотопических расщеплений в декуплете весьма неточны (см.[30]). Отметим, что относительно самое неточное соотношение (4.9) является следствием того, что все квантовые числа, входящие в массовом операторе (4.1),

(J, Q, Y, I, L) взаимно сокращаются для четырех частиц, участвующих в (4,9). Примерно столь же неудовлетворительна и аналогичная формула в обычной $SU(6)$ - теории (для первых степеней масс - см[29]), дающая интервал в декуплете через параметры октета. В нашем подходе можно надеяться, что точность формул улучшится при учете следующего приближения. Заметим, что все выписанные соотношения справедливы, если не предполагать никакой связи между параметрами c, d, f и c_1, d_1, f_1, т.е. если допускать, что компоненты p^μ обобщенного импульса могут не коммутировать между собой.

Численный расчет[x)] показывает, что среди возможностей (3.9)-(3.12) наилучшее согласие с экспериментальными значениями масс дает первая (когда связь между константами c, d, f и c_1, d_1, f_1 дается формулой (3.9)). Заметим, что если не предполагать коммутативность компонент обобщенного импульса и работать с шестью постоянными c, d, f, c_1, d_1, f_1 (полагая $\kappa = 1$) вместо четырех (c, d, f и κ), то согласие с опытом при этом улучшается весьма незначительно, главным образом, за счет лучшего описания изотопического расщепления (максимальная ошибка в массе в обоих случаях равна 2%). При определении постоянных m_1, c, d, f и κ методом наименьших квадратов мы задаем одинаковым относительный вес для среднего квадратичного для каждого изотопического мультиплета и в десять раз меньший вес в уравнениях для расщеплений внутри одного мультиплета[xx)].

Результаты и их сопоставление с опытом даны в таблице 1. Для сравнения приведены результаты расчета, в котором не предполагалась коммутативность компонент импульса. В нижней части таблицы даны предсказания для изотопических расщеплений в декуплете в обоих вариантах.

5. Массовые формулы для мезонов

В мезонном представлении мы ограничимся первыми двумя членами ($\underline{1}, \underline{1}$) и ($\underline{6}, \underline{6}^*$) разложения (2.11). Базисные векторы в пространстве ($\underline{6}, \underline{6}^*$) мезонов с отрицательной четностью определим формулой[xxx)]

---

x) Все вычисления проводились И.Н.Силиным на электронной счетной машине.

xx) В том, что соответствие теоретических значений масс экспериментальным не является следствием простой интерполяции со многими произвольными постоянными, можно убедиться, если изменить значение одной из 12-ти опытно известных масс. Такая замена экспериментального значения Δ от 1,528 Бэв^2 на 1,236 Бэв^2 привела к тому, что после нового определения констант m_1, c, d, f и κ по методу наименьших квадратов, ошибка для квадратов масс получилась порядка 10% вместо 4% в реальном случае.

xxx) Тензор нулевого ранга $|0\rangle$ (не следует смешивать с физическим вакуумом) преобразуется по тривиальному представлению ($\underline{1}, \underline{1}$) группы $U(6) \times U(6)$.

$$|\Phi^{\mu}_{s}> = \tfrac{1}{2}\, a^* \sigma_{\mu} \times \lambda_s b^* \,|0> , \qquad \mu = 0,1,2,3, \qquad s = 0,1,\dots, 8 . \tag{5.1}$$

При этом псевдоскалярные мезоны получаются при $\mu=0$;

$$|\Pi_s> = |\Phi^{o}_{s}> = \tfrac{1}{2}\, a^*_{\alpha}\, \lambda_s\, b^*_{\alpha} |0> ; \tag{5.2}$$

в частности

$$|\pi^{\pm}> = \frac{1}{\sqrt{2}}\,(|\Pi_1> \pm i|\Pi_2>), \qquad |\pi^{o}> = |\Pi_3>, \; |K^{\pm}> = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Pi_4> \pm i|\Pi_5>) ;$$

векторные мезоны выражаются через Φ^{1}_{s} ; мезоны с проекцией спина +1 имеют вид:

$$V^{(1)}_{s} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\Phi^{1}_{s}> + i|\Phi^{2}_{s}>) = \frac{1}{\sqrt{2}}\, a^*_1\, \lambda_s\, b^*_2\, |0> . \tag{5.3}$$

Т а б л и ц а 1

$[p^{\mu}, p^{\nu}] = 0$,	$[p^{\mu}, p^{\nu}]$ – любое, $\kappa = 1$
κ = 0,67612, m_1 =4293,767 Мэв	m_1=1386,611
$c=c_1$ =–266,244 Мэв, $d=d_1$=–30,931 Мэв	c =–3,608, c_1 =–216,640
$f=f_1$ =–0,429 Мэв	d =–64,247, d_1 =–26,341
	f =–2,231, f_1 =–2,513

Барион	Квадрат массы в $Бэв^2$	Ошибка в %	Квадрат массы в $Бэв^2$	Ошибка в %	Квадрат экспериментальной массы в $Бэв^2$
p	0,8551	2,9%	0,8674	1,5%	$0,8803 \pm 9 \cdot 10^{-6}$
n	0,8583	2,8%	0,8698	1,5%	$0,88276 \pm 9 \cdot 10^{-6}$
Λ	1,2769	2,6%	1,2561	1%	$1,244 \pm 2,5 \cdot 10^{-4}$
Σ^{+}	1,4219	0,5%	1,4000	1,5%	$1,4145 \pm 3,2 \cdot 10^{-4}$
Σ^{o}	1,4261	0,3%	1,4097	0,9%	$1,422 \pm 4,8 \cdot 10^{-4}$
Σ^{-}	1,4303	0,2%	1,4197	1%	$1,4335 \pm 3,2 \cdot 10^{-4}$
Ξ^{o}	1,798	4%	1,7986	4%	$1,727 \pm 26 \cdot 10^{-4}$
Ξ^{-}	1,8032	3,4%	1,815	4%	$1,745 \pm 5,2 \cdot 10^{-4}$
Λ	1,5732	3%	1,5771	3,3%	$1,528 \pm 1 \cdot 10^{-3}$
Σ_{δ}	1,9189	0,4%	1,8878	1,3%	$1,912 \pm 1,4 \cdot 10^{-3}$
Ξ_{δ}	2,2934	2%	2,2853	2,4%	$2,340 \pm 2,8 \cdot 10^{-3}$
Ω^{-}	2,6968	4%	2,7697	1,3%	$2,8056 \pm 1 \cdot 10^{-2}$

	Изотопические расщепления в декуплете		
$\Delta^+ - \Delta^{++}$	1,3 Мэв	0,9 Мэв	$0{,}45 \pm 0{,}85$ x)
$\Delta^\circ - \Delta^+$	1,3 Мэв	0,9 Мэв	
$\Sigma_\delta^- - \Sigma_\delta^+$	2,5 Мэв	3,8 Мэв	$4{,}4 \pm 2,\ 17 \pm 7$ x)
$\Xi_\delta^- - \Xi_\delta^\circ$	1,3 Мэв	2,5 Мэв	$5{,}7 \pm 3{,}0$ x)

При $s \neq 0,3,8$ оператор квадрата массы в рассматриваемом базисе диагонален и его ненулевые (диагональные) матричные элементы $m^2_{(s,\mu)}$ выражаются формулой:

$$m^2_{(s,\mu)} = m_0^2 + 2m_0(8c + dy_s + fi_s) + 40c^2 - 4\kappa c_1^2 - 48d^2 - 16f^2 +$$
$$+ (d^2 - \kappa d_1^2)(y_s + 3)y_s + (f^2 - \kappa f_1^2)(i_s^2 - y_s) + 2(5cd + \kappa c_1 d_1)y_s +$$
$$+ 2[(5c - 4d)f + \kappa(c_1 + 4d_1)f_1]i_s + 4\delta_{\mu 0}\kappa[2c_1^2 - 4d_1^2 - \frac{4}{3}f_1^2 + \tag{5.4}$$
$$+ (2c_1 d_1 + d_1^2 - \frac{1}{3}f_1^2)y_s + 2(c_1 - 2d_1)f_1 i_s + d_1^2 y_s^2 + f_1^2 i_s^2],$$

$s = 1,2,4,5,6,7,$

$\mu = 0, 1,2,3.$

Здесь

$$y_s = 3(\tilde{Y})_{ss} \equiv \sqrt{3} < \Phi_s^\mu | a_\alpha^* \lambda_8 a_\alpha + b_\alpha^* \lambda_8 b_\alpha | \Phi_s^\mu > ,$$

$$y_1 = y_2 = 2, \qquad y_4 = y_5 = y_6 = y_7 = 1; \tag{5.5}$$

$$i_s = 2(\tilde{I}_3)_{ss} \equiv < \Phi_s^\mu | a_\alpha^* \lambda_3 a_\alpha + b_\alpha^* \lambda_3 b_\alpha | \Phi_s^\mu > ,$$

$$i_1 = i_2 = 0, \qquad i_4 = i_5 = -i_6 = -i_7 = 1. \tag{5,6.}$$

При $s = 0,3,8$ векторы $|\Phi_s^\mu>$ не являются собственными векторами оператора m^2. Собственные значения квадрата массы определяются в этом случае из следующих систем (в левых частях (5.7) и (5.8) стоят симметрические матрицы):

---

x) См. /30/, где имеются ссылки на экспериментальные работы.

$$
\begin{pmatrix}
A-8\kappa\left(c_1^2-d_1^2-\frac{1}{3}f_1^2\right) & 4\sqrt{\frac{2}{3}}\left[(m_0+5c-d)f+\kappa(2c_1+5d_1)f_1\right] & 4\sqrt{2}\left[m_0 d+5cd+\frac{1}{2}\left(d^2-\frac{1}{3}f^2\right)+\kappa\left(2c_1 d_1-\frac{5}{2}d_1^2+\frac{5}{6}f_1^2\right)\right] \\
\cdots & A+4m_0 d+2d^2-\frac{2}{3}f^2+\kappa\left(4c_1^2-2d_1^2-2f_1^2\right)+20\left(cd+\kappa c_1 d_1\right) & \frac{4}{\sqrt{3}}\left[(m_0+5c-d)f+\kappa(5c_1-d_1)f_1\right] \\
\cdots & \cdots & A-4m_0 d-2d^2+\frac{2}{3}f^2+\kappa\left(4c_1^2-6d_1^2-\frac{2}{3}f_1^2\right)-20\left(cd+\kappa c_1 d_1\right)
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \Pi_0 \\ \Pi_3 \\ \Pi_8 \end{pmatrix}
=
$$

$$
= m^2 \begin{pmatrix} \Pi_0 \\ \Pi_3 \\ \Pi_8 \end{pmatrix} \qquad (5.7)
$$

where

$$
A = \frac{1}{2}\left([illegible] \right) m_0^2 + 16 m_0 c + 40\left(c^2-d^2-\frac{1}{3}f^2\right); \qquad (5.8)
$$

$$
\begin{pmatrix}
B-8\kappa\left(c^2-d^2-\frac{1}{3}f^2\right) & 4\sqrt{\frac{2}{3}}\left[(m_0+2c-d)f+\kappa(c_1+d_1)f_1\right] & 2\sqrt{2}\left[2(m_0+2c)d+d^2-\frac{f^2}{3}+\kappa\left(2c_1 d_1-d_1^2+\frac{1}{3}f_1^2\right)\right] \\
\cdots & B+4m_0 d+4c^2+10d^2-6f^2+20cd-\kappa\left(2d_1^2-\frac{2}{3}f_1^2-4c_1 d_1\right) & \frac{4}{\sqrt{3}}\left[(m_0+5c-7d)f+\kappa(c_1+d_1)f_1\right] \\
\cdots & \cdots & B-4m_0 d+4c^2-18d^2+\frac{10}{3}f^2-20cd+\kappa\left(2d_1^2-\frac{2}{3}f_1^2-4c_1 d_1\right)
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} V_0 \\ V_3 \\ V_8 \end{pmatrix}
=
$$

$$
= m^2 \begin{pmatrix} V_0 \\ V_3 \\ V_8 \end{pmatrix}, \qquad (5.9)
$$

где

$$B = \frac{1}{3}(\phi + \omega + \rho^{o}) = m_0^2 + 16 m_0 c + 36 c^2 - 48 d^2 - 16 f^2 - 4\kappa (c_1^2 + 2d_1^2 + \frac{2}{3} f_1^2). \qquad (5.10)$$

Наконец, для квадрата массы скалярного мезона $|0\rangle$ (преобразующегося по представлению $(\underline{1}, \underline{1})$) находим

$$S \equiv \langle 0 | m^2 | 0 \rangle = m_0^2 + 12 m_0 c + 18 c^2 - 36 d^2 - 12 f^2 - \kappa (6 c_1^2 + 12 d_1^2 + 4 f_1^2). \qquad (5.11)$$

Операторы $\tilde{Y}_1$ и $\tilde{I}_3$, определяемые равенствами (5.5) и (5.6), совпадают с третьей проекцией изотоп-спина и с гиперзарядом для тензоров, имеющих только верхние (кварковые) индексы. На антикварковые индексы эти операторы действуют с противоположным знаком. (Напомним для сравнения выражения для операторов Y и I_3 через операторы рождения и уничтожения:

$$Y = \frac{1}{\sqrt{3}} (a^*_\alpha \lambda_8 a_\alpha - b^*_\alpha \lambda_8 b_\alpha), \qquad I_3 = \frac{1}{2} (a^*_\alpha \lambda_3 a_\alpha - b^*_\alpha \lambda_3 b_\alpha)).$$

В отличие от Y и I_3 операторы $\tilde{Y}$ и $\tilde{I}_3$ имеют одинаковые средние значения для частиц и античастиц, так что равенство масс π^+ и π^--мезона) в нашем подходе получается автоматически[x)].

Однако расчет показал, что количественно спектр мезонных масс плохо описывается формулами (5.4) - (5.10) с коммутирующими импульсами. Если допустить некоммутативность компонент обобщенного импульса, и не учитывать расщепление масс внутри одного изотопического мультиплета, положив при этом $f = f_1 = 0$ (рассматривая таким образом 8 уравнений с пятью неопределенными постоянными), мы получим несколько лучшее согласие (результаты расчета приведены в таблице 2). Интересно отметить, что наибольшая ошибка возникает в формуле (5.8), включающей тяжелый псевдоскалярный мезон $\chi(959)$ (насколько нам известно, в литературе до сих пор нет теоретической формулы для масс, которая давала бы хорошее согласие для χ-частицы).

Для сравнения напомним, что единственная формула для квадратов мезонных масс в схеме SU(6) (полученная без пренебрежения вкладом в массовый оператор от представления $\underline{189}$ - см.[/29/]), а именно $4K = 3\eta + \pi$ удовлетворяется на опыте с ошибкой 6,5%.

[x)] Как было указано А. В. Николовым, при редукции по SU(6) в мезонном представлении $\underline{35}$ оператор $\tilde{Y}$ связан с гиперзарядом Y, со "спином странных кварков" $\underline{S}$ и с оператором Казимира $C_2^{(4)}$ подгруппы SU(4) формулой:

$$6\tilde{Y} + 4 = C_2^{(4)} - 2\underline{S}^2 - \frac{1}{4} Y^2 .$$

Т а б л и ц а 2

$[p^\mu, p^\nu]$ – любое ; $\kappa = -1$, $m_0 = 1061{,}97$ Мэв,
$c = -39{,}86$ Мэв; $c_1 = -261{,}7$ Мэв,
$d = -39{,}76$ Мэв, $d_1 = 4{,}47$ Мэв

	Квадрат массы в Бэв^2	Ошибка в %	Квадрат экспериментальной массы в Бэв^2
$\pi^{\pm}$	0,01945	0,2%	$0{,}01948 \pm 5\cdot10^{-6}$
K	0,2416	1,7%	$0{,}2457 \pm 2{,}4\cdot10^{-4}$
$\frac{1}{3}(\chi + \eta + \pi^0)$	0,4508	9,3	$0{,}4128 \pm 1\cdot10^{-3}$
ρ	0,5862	0,2%	$0{,}5853 \pm 4{,}5\cdot10^{-3}$
K*	0,7798	1,9%	$0{,}7946 \pm 1{,}5\cdot10^{-3}$
$\frac{1}{3}(\phi + \omega + \rho)$	0,7059	5,4%	$0{,}7458 \pm 1{,}5\cdot10^{-3}$
S	1		
$\frac{1}{3}(\chi^2 + \eta^2 + \pi^{0\,2} - \chi\eta - \chi\pi^0 - \eta\pi^0)$	0,20846 Бэв^4	1,8%	$0{,}2123 \pm 2\cdot10^{-3}$
$\frac{1}{3}(\phi^2 + \omega^2 + \rho^2 - \phi\omega - \omega\rho - \phi\rho)$	0,06407 Бэв^4	1,5%	$0{,}065 \pm 7\cdot10^{-3}$

6. Обсуждение результатов

Основные результаты работы могут быть сформулированы следующим образом:

a) В рамках группы G (1.3) определяются обобщенный (динамический) импульс, удовлетворяющий условиям 1)–5) § 3. Общий вид такого импульса p дается формулами (3.5)–(3.12).

b) Постулируется, что оператор квадрата массы является инвариантной квадратичной функцией от импульса p и от пространственно отраженного импульса p', что приводит к выражению (3.16) или (3.18).

c) Предполагается, что барионы и мезоны могут быть включены в "осцилляторной" серии унитарных (бесконечномерных) представлений группы U(6,6), описанных в § 2. Векторы состояния адронов раскладываются по неприводимым представлениям $(\underline{m}, \underline{n}^*)$ максимальной компактной подгруппы $U(6) \times U(6)$.

d) При этих предположениях в § 4 выводятся формулы для квадратов масс барио–

нов из представления $(\underline{56}, \underline{1})$, которые удовлетворяются с ошибкой, не превосходящей 4%. Такое согласие с опытом представляется вполне удовлетворительным, если учесть, что рассматриваемые формулы получены лишь в первом приближении (относительно разложения векторов состояний (2.11)).

e) Массовые формулы для мезонов из представления $(\underline{6}, \underline{6}^*)$ (§ 5) хотя и обладают некоторыми правильными качественными особенностями (например, автоматически приводят к равенству масс частиц и античастиц), количественно хуже согласуются с экспериментальными значениями масс. (Для системы уравнений с тремя степенями свободы получается χ^2 распределенное порядка 120).

Возникает вопрос, как объяснить относительное несоответствие предсказаний нашей схемы с опытом в случае мезонов при сравнительно хорошем согласии для барионов. Прежде всего можно привести не раз повторявшееся соображение, что в то время как наибольшее отношение между квадратами барионных масс в 56-плете порядка 3, то квадрат массы π-мезона m_π^2 около 47 раз меньше m_χ^2 и свыше 53 раза меньше m_ϕ^2. Поэтому можно считать, что для хорошего описания мезонных масс необходимо учесть и следующее приближение (а именно, член $(\underline{56}, \underline{56}^*)$) в разложении (2.11). Это предположение тем более правдоподобно, что $(\underline{56}, \underline{56}^*)$ – первый член в разложении (2.11), содержащий (статический) вклад от барион-антибарионных пар. Возможно, однако, что имеющееся несогласие указывает на то, что необходимо отказаться от какого-нибудь из предположений а)–с), заложенных в основу нашего вывода. Здесь мы укажем на некоторые возможные модификации рассматриваемой схемы, которые заслуживают, на наш взгляд, внимания.

1. Требование в) можно заменить, не нарушая принцип соответствия, более общим требованием, что m^2 является инвариантной однородной функцией от обобщенных импульсов p и p' второй степени однородности, переходящей в k^2 для тривиальных представлений группы $U(6,6)$. Тогда вместо (3.16) будем иметь

$$m^2 = \tfrac{1}{2}(pp' + p'p)\, F\left(\frac{p^2 + p'^2}{pp' + p'p}\right), \tag{6.1}$$

где $F(1)=1$. Формула (3.16) получается отсюда как частный случай, если разложить функцию F в ряд Тейлора вокруг точки 1, ограничиться линейным членом и положить $F'(1) = \frac{1-\kappa}{2}$. Без дальнейших ограничений на функцию F такое обобщение вносит слишком большой произвол.

2. Возможно, что следует отказаться от предположения с) и включить мезоны в другом представлении группы $U(6,6)$. Необходимость выйти за рамки рассматриваемой серии представлений диктуется тем, что произведение двух представлений осцилляторной серии не раскладывается только по неприводимым представлениям этой же

серии. Естественно искать мезоны среди неприводимых представлений, на которые разлагается произведение барионного представления (B=1) с антибарионным. В недавней работе[31] предлагается, наоборот, искать другое представление для барионов.

3. Наиболее радикальным изменением схемы был бы отказ от группы $U(6,6)$ как инвариантной подгруппы (внутренних симметрий) группы G. Физически $U(6,6)$ - симметрия означает, что высшие мезонные и барионные резонансы классифицируются по более высоким представлениям группы $U(6) \times U(6)$ (в терминологии Гелл-Манна[32] являются $U(6) \times U(6)$ - возбуждениями 56-плета барионов и 36-плета мезонов). В[32] классифицировалась как более правдоподобная для барионов другая возможность (так называемые L -возбуждения с точки зрения модели кварков, когда появление высших спинов у резонансов должно преобладать над появлением высших значений заряда и гиперзаряда. Реализация этой второй возможности на языке теории представлений, по-видимому, потребовала бы введения в рассмотрение бесконечных групп.

Выбор между этими возможностями должны дать дальнейшие исследования, в частности, подсчет следующих приближений для мезонов и барионов.

В заключение авторы выражают глубокую благодарность академику Н.Н. Боголюбову, В.Г. Кадышевскому, А.Н. Тавхелидзе и А. Ульману за интерес к работе и полезные обсуждения, а также участникам семинаров Лаборатории теоретической физики Объединенного института ядерных исследований и Математического института им. В.А. Стеклова за плодотворную дискуссию. Мы особенно обязаны И.Н. Силину за образцовое проведение вычислений, нашедших отражение в § 4 и 5, и выражаем ему свою искреннюю благодарность.

Приложение

Вывод массовых формул

Операторы V^2 и A^2, входящие в оператор квадрата массы (3.18), имеют следующий вид в представлениях осцилляторной серии:

$$V^2 = 18c^2 - 36d^2 - 12f^2 + 12cn_\lambda + n_\lambda^2 - 3n_{\lambda^2} -$$

$$- 4a^*_\alpha \lambda b^*_\beta b_\beta \lambda a_\alpha + 2a^*_\alpha \lambda b^*_\alpha b_\beta \lambda a_\beta + (b_\alpha \lambda a_\alpha)^2 +$$

$$+ (a^*_\alpha \lambda b^*_\alpha)^2 - 2(a^*_\alpha \lambda b^*_\beta a^*_\beta \lambda b^*_\alpha + b_\alpha \lambda a_\beta b_\beta \lambda a_\alpha), \qquad (\Pi.1)$$

$$A^2 = 6c_1^2 + 12\,d_1^2 + 4\,f_1^2 + n^2_{\lambda_{(1)}} + n_{\lambda^2_{(1)}} -$$
$$- 2(a^*_\alpha\,\lambda_{(1)} a_\beta + b^*_\beta\,\lambda_{(1)} b_\alpha)(a^*_\beta\,\lambda_{(1)} a_\alpha + b^*_\alpha\,\lambda_{(1)} b_\beta) +$$
$$+ 2\,a^*_\alpha\,\lambda_{(1)} b^*_\alpha\; b_\beta\,\lambda_{(1)} a_\beta + (b_\alpha\,\lambda_{(1)} a_\alpha)^2 + (a^*_\alpha\,\lambda_{(1)} b^*_\alpha)^2, \qquad (\Pi.2)$$

где
$$n_x = a^*_\alpha\; x\; a_\alpha + b^*_\alpha\; x\; b_\alpha\,,$$
$$x = \lambda\,,\ \lambda_{(1)}\,,\ \lambda^2\,,\ \lambda^2_{(1)}\,, \qquad (\Pi.3)$$

а матрицы λ и $\lambda_{(1)}$ задаются формулами (3.20). При получении (П.1) и (П.2) из равенств (3.19) мы воспользовались тождеством

$$\sum_{k=1}^{3} (\sigma_k)_{\alpha\beta}\,(\sigma_k)_{\gamma\delta} = 2\delta_{\alpha\delta}\,\delta_{\gamma\beta} - \delta_{\alpha\beta}\,\delta_{\gamma\delta}\,. \qquad (\Pi.4)$$

Чтобы получить массовые формулы для барионов, мы должны задать векторы состояния в представлении (56, 1). Введем базис симметричных тензоров в пространстве этого представления

$$|\,\alpha_1 i_1\ \alpha_2 i_2\ \alpha_3 i_3 > = \frac{1}{\sqrt{6}}\; a^*_{\alpha_1 i_1}\; a^*_{\alpha_2 i_2}\; a^*_{\alpha_3 i_3}\,|0>\,, \qquad (\Pi.5)$$
$$\alpha_l = 1,2, \qquad i_l = 1,2,3.$$

Волновые функции декуплета с максимальной третьей проекцией спина (3/2) пропорциональны векторам^x) $|\,1i_1, 1i_2, 1i_3>$:

$$\Delta^{++} = |\,11\ 11\ 11>, \qquad \Delta^{+} = \sqrt{3}\,|\,11\ 11\ 12>,$$
$$\Delta^{0} = \sqrt{3}\,|\,11\ 12\ 12>, \qquad \Delta^{-} = |\,12\ 12\ 12>;$$
$$\Sigma^{+}_{\delta} = \sqrt{3}\,|\,11\ 11\ 13>, \qquad \Sigma^{0}_{\delta} = \sqrt{6}\,|\,11\ 12\ 13>, \qquad \Sigma^{-}_{\delta} = \sqrt{3}\,|\,12\ 12\ 13>;$$
$$\Xi^{0}_{\delta} = \sqrt{3}\,|\,11\ 13\ 13>, \qquad \Xi^{-}_{\delta} = \sqrt{3}\,|\,12\ 13\ 13>, \qquad \Omega^{-} = |\,13\ 13\ 13>. \qquad (\Pi.6)$$

Волновые функции октета с проекцией спина +1/2 равны:

$$p = \sqrt{2}\,(\,|\,11\ 11\ 22> - |\,11\ 21\ 12>)\,,$$
$$n = \sqrt{2}\,(\,|\,12\ 12\ 21> - |\,12\ 22\ 11>)\,;$$

---

x) См. /29/, где, однако, некоторые нормировочные множители пропорциональности опущены.

$$\Sigma^{+} = \sqrt{2}(|^{11\ \ 11\ \ 23}> - |^{11\ \ 21\ \ 13}>),$$

$$\Sigma^{-} = \sqrt{2}(|^{12\ \ 12\ \ 23}> - |^{11\ \ 22\ \ 13}>);$$

$$\Xi^{o} = \sqrt{2}(|^{13\ \ 13\ \ 21}> - |^{13\ \ 23\ \ 11}>),$$

$$\Sigma = \sqrt{2}(|^{13\ \ 13\ \ 22}> - |^{13\ \ 23\ \ 12}>);$$

$$\Lambda = \sqrt{3}(|^{21\ \ 12\ \ 13}> - |^{11\ \ 22\ \ 13}>),$$

$$\Sigma^{o} = 2|^{11\ \ 12\ \ 23}> - |^{11\ \ 22\ \ 13}> - |^{21\ \ 12\ \ 13}>. \tag{П.7}$$

Теперь вычисление массовых формул сводится к элементарной (хотя и длинной) алгебраической выкладке. В частности, в соответствии с (4.1), квадраты масс для физических Σ^o и Λ частиц выражаются следующим ооразом:

$$\tfrac{1}{2}(\Sigma^{o}_{\Phi} + \Lambda_{\Phi}) =$$

$$= m_1^2 + 18 m_1 c + 54(c^2 - d^2) - 18 f^2 + 2\kappa\ [3(c_1^2 - d_1^2) - f_1^2], \tag{П.8}$$

$$\Sigma^{o}_{\Phi} - \Lambda^{o}_{\Phi} = 8\kappa \left\{[3d_1(c_1 + d_1) - f_1^2]^2 + 3(c_1 - 2d_1)^2 f_1^2\right\}^{1/2}. \tag{П.9}$$

При выводе формул (5.4) - (5.10) для квадратов мезонных масс используются следующие соотношения:

$$<\Phi^{\mu}_{s}\ |n_{\lambda}|\ \Phi^{\mu}_{s}> = 2c + d y_s + f i_s,$$

$$<\Phi^{\mu}_{o}\ |\ n_{\lambda}\ |\Phi^{\mu}_{s}> = 2(c\ \delta_{s0} + \sqrt{2}d\ \delta_{s8} + \sqrt{\tfrac{2}{3}}f\ \delta_{s3}), \tag{П.10}$$

$$<\Phi^{\mu}_{3}\ |n_{\lambda}|\ \Phi^{\mu}_{8}> = \frac{2}{\sqrt{3}} f;$$

$$<\Phi^{\mu}_{s}\ |n_{\lambda^2}|\ \Phi^{\mu}_{s}> = 2(c^2 + 2d^2 + \frac{2}{3} f^2) + \tag{П.11}$$

$$+(2cd - d^2 + \frac{1}{3} f^2) y_s + 2(c + d) f i_s;$$

$$<\Phi^{\mu}_{s}\ |\ n^2_{\lambda}|\ \Phi^{\mu}_{s}> = 4c(c + d y_s) + d^2 u_s + f^2 v_s + 2(2c - d) f i_s, \tag{П.12}$$

где значения величин $i_s = 2d_{3ss}$, $y_s = 2\sqrt{3}d_{8ss}$, $u_s = 12\sum_{t=0}^{8} d^2_{8st}$, $v_s = 4\sum_{t=0}^{8} d^2_{3st}$ x) приведены в нижней таблице

---

x) Постоянные d_{stu} определяются из соотношений антикоммутации матриц Гелл-Манна: $\{\lambda_s, \lambda_t\} = 2 d_{stu}\ \lambda_u$, $s, t, u = 0,1,\ldots,8.$

Таблица 3

s	$i_s = 2(\tilde{I}_3)_{ss}$	$y_s = 3(\tilde{Y})_{ss}$	$u_s = 9(\tilde{Y}^2)_{ss}$	$v_s = 4(\tilde{I}_3^2)_{ss}$
0	0	0	8	8/3
1,2	0	2	4	0
3	0	2	4	4
4,5	1	-1	1	1
6,7	-1	-1	1	1
8	0	-2	12	4/3

Литература

1. L.Michel. Phys. Rev., 137, B405 (1965).
2. L.Michel. Extensions of the Poincaré Group and SU(6) Symmetry. In: Symmetry Principles at High Energy, Proceedings of the Second Coral Gables Conference, San Francisco and London, 1965, p.331-352.
3. P.Budini and C.Fronsdal. Phys. Rev. Lett., 14, 968 (1965).
4. C.Fronsdal. Relativistic Symmetries, In: High-Energy Physics and Elementary Particles (Lectures presented at a seminar , Trieste, 1965) Vienna 1965, p. 665-678.
5. C.Fronsdal. Some Coupling Coefficient for SL(n,C), University of California, preprint Los Angelos, (1965).
6. Д.Стоянов. Об объединении пространственной и внутренней симметрий элементарных частиц. Препринт ОИЯИ Р-2443, Дубна 1965.
7. W.Rühl. Homogeneous Functions as a Basis of Unitary Representations of Group SL(n,C), CERN preprint TH 618, Geneva (1965).
8. W.Rühl. The Parity Transformation for a Symmetry Model which Uses Unitary Representations of the Group SL(n,C), CERN preprint TH. 626, Geneva (1965).
9. W.Rühl. A Relativistic Invariant Model of SU(6) Symmetry which Involves Infinite Representations of the Internal Symmetry Group, CERN preprint TH.636, Geneva (1965).
10. R.White. The SL(6,C) Symmetry (Lecture Notes). Preprint IC/65/84, Trieste (1965).
11. R.Delbourgo, M.A.Rashid, A.Salam and J.Strathdee. The U(12) Symmetry, In: High-Energy Physics and Elementary Particles (Lectures presented at a Seminar, Trieste, 1965). Vienna, 1965, p.455-532.
12. B.Kurşunoğlu. Two Massless States of Matter, University of Miami preprint, Coral Gables (1964).

13. B.Kurşunoğlu. Symmetry and Strong Interaction. In: Symmetry Principles at High-Energy, Proceedings of the Second Coral Gables Conference, San Francisco and London, 1965, p. 160-175.

14. Y.Dothan, M.Gell-Mann and Y.Neeman. Phys. Lett., 17, 148 (1965).

15. A.Salam and J.Strathdee. On the Coupling of Non-Compact Group Representations, preprint IC/65/79, Trieste (1965).

16. U.Ottoson, A.Kihlberg and J.Nilsson. Phys. Rev., 137, B658 (1965).

17. A.Kihlberg. On the "Minimal Internal Coupling", CERN preprint TH. 482, Geneva (1964).

18. P.Budini. Non-Compact Extensions of Symmetry Groups, preprint IC/65/85, Trieste (1965).

19. L.O'Raifeartaigh. Phys. Rev. Lett., 14, 332 and 575 (1965).
Phys. Rev., 139, B1052 (1965).

20. P.Roman and C.J.Koh. Nuovo Cim., 39, 1015 (1965).

21. M.Flato and D.Sternheimer. Phys. Rev. Lett., 15, 934 (1965).

22. H.Bacry. On some Classical Space-Time Groups and Their "SU(6)-Generalizations", CERN preprint TH. 526, Geneva (1965).

23. А.В.Николов и И.Т.Тодоров. Массовые формулы в неоднородной группе SU(6,6). Препринт ОИЯИ Р-2606, Дубна 1966.

24. O.A.Barut. Phys. Rev., 135, B839 (1964).

25. O.A.Barut and A.Bohm. Phys. Rev., 139, 1107 (1965).

26. O.A.Barut . Phys. Rev., 139, B 1433 (1965).

27. O.A.Barut. Mass Spectrum from Non-Compact Groups, In: High-Energy Physics and Elementary Particles (Lectures presented at a seminar, Trieste (1965), Vienna 1965.

28. A.Bohm. Dynamical Group and Mass Spectrum, preprint IC/65/83, Trieste, (1965).

29. В.Г.Кадышевский, Р.М.Мурадян, Я.А.Смородинский. SU(6) -симметрия в сильных и электромагнитных взаимодействиях элементарных частиц. Препринт ОИЯИ Р-2061, Дубна 1965.

Fortschr. d. Phys., 13, 599 (1965).

30. S.L.Glashow and I.R.Socolov. Electrodynamic Mass Formulae in SU(3) and SU(6). In: High-Energy Physics and Elementary Particles (Lectures presented at a seminar, Trieste, 1965). Vienna 1965, p.423-431.

31. A.Salam, and J.Strathdee. A Relativistic U(6,6) Theory, preprint IC/66/5, Trieste (1966).

32. M.Gell-Mann. Approximate Symmetries in Strong Interactions. In: Oxford International Conference on Elementary Particles, 19/25 September, 1965. Proceedings, Rutherford High-Energy Laboratory, 1966, p. 183-192.

33. М.И.Граев. Труды Московского математического общества 7, 335 (1958).

Рукопись поступила в издательский отдел
15 марта 1966 г.