Н-638

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р-2606

А.В. Николов и И.Т. Тодоров

МАССОВЫЕ ФОРМУЛЫ
В НЕОДНОРОДНОЙ ГРУППЕ SU (6,6)

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1966

Ч101/3 кр

P-2606

А.В. Николов и И.Т. Тодоров

МАССОВЫЕ ФОРМУЛЫ В НЕОДНОРОДНОЙ ГРУППЕ SU (6,6)

Направлено в журнал "Ядерная физика"

... институт
... исследований
БИБЛИОТЕКА

§ 1. Введение

Группа $SU(6,6)$ линейных преобразований 12-мерного спинорного пространства, сохраняющих квадратичную форму для "кварков"

$$\sum_{\alpha,\beta=1}^{4}\sum_{a=1}^{3}\Psi^{*}_{\alpha a}(\gamma^{0})^{\alpha}_{\beta}\Psi^{\beta a},$$

была введена [1] x/ как возможное релятивистское расширение $SU(6)$ -симметрии. В работах [2,3] было показано, что результаты [1] получаются последовательно, если ввести в рассмотрение неоднородную группу

$$ISU(6,6) = SU(6,6) \boxed{\sim} T_{143}, \qquad (1.1)$$

где $\boxed{\sim}$ -знак полупрямого произведения, T_{143}-инвариантная абелева 143-мерная подгруппа. Частицы классифицируются по неприводимым представлениям малой группы $S(U(6)\times U(6))$.

Неоднородная группа $ISU(6,6)$ выгодно отличается от неоднородной группы $ISL(6) = SL(6)\boxed{\sim} T_{36}$ (см. [4-7]) тем, что 143-компонентный импульс выражается через себя при пространственном отражении и что из него можно составить квадратичный инвариант (оператор Казимира). В настоящей работе мы пользуемся этим, чтобы получить квадратичные формулы для масс (как для мезонов, так и для барионов) в рамках нарушенной $ISU(6,6)$ -симметрии. Нарушение симметрии проводится согласно идее, предложенной в [5,6]: постулируется, что векторы состояния являются собственными векторами xx/ с нулевыми собственными значениями всех тех компонент 143-мерного импульса, которые не коммутируют с изоспином и гиперзарядом. Затем квадрат массы выражается (§ 2) через квадратичный инвариант группы $ISU(6,6)$ и через оставшиеся произвольными компоненты многомерного импульса, которые обладают определенными трансформационными свойствами относительно группы $SU(6)$. Полученное

---

x/ В [1] для этой группы принято обозначение $\tilde{U}(12)$. Общепринятое в математической литературе обозначение $U(6,6)$ (или $SU(6,6)$ -для случая матриц с определителем 1) указывает на то, что эта группа сохраняет эрмитову форму с шестью знаками + и шестью знаками − .

xx/ Поскольку речь идет о точках непрерывного спектра, то нужно говорить об обобщенных собственных векторах – см. [8].

выражение для m^2 рассматривается (§ 3) как тензорный оператор, что дает возможность выразить массовый оператор методом Окубо /9,10/ посредством генераторов группы $SU(6)$; оказывается, что массовый оператор включает вклад $SU(8)$–27-плета в определенной пропорции с октетным вкладом (без увеличения числа произвольных постоянных по сравнению с формулой Бега и Синга /10/). Отсюда выводятся (§ 4) массовые формулы для мезонов из 35-плета и для барионов из 56-плета. Формулы для масс мезонов удовлетворяются экспериментально с весьма хорошей точностью (ошибка меньше 1 %). Очень точно удовлетворяется и соотношение между массами барионного декуплета, в то время как для октета барионов согласие с опытом ухудшается (ошибка достигает – для квадрата массы – 8,8 %).

В настоящей работе вовсе не обсуждаются серьезные трудности, связанные с последовательным введением многомерного импульса в аргумент векторов состояния. Поэтому, строго говоря, ее нужно рассматривать лишь как некоторый вполне однозначный и, на наш взгляд, естественный рецепт для получения массовых формул. В частности, отметим, что здесь с необходимостью (и без какого-либо приближения) получается, что в массовый оператор дают вклад лишь представления <u>1</u>, <u>35</u>, <u>189</u> и <u>405</u> группы $SU(6)$, так как квадрат импульса содержится в прямом произведении <u>35</u> x <u>35</u>.

§ 2. Нарушенная $ISU(6,6)$ – симметрия

Алгебра Ли группы $SU(6,6)$ порождается 143 матрицами 12 x 12

$$\tfrac{1}{2}\Gamma^{R} \times \lambda_a \; , \tag{2.1}$$

где λ_a – трехрядные матрицы Гелл-Манна, а совокупность матриц Γ^R состоит из восьми эрмитовых матриц Γ^{R+} и восьми антиэрмитовых матриц Γ^{R-}

$$\{\Gamma^{R^+}\} = \{I\,,\gamma^0\,,i\gamma^5\gamma^0\gamma^j\,,-i\gamma^5\gamma^j\}\;,$$

$$\{\Gamma^{R^-}\} = \{-\gamma^5\,,-i\gamma^5\gamma^0\,,i\gamma^0\gamma^j\,,\gamma^j\}\;,$$

где γ^μ определяются соотношениями

$$\{\gamma^\mu\,,\gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} I\;;$$

матрица типа (2.1), пропорциональная единичной, опускается. Ясно, что Γ^R подобраны так, чтобы

$$(\Gamma^R)^* = \gamma^0\Gamma^R\gamma^0 \quad \text{или} \quad (\gamma^0\Gamma^R)^* = \gamma^0\Gamma^R \tag{2.2}$$

(звездочкой обозначено эрмитово сопряжение). Что касается T_{143}, то она представляет собой аддитивную группу 12-рядных матриц X с нулевым шпуром, для которых

$$(\gamma^0 \times \lambda_0 X)^* = \gamma^0 \times \lambda_0 X\;.$$

Нетрудно видеть, что T_{143} состоит из всех матриц X, которые представимы в виде:

$$X = \tfrac{1}{2} x_a^R\,\Gamma^R \times \lambda_a\;, \tag{2.3}$$

где x_a^R –вещественные числа (по повторным индексам R и a подразумевается суммирование; коэффициент перед единичной матрицей считается равным нулю). Наконец, групповое умножение в $ISU(6,6)$ определяется так, чтобы при этом 24-рядные матрицы

$$\begin{pmatrix} U & 0 \\ XU & U \end{pmatrix}\;, \quad U \in SU(6,6)\,,\; X \in T_{143} \tag{2.4}$$

перемножались обычным образом (ср. /7/).

Генераторы 143-мерных трансляций p_a^R могут быть объединены по аналогии с (2.3) в матрицу 12 x 12

$$P = \tfrac{1}{2} p_a^R\,\Gamma^R \times \lambda_a\;. \tag{2.5}$$

Единственный квадратичный инвариант C (оператор Казимира) группы $ISU(6,6)$ имеет вид

$$C = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,P^2 = \sum_{a=0}^{8}\Big[\sum_{R^+}(p_a^{R^+})^2 - \sum_{R^-}(p_a^{R^-})^2\Big] =$$

$$= \sum_{a=0}^{8}\Big\{(p_a^I)^2 - (p_a^5)^2 + \sum_{\mu=0}^{3} g_{\mu\mu}\big[(p_a^\mu)^2 - (p_a^{5\mu})^2\big] + \sum_{j=1}^{3}\big[(p_a^{50j})^2 - (p_a^{0j})^2\big]\Big\}\;, \tag{2.6}$$

где $p_a^I,\ p_a^5,\ p_a^\mu,\ p_a^{5\mu},\ p_a^{50j},\ p_a^{0j}$ являются импульсами, соответствующими в силу (2.5) матрицам $I\,,-\gamma^5\,,\gamma^\mu\,,-i\gamma^5\gamma^\mu\,,\ i\gamma^5\gamma^0\gamma^j\,,\ i\gamma^0\gamma^j$ (умноженным на λ_a).

Рассмотрим теперь унитарное (бесконечномерное) представление группы $ISU(6,6)$ и введем, следуя идее Фултона и Веса /5,6/, нарушение этой симметрии, потребовав, чтобы коммутаторы квадрата изоспина и гиперзаряда с компонентами 143-импульса при действии на физические векторы состояния $|\phi\rangle$ давали нуль:

$$[\vec{I}^{\,2},\, p_a^R]\,|\phi\rangle = 0\;, \tag{2.7}$$

$$[Y,\, p_a^R]\,|\phi\rangle = 0\;. \tag{2.8}$$

При этом I_k и Y равняются соответственно M_k^0 и $\frac{2}{\sqrt{3}}M_8^0$, где M_a^0 –генераторы $SU(6,6)$, соответствующие матрицам $\tfrac{1}{2}I \times \lambda_a$. Тогда можно показать, что состояние $|\phi\rangle$ должно быть (обобщенным) собственным вектором с нулевым собственным значением всех тех компонент импульса p_s^R, для которых $s \neq 0,8$. Это утверждение вытекает из следующих тождеств (см. дополнение А):

$$\sum_{s=1}^{3} (p_s^R)^2 = \tfrac{1}{2} \sum_{s=1}^{3} p_s^R [\vec{I}^2, p_s^R],$$

$$\sum_{s=4}^{7} (p_s^R)^2 = \frac{4}{3} \sum_{s=4}^{7} p_s^R [\vec{I}^2, p_s^R]. \qquad (2.9)$$

Действительно, согласно (2.7) и (2.9),

$$\sum_{s=1}^{3} (p_s^R)^2 |\phi\rangle = \sum_{s=4}^{7} (p_s^R)^2 |\phi\rangle = 0$$

и ,так как операторы p_s^R эрмитовы, то

$$p_s^R |\phi\rangle = 0, \quad s = 1, \dots, 7.$$

Соотношения (2.8) не приводят к новым ограничениям на p_s^R, и вообще, как легко проверить непосредственно, импульсы p_s^R, $s = 0,8$ остаются произвольными. Отметим, что в сформулированном выше требовании можно заменить соотношения (2.7) эквивалентными соотношениями

$$[I_k, p_s^R] |\phi\rangle = 0, \quad k = 1,2,3. \qquad (2.10)$$

Среди оставшихся произвольных компонент 143-импульса находится 4-вектор p_0^μ, являющийся скаляром относительно $SU(3) \subset SU(6,6)$; естественно отождествить его с обычным 4-импульсом. Разрешая (2.6) относительно квадрата этого импульса, равного квадрату массы m^2, находим

$$m^2 = C + \sum_{s=0,8} \{ (p_s^5)^2 - (p_s^I)^2 + \sum_{j=1}^{3} [(p_s^{0j})^2 - (p_s^{50j})^2] + \sum_{\mu=0}^{3} g_{\mu\mu} (p_s^{5\mu})^2 \} - \sum_{\mu=0}^{3} g_{\mu\mu} (p_8^\mu)^2. \qquad (2.11)$$

Требование коммутативности импульса с $\vec{I}^2$ и Y (а не только с I_3 и Y, как это делается в [5]) означает, что мы ограничиваемся рассмотрением сильных взаимодействий и пренебрегаем электромагнитными взаимодействиями, которые нарушают изотопическую инвариантность. Поэтому в соотношениях для масс (§ 3,4) не возникает расщепления изотопических мультиплетов.

Отметим, наконец, что аналогичное требование коммутативности многомерного импульса со спином (точнее, с 4-вектором $w_\rho = \tfrac{1}{2}\epsilon_{\lambda\mu\nu\rho} p_0^\lambda M^{\mu\nu}$, где $M^{\mu\nu}$ -генераторы $SU(6,6)$, соответствующие матрицам типа $\tfrac{1}{2}\Gamma^R \times \lambda_0$) приводит к тому, что для физических состояний 4-векторы (s и t считаются фиксированными)

p_s^μ и $p_t^{5\mu}$ должны быть коллинеарными между собой, а векторы p_s^{50j} и p_s^{0j} должны равняться нулю. Здесь мы не будем пользоваться этим свойством.

§ 3. Массовый оператор

Теперь мы делаем следующий существенный шаг. Мы постулируем, что квадрат массы является тензорным оператором (в смысле Окубо [9]) относительно подгруппы $SU(6)$ рассматриваемой группы, тензорная структура которого определяется трансформационными свойствами правой части (2.11). $SU(6)$ может быть определена здесь как стационарная подгруппа, сохраняющая одновременно двух 143-векторов: один – для которого отлична от нуля лишь временная компонента обычного 4-импульса p_0^0, другой – для которого не равна нулю только нулевая компонента аксиального 4-вектора p_0^{50} (отметим, что нет других 4-мерных векторов, являющихся одновременно и $SU(3)$-синглетами, в разложении 143-мерного импульса по $SU(3) \times SL(2) \subset SU(6,6)$). Может показаться на первый взгляд более естественным работать с малой группой $S(U(6) \times U(6))$ группы $ISU(6,6)$, однако в таком случае нельзя получить естественным образом зависимость массы от спина. Заметим в этой связи, что в работах [11,12], посвященных получению массовых формул в группе $U(6) \times U(6)$, не случайно на самом деле формулы выводятся редукцией массового оператора по $SU(6)$. Для анализа тензорной структуры массового оператора необходимо отметить, что при редукции по $SU(6)$ представление $\underline{143}$ распадается на четыре 35-вектора и три скаляра. При этом в одном $SU(6)$ – мультиплете всегда объединяются члены, входящие с одинаковыми знаками в (2.6) (так, например, p_s^{50} образует один 35-плет вместе с p_s^j, а не с p_s^{5j} и т.д.). Оператор квадрата массы входит со своей стороны в самосопряженный части произведения представлений $(\underline{1} + \underline{35}) \times (\underline{1} + \underline{35})$, так что в нем дают вклад лишь неприводимые представления $\underline{1}$, $\underline{35}$, $\underline{189}$ и $\underline{405}$ группы $SU(6)$. Переходя далее к структуре m^2 относительно $SU(2)_J \times SU(3) \subset SU(6)$, мы видим, что массовый оператор автоматически является синглетом по отношению к обычному спину и состоит из комбинаций представлений размерностью 1, 8, 27 относительно группы внутренних симметрий. При этом представления $\underline{8}$ и $\underline{27}$ из $\underline{189}$ ($\underline{405}$) возникают во вполне определенном соотношении, так как порождаются одним и тем же 189 (405)-вектором, в то время как представление $\underline{1}$ возникает с независимым (произвольным) коэффициентом, поскольку в синглетном члене в правой части (2.11) нет вклада от p_0^μ. Таким образом, оператор m^2 имеет следующую $SU(6) \supset SU(3)$ -структуру:

$$m^2 = T_{(1)}^{(1)} + T_{(35)}^{(8)} + T_{(189)}^{(1)} + T_{(405)}^{(1)} + T_{(189)}^{(8+27)} + T_{(405)}^{(8+27)}. \qquad (3.1)$$

Согласно теореме Вигнера-Экарта, каждый член этого разложения в любом неприводимом представлении $SU(6)$ выражается через некоторый полином от генераторов группы $SU(6)$. Ограничиваясь, как обычно, вкладом членов степени не выше второй по генераторам, получаем следующее окончательное выражение для оператора квадрата массы (см. дополнение В):

$$m^2 = m_0^2 + aY + \beta(2\vec{S}^2 - C_2^{(4)} + \tfrac{1}{4}Y^2) +$$
$$+ \sum_{\epsilon=+,-} [a_\epsilon(\epsilon\vec{I}^2 + \vec{N}^2 + 2\vec{S}^2 + \frac{3+5\epsilon}{4}Y^2) + \beta_\epsilon(2\vec{J}^2 + \epsilon C_2^{(8)})] , \tag{3.2}$$

где для операторов Казимира различных подгрупп группы $SU(6)$ использованы ставшие уже общепринятыми обозначения работы /10/. Второй и третий члены в правой части (3.2) соответствуют вкладу $\underline{35}$, а сумма по ϵ – вкладу $\underline{189}$ $(\epsilon=-)$ и $\underline{405}$ $(\epsilon=+)$.

§ 4. Формулы для барионных и мезонных масс

Поскольку в представлении $\underline{56}$ имеют место тождества

$$\vec{N}^2 = \vec{I}^2 , \quad \vec{S}^2 = \tfrac{1}{4}Y^2 - Y + \tfrac{1}{4} , \; C_2^{(4)} = \tfrac{1}{4}Y^2 + 6Y + 9 , \; C_2^{(8)} = 2\vec{J}^2 + \frac{9}{2} , \tag{4.1}$$

то для барионов из $\underline{56}$ на основании (3.2) получаем

$$\underline{56}: \quad m^2 = A + BY + C[I(I+1) + \frac{5}{4}Y^2] + DJ(J+1) . \tag{4.2}$$

Отсюда вытекают следующие соотношения между квадратами барионных масс (символ частицы здесь и в дальнейшем отождествляется с квадратом ее массы):

$$\begin{aligned} &\Omega + 3\Sigma^* = \Delta + 3\Xi^* && (0,2\%) , \\ &2\Sigma = N + \Xi && (8,8\%) , \\ &\Xi^* + \Sigma^* + 3N = 2\Delta + 3\Lambda && (1,6\%) , \\ &\Xi^* + \Sigma = \Xi + \Sigma^* && (3,2\%) ; \end{aligned} \tag{4.3}$$

в скобках указано относительное экспериментальное отклонение левой части каждого равенства от правой (при сравнении с точностью линейных формул для барионных масс

необходимо делить указанные ошибки на два). Отметим, что первая из формул (4.3) является следствием правила интервалов для первых степеней масс декуплета. Вообще в подпространстве декуплета массовый оператор (4.2) принимает следующий вид:

$$\underline{56}^{10}: \quad m^2 = A' + B'Y + C'Y^2 ;$$

этот результат может рассматриваться как квадратичное обобщение правила интервалов. Лишь вторая (октетная) из формул (4.3) удовлетворяется заметно хуже, чем соответствующая формула Гелл-Манна–Окубо для первых степеней масс.

В случае мезонов из $\underline{35}$ в силу равенства масс частиц и античастиц коэффициент перед Y должен исчезать. Кроме того, мы постулируем (так же, как и в /13/), что массовый оператор должен быть диагональным по физическим частицам, которые определяются (в $SU(6)$– симметрии; ср. /10/) как собственные векторы операторов, среди которых находятся $\vec{I}^2$, $\vec{N}^2$, $\vec{S}^2$, $\vec{J}^2$, $C_2^{(4)}$ и Y (но не и $C_2^{(8)}$!). Это приводит к обращению в нуль коэффициента перед $C_2^{(8)}$ в (3.2), т.е. к равенству $\beta_- = \beta_+ = \beta$. В итоге для массового оператора в мезонном представлении получаем

$$\underline{35}: \qquad m^2 = a + b[2S(S+1) - C_2^{(4)} + \tfrac{1}{4}Y^2] +$$
$$+ \sum_{\epsilon=+,-} a_\epsilon [\epsilon I(I+1) + N(N+1) + 2S(S+1) + \frac{3+5\epsilon}{4}Y] + \beta J(J+1) . \tag{4.4}$$

Отсюда находим следующие соотношения между квадратами масс мезонов:

$$\begin{aligned} &228K + 547\rho + 128\phi = 256K^* + 171\eta + 57\pi + 419\omega && (0,6\%) , \\ &1084K + 1845\rho = 768K^* + 237\eta + 847\pi + 1077\omega && (0,9\%) \end{aligned} \tag{4.5}$$

(в скобках, как и раньше, приведено относительное отклонение левой от правой части на опыте; для сравнения напомним, что это отклонение в случае известной формулы $4K = 3\eta + \pi$ равняется 6,3%). Если сделать дополнительное предположение, что вклады от $\underline{189}$ и $\underline{405}$ входят в (4.4) с одинаковым коэффициентом (т.е. что не только $\beta_- = \beta_+$, но и $a_- = a_+$), то к (4.5) добавляется соотношение $\omega = \rho$. Наконец, в частном случае, когда $a_\epsilon = 0$, мы приходим к известным массовым формулам /14/ (полученным в предположении, что массовый оператор преобразуется как $\underline{35}^8$), а именно:

$$\omega = \rho \ , \quad 2K^* = \rho + \phi \ , \ 4K = 3\eta + \pi \ , \ K^* - \rho = K - \pi$$

(причем здесь, в отличие от[14], нет вырождения по спину). Следовательно, если эти соотношения имеют место, то равенства (4.5) удовлетворяются автоматически; в этом можно убедиться непосредственно, записывая (4.5) в виде:

$$419(\omega - \rho) - 57(4K - 3\eta - \pi) + 128(2K^* - \rho - \phi) = 0 ,$$

$$1077(\omega - \rho) - 79(4K - 3\eta - \pi) + 768[(K^* - \rho) - (K - \pi)] = 0 .$$

Авторы считают своим приятным долгом выразить благодарность В.Г. Кадышевскому за полезное обсуждение.

ДОПОЛНЕНИЕ А

Алгебра Ли группы $I\dot{S}U(6,6)$ и вывод формул (2.9)

Введем для генераторов группы $\dot{S}U(6,6)$, соответствующих матрицам (2.1), следующие обозначения:

$$
\begin{aligned}
& M_s^0 \leftrightarrow \tfrac{1}{2} I \times \lambda_s \ (M_0^0 = 0) \ , \quad M_s^j \leftrightarrow \frac{i}{2} \gamma^5 \gamma^0 \gamma^j \times \lambda_s \ , \\
& N_s^0 \leftrightarrow -\tfrac{1}{2} \gamma^5 \times \lambda_s \ , \quad N_s^j \leftrightarrow \frac{i}{2} \gamma^0 \gamma^j \times \lambda_s \ , \\
& A_s^0 \leftrightarrow \tfrac{1}{2} \gamma^0 \times \lambda_s \ , \quad A_s^j \leftrightarrow -\frac{i}{2} \gamma^5 \gamma^j \times \lambda_s \ , \qquad \text{(A.1)} \\
& V_s^0 \leftrightarrow -\frac{i}{2} \gamma^5 \gamma^0 \times \lambda_s \ , \quad V_s^j \leftrightarrow \tfrac{1}{2} \gamma^j \times \lambda_s \ ;
\end{aligned}
$$

в конечномерных представлениях группы $SU(6,6)$ генераторы M_s^μ и A_s^μ -эрмитовы, а N_s^μ и V_s^μ -антиэрмитовы. Кроме того, введем аналогичные обозначения и для импульсов p_s^R, соответствующие разложению 143-мерного импульса по неприводимым представлениям

$$
\begin{aligned}
& m_s^0 = p_s^I \ (m_0^0 = 0) \ , \quad m_s^j = p_s^{50j} \ , \\
& n_s^0 = p_s^5 \ , \quad n_s^j = p_s^{0j} \ , \qquad \text{(A.2)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& a_s^0 = p_s^0 \ , \quad a_s^j = p_s^{5j} \ , \\
& v_s^0 = p_s^{50} \ , \quad v_s^j = p_s^j \ . \qquad \text{(A.2)}
\end{aligned}
$$

Пусть, далее, матрицы Λ_s^μ -генераторы группы $SU(6)$ -определяются формулой

$$\Lambda_s^\mu = \sigma_\mu \times \lambda_s \ . \qquad \text{(A.3)}$$

Определим постоянные $F_{str}^{\sigma\tau\rho}$ и $D_{str}^{\sigma\tau\rho}$ из соотношений коммутации и антикоммутации для матриц Λ:

$$[\Lambda_s^\sigma , \Lambda_t^\tau] = 2iF_{str}^{\sigma\tau\rho} \Lambda_r^\rho \ , \quad \{\Lambda_s^\sigma , \Lambda_t^\tau \} = 2D_{str}^{\sigma\tau\rho} \Lambda_r^\rho \qquad \text{(A.4)}$$

(по повторным индексам ρ и r подразумевается суммирование). Нетрудно видеть (ср.[7]), что

$$F_{str}^{\sigma\tau\rho} = \delta_{\sigma\tau\rho} f_{str} + \epsilon_{0\sigma\tau\rho} d_{str} \ , \ D_{str}^{\sigma\tau\rho} = \delta_{\sigma\tau\rho} d_{str} - \epsilon_{0\sigma\tau\rho} f_{str} \ , \qquad \text{(A.5)}$$

где постоянные ϵ, δ, f, d определяются из перестановочных соотношений

$$
\begin{aligned}
& [\sigma_\mu , \sigma_\nu] = 2i\epsilon_{0\mu\nu\rho} \sigma_\rho \ , \quad \{\sigma_\mu , \sigma_\nu \} = 2\delta_{\mu\nu\rho} \sigma_\rho \ , \quad \mu,\nu,\rho = 0,1,2,3 , \\
& \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{(A.6)} \\
& [\lambda_s , \lambda_t] = 2if_{str} \lambda_r \ , \quad \{\lambda_s , \lambda_t \} = 2d_{str} \lambda_r \ , \quad s,t,r = 0, \dots 8 \ .
\end{aligned}
$$

Из (2.1), (2.3), (2.4), (A.1) и (A.2) вытекает, что перестановочные соотношения между генераторами $SU(6,6)$ и генераторами T_{143} задаются следующими формулами:

$$
\begin{aligned}
& [M_s^\sigma , m_t^\tau] = iF_{str}^{\sigma\tau\rho} m_r^\rho \ , \quad [A_s^\sigma , m_t^\tau] = iF_{str}^{\sigma\tau\rho} a_r^\rho \ , \\
& [M_s^\sigma , n_t^\tau] = iF_{str}^{\sigma\tau\rho} n_r^\rho \ , \quad [A_s^\sigma , n_t^\tau] = iD_{str}^{\sigma\tau\rho} v_r^\rho \ , \\
& [M_s^\sigma , a_t^\tau] = iF_{str}^{\sigma\tau\rho} a_r^\rho \ , \quad [A_s^\sigma , a_t^\tau] = iF_{str}^{\sigma\tau\rho} m_r^\rho \ , \qquad \text{(A.7)} \\
& [M_s^\sigma , v_t^\tau] = iF_{str}^{\sigma\tau\rho} v_r^\rho \ , \quad [A_s^\sigma , v_t^\tau] = -iD_{str}^{\sigma\tau\rho} n_r^\rho \ ,
\end{aligned}
$$

$$[N^{\sigma}_{s}, m^{r}_{t}] = iF^{\sigma r\rho}_{str}\, n^{\rho}_{r}, \quad [V^{\sigma}_{s}, m^{r}_{t}] = iF^{\sigma r\rho}_{str}\, v^{\rho}_{r},$$

$$[N^{\sigma}_{s}, n^{r}_{t}] = -iF^{\sigma r\rho}_{str}\, m^{\rho}_{r}, \quad [V^{\sigma}_{s}, n^{r}_{t}] = iD^{\sigma r\rho}_{str}\, a^{\rho}_{r},$$

$$[N^{\sigma}_{s}, a^{r}_{t}] = -iD^{\sigma r\rho}_{str}\, v^{\rho}_{r}, [V^{\sigma}_{s}, a^{r}_{t}] = iD^{\sigma r\rho}_{str}\, n^{\rho}_{r}, \tag{A.7}$$

$$[N^{\sigma}_{s}, v^{r}_{t}] = -iD^{\sigma r\rho}_{str}\, a^{\rho}_{r}, \quad [V^{\sigma}_{s}, v^{r}_{t}] = -iF^{\sigma r\rho}_{str}\, m^{\rho}_{r}.$$

Аналогично из (2.1) и (A.1) вытекает, что перестановочные соотношения между генераторами SU(6,6) можно получить (формально) следующей заменой в (A.7): $m \to M$, $n \to N$, $a \to A$, $v \to V$. Что касается генераторов, T_{148}, то согласно (2.3) и (2.4), они коммутируют между собой. Наконец, напомним, что

$$I_k = M^0_k, \quad k = 1,2,3, \tag{A.8}$$

$$Y = \frac{2}{\sqrt{3}} M^0_8 . \tag{A.9}$$

Приступаем к доказательству тождеств (2.9). Из (A.5), (A.6), (A.7) и (A.8) вытекает, что

$$[\vec{I}^{\,2}, q^{\mu}_{s}] = i\sum_{k=1}^{3}\sum_{t=1}^{7} f_{kst}\{I_k, q^{\mu}_{t}\}, \quad s = 1,\dots,7$$

$(q = m, n, a, v)$ или

$$\sum_{t=1}^{3}\{I_{st}, q^{\mu}_{t}\} = -i[\vec{I}^{\,2}, q^{\mu}_{s}], \quad s=1,2,3,$$

$$\sum_{r=1}^{4}\{I_{\sigma r}, q^{\mu}_{8-r}\} = -2i[\vec{I}^{\,2}, q^{\mu}_{8-\sigma}], \quad \sigma = 1,2,3,4, \tag{A.10}$$

где

$$(I_{\sigma r}) = \begin{pmatrix} 0 & I_3 & -I_2 & -I_1 \\ -I_3 & 0 & I_1 & -I_2 \\ I_2 & -I_1 & 0 & -I_3 \\ I_1 & I_2 & I_3 & 0 \end{pmatrix}. \tag{A.11}$$

Кроме того, из (A.5), (A.7) и (A.8) вытекает еще, что

$$\sum_{t=1}^{3}[I_{st}, q^{\mu}_{t}] = -2iq^{\mu}_{s}, \quad s=1,2,3,$$

$$\sum_{r=1}^{4}[I_{\sigma r}, q^{\mu}_{8-r}] = -\frac{3i}{2} q^{\mu}_{8-\sigma}, \quad \sigma = 1,2,3,4. \tag{A.12}$$

Вычитая эти равенства из соответствующих равенств (A.10), получаем

$$\sum_{t=1}^{3} q^{\mu}_{t} I_{st} = -\frac{i}{2}[\vec{I}^{\,2}, q^{\mu}_{s}] + iq^{\mu}_{s}, \quad s = 1,2,3,$$

$$\sum_{r=1}^{4} q^{\mu}_{8-r} I_{\sigma r} = -i[\vec{I}^{\,2}, q^{\mu}_{8-\sigma}] + \frac{3i}{4} q^{\mu}_{8-\sigma}, \quad \sigma = 1,2,3,4.$$

Следовательно,

$$\sum_{s,t=1}^{3} q^{\mu}_{s} q^{\mu}_{t} I_{st} = i\sum_{s=1}^{3}(q^{\mu}_{s})^2 - \frac{i}{2}\sum_{s=1}^{3} q^{\mu}_{s}[\vec{I}^{\,2}, q^{\mu}_{s}],$$

$$\sum_{\sigma,r=1}^{4} q^{\mu}_{8-\sigma} q^{\mu}_{8-r} I_{\sigma r} = \frac{3i}{4}\sum_{\sigma=1}^{4}(q^{\mu}_{8-\sigma})^2 - i\sum_{\sigma=1}^{4} q^{\mu}_{8-\sigma}[\vec{I}, q^{\mu}_{8-\sigma}]. \tag{A.13}$$

С другой стороны, согласно (A.11), матрица $(I_{\sigma r})$ –антисимметрична, так что

$$\sum_{s,t=1}^{3} q^{\mu}_{s} q^{\mu}_{t} I_{st} = \tfrac{1}{2}\sum_{s,t=1}[q^{\mu}_{s}, q^{\mu}_{t}] I_{st} = 0,$$

$$\sum_{\sigma,r=1}^{4} q^{\mu}_{8-\sigma} q^{\mu}_{8-r} I_{\sigma r} = \tfrac{1}{2}\sum_{\sigma,r=1}^{4}[q^{\mu}_{8-\sigma}, q^{\mu}_{8-r}] I_{\sigma r} = 0$$

(здесь мы воспользовались коммутативностью импульсов). Подставляя эти выражения в (A.13), находим

$$\sum_{s=1}^{3}(q^{\mu}_{s})^2 = \tfrac{1}{2}\sum_{s=1}^{3} q^{\mu}_{s}[\vec{I}^{\,2}, q^{\mu}_{s}],$$

$$\sum_{\sigma=1}^{4}(q^{\mu}_{8-\sigma})^2 = \frac{4}{3}\sum_{\sigma=1}^{4} q^{\mu}_{8-\sigma}[\vec{I}^{\,2}, q^{\mu}_{8-\sigma}].$$

Этим в силу (A.2) (так как $q = m, n, a, v$) тождества (2.9) доказаны.

Сделаем еще следующее замечание. Как мы установили (32) с помощью тождеств (2.9), из (2.7) вытекает, что

$$q^{\mu}_{s}|\Phi\rangle = 0, \quad s = 1,\dots,7, \tag{A.14}$$

а это согласно (A.7) и (A.8) приводит к следующим соотношениям :

$$[I_k , q^{\mu}_s]|\Phi> = i \sum_{t=1}^{7} f_{kst} q^{\mu}_t |\Phi> = 0, k = 1,2,3, \quad s = 1,\dots,7 ,$$

т.е. приводит к (2.10). Таким образом, из (2.7) вытекает (2.10). Обратно, если имеет место (2.10), т.е. если имеют место последние соотношения, то

$$\sum_{t=1}^{7} f_{kst} q^{\mu}_t |\Phi> = 0, \quad k = 1,2,3, \quad s = 1,\dots,7 ,$$

что в силу (A.6) эквивалентно (A.14). Кроме того, складывая равенства (A.12) с соответствующими равенствами (A.10), находим

$$\sum_{t=1}^{3} I_{st} q^{\mu}_t = -\frac{i}{2} [\vec{I}^2 , q^{\mu}_s] - i q^{\mu}_s , \quad s = 1,2,3 ,$$

$$\sum_{r=1}^{4} I_{\sigma r} q^{\mu}_{8-r} = - i [\vec{I}^2 , q^{\mu}_{8-\sigma}] - \frac{3i}{4} q^{\mu}_{8-\sigma} , \quad \sigma = 1,2,3,4 .$$

Из этого и из (A.14) получаем

$$[\vec{I}^2 , q^{\mu}_s]|\Phi> = [\vec{I}^2 , q^{\mu}_{8-\sigma}]|\Phi> = 0, \quad s = 1,2,3, \quad \sigma = 1,2,3,4 ,$$

т.е. получаем (2.7) (справедливость (2.7) при $s = 0,8$ легко проверяется непосредственно). Итак, мы доказали и сформулированное в § 2 утверждение, что (2.7) и (2.10) эквивалентны между собой.

Что касается соотношений (2.8), то, как мы отметили в § 2, они не приводят к новым по сравнению с (A.14) ограничениям на импульсы. Точнее, из (2.8) (непосредственно) вытекают только равенства

$$q^{\mu}_s |\Phi> = 0, \quad s = 4,5,6,7 .$$

ДОПОЛНЕНИЕ В

Вывод формулы (3.2) для оператора квадрата масс

Обозначим генераторы группы SU(6) через G^{σ}_s, $\sigma = 0,1,2,3$, $s = 0,\dots,8$ ($G^0_0 = 0$) ; в низшем нетривиальном представлении имеем $G^{\sigma}_s = ½ \Lambda^{\sigma}_s$, где Λ^{σ}_s определяются формулой (A.3). Для краткости в подобных обозначениях иногда мы будем заменять двойной индекс $\binom{\sigma}{s}$ одним символом S, причем $S = 0,\dots,35$ x/ ($S = 0$ при

x/ Отметим, что поскольку массовый оператор в группе SU(6) преобразуется по однозначному представлению фактор-группы $SU(6)/Z_6$, то для его нахождения естественно пользоваться "векторными" обозначениями. Разумеется, все результаты можно получить и в "спинорном" формализме, пользуясь "генераторами Вейля" A (ср. /8,10/), вместо эрмитовых генераторов G.

$\sigma = s = 0$; правило соответствия $\binom{\sigma}{s} \leftrightarrow S$ при $S = 1,\dots,35$ несущественно). Кроме того, вместо значков 189 и 405 мы будем писать соответственно – и +, так что равенство (3.1) теперь принимает следующий вид:

$$m^2 = T^{(1)}_{(1)} + T^{(8)}_{(35)} + \sum_{\epsilon = -,+} [T^{(1)}_{(\epsilon)} + T^{(8+27)}_{(\epsilon)}] . \qquad (B.1)$$

Неприводимые тензорные операторы $T_{(1)}, T_{(35)}$ и $T_{(\epsilon)}$ являются соответственно скаляром, вектором и тензором; обозначим компоненты $T_{(35)}$ и $T_{(\epsilon)}$ через $T_{(35)X}$ и $T_{(\epsilon)XY}$, $X, Y = 1,\dots,35$. Можно показать, что с точностью до членов порядка не выше второго по G^{σ}_s (см. § 3) имеем

$$T_{(35)X} = k_1 G_X + k_2 D_{XST} G_S G_T , \quad X = 1,\dots,35 ,$$

$$T_{(\epsilon)XY} = k_{\epsilon} [\{G_X , G_Y \} + \frac{\epsilon}{8} (F_{SXU} F_{UYT} + F_{SYU} F_{UXT} +$$

$$+ D_{SXU} D_{UYT} + D_{SYU} D_{UXT} + \frac{1-3\epsilon}{4} D_{XYU} D_{UST} + \qquad (B.2)$$

$$+ \frac{4\epsilon}{(3+\epsilon)(6+\epsilon)} \delta_{XY} \delta_{ST})\{G_S , G_T \}] , \quad X,Y = 1,\dots,35 ,$$

где постоянные F и D определяются соотношениями (A.5), а коэффициенты k_1, k_2 и k_{ϵ} зависят лишь от операторов Казимира группы SU(6) (по повторным индексам S, T, U подразумевается суммирование от 0 до 35). На основании (B.2) находим

$$T^{(8)}_{(35)} = k_1 D^{\mu\mu\sigma}_{88s} G^{\sigma}_s + k_2 D^{\mu\mu\rho}_{88r} D^{\rho\sigma\tau}_{rst} G^{\sigma}_s G^{\tau}_t ,$$

$$T^{(1)}_{(\epsilon)} = k'_{\epsilon} [2 G^{\mu}_0 G^{\mu}_0 + \frac{\epsilon}{4} (F^{\sigma\mu\rho}_{s0r} F^{\rho\mu\tau}_{r0t} + D^{\sigma\mu\rho}_{s0r} D^{\rho\mu\tau}_{r0t} +$$

$$+ \frac{1-3\epsilon}{8} D^{\mu\mu\rho}_{00r} D^{\rho\sigma\tau}_{rst}) \{G^{\sigma}_s , G^{\tau}_t \} + \frac{4}{(3+\epsilon)(6+\epsilon)} G^{\sigma}_s G^{\sigma}_s] , \qquad (B.3)$$

$$T^{(8+27)}_{(\epsilon)} = k''_{\epsilon} [2 G^{\mu}_{8} G^{\mu}_{8} + \frac{\epsilon}{4} (F^{\sigma\mu\rho}_{s8r} F^{\rho\mu\tau}_{r8t} + D^{\sigma\mu\rho}_{s8r} D^{\rho\mu\tau}_{s8t} + \frac{1-3\epsilon}{8} D^{\mu\mu\rho}_{88r} D^{\rho\sigma\tau}_{rst}) \{ G^{\sigma}_{s} , G^{\tau}_{t} \} + \frac{4}{(3+\epsilon)(6+\epsilon)} G^{\sigma}_{s} G^{\sigma}_{s}] \qquad (B.3)$$

(суммирование подразумевается; появление двух независимых коэффициентов k'_{ϵ} и k''_{ϵ} связано с тем, что $T^{(1)}_{(\epsilon)}$ строится из одного тензора типа $T_{(\epsilon)}$, а $T^{(8+27)}_{(\epsilon)}$ – из другого, так как в синглетном члене в правой части (2.11) нет вклада от P^{μ}_{0} – см. § 3). Подставляя (B.3) в (B.1), в итоге получаем (3.2).

В заключение отметим, что в представлениях <u>35</u> и <u>56</u> все высшие степени генераторов G^{σ}_{s}, опущенные в (B.2), сводятся к первой и второй (так что их добавление может изменить лишь значения коэффициентов k_1, k_2 и k_{ϵ}), т.е. массовые формулы для мезонов и барионов получены без какого-либо приближения.

Литература

1. R.Delburgo, A.Salam, J.Strathdee. Proc. Roy. Soc., A284, 146 (1965); R.Delburgo, M.A.Rashid, A.Salam, J.Strathdee. The $\tilde{U}(12)$ Symmetry, Preprint IC/65/57, Trieste, 1965.
2. J.S.Bel, H.Ruegg. Nuovo Cim., <u>39</u>, 1166 (1965).
3. W.Rühl. Note on a Special Class of Unitary Representations of the Inhomogeneous Group $\tilde{U}(12) \times T_{148}$ which Underlies Salam's Model of Relativistic SU(6) Symmetries, Preprint CERN, TH. 566, Geneva, 1965.
4. W.Rühl. Nuovo Cim., <u>37</u>, 301 (1965).
5. T.Fulton, J.Wess. Phys. Lett., <u>14</u>, 57 and 334 (1965).
6. T.Fulton, J.Wess. Mass Splitting as a Covarinat Concept in the Generalized Poincaré Group, preprint No. 31, Vienna, 1965.
7. В.Г. Кадышевский, И.Т. Тодоров. Неоднородная группа SL(6) с расширенной подгруппой трансляций. Препринт ОИЯИ, Р-2123, Дубна, 1965.
8. И.М. Гельфанд, Н.Я. Виленкин. Некоторые применения гармонического анализа. Осначенные гильбертовы пространства (Обобщенные функции, вып. 4), М., Физматгиз, 1961.
9. S.Okubo. Progr. Theor. Phys., <u>27</u>, 949 (1962).

10. M.A.B.Beg, V.Singh. Phys. Rev. Lett., <u>13</u>, 418 (1964).
11. R.Delburgo, R.White. Mass Formulae in U(6) × U(6) Theory. Preprint IC/65/77, Trieste, 1965.
12. D.A.Akyeampong. On the Mass Formula for U(6) × U(6). Preprint IC/65/36, Trieste, 1965.
13. А.В. Николов, И.Т. Тодоров, Д.Г. Факиров. Массовые формулы в $SU(12) \supset Sp(6) \times SU(2)$ -симметрии. Препринт ОИЯИ, Р-2342, Дубна, 1965.
14. T.K.Kuo, Tsu Yao. Phys.Rev.Lett., <u>13</u>, 415 (1964).

Рукопись поступила в издательский отдел
3 марта 1966 г.