ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р-2603

Б.М. Барбашов, Н.А. Черников

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О РАССЕЯНИИ ДВУХ ПЛОСКИХ ВОЛН В НЕЛИНЕЙНОЙ СКАЛЯРНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ ТИПА БОРНА-ИНФЕЛЬДА

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1966

P-2603

Б.М. Барбашов, Н.А. Черников

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О РАССЕЯНИИ ДВУХ ПЛОСКИХ ВОЛН В НЕЛИНЕЙНОЙ СКАЛЯРНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ ТИПА БОРНА-ИНФЕЛЬДА

Направлено в ЖЭТФ

Введение

Идея Гайзенберга[1] объяснить строение материи исходя из предположения о существовании единого универсального нелинейного поля вновь вызвала повышенный интерес к нелинейным полям. Однако принципиальные трудности при нахождении точных решений нелинейных уравнений не дают возможности сделать определенных выводов о характере решений и о физических следствиях этих уравнений. Такие вопросы как существование частицеподобных решений или возможность задания асимптотических решений в виде плоских волн остаются открытыми.

Точно решаемая модель Тирринга[2,3] не оказалась в этом смысле полезной, поскольку она привела к тривиальной S-матрице.

В тридцатые годы Борн[4] предложил свой вариант нелинейной электродинамики, которая приводила к важным физическим следствиям, таким как конечность собственной энергии электрона, рассеяние света на свете и другим. Но дальнейшее изучение этого варианта электродинамики затруднялось отсутствием точных решений уравнений движения электромагнитного поля. Эта теория выгодно отличалась от других нелинейных обобшений тем, что скорость сигнала в ней не превосходит скорости света в пустоте[5].

В предыдущей работе авторов[6] была точно решена задача Коши для двумерного скалярного уравнения типа Борна-Инфельда.

В настоящей работе решена задача рассеяния двух плоских волн $\phi(x-t)$ и $\phi(x+t)$ в этой теории. Оказалось, что в области взаимодействия функция поля ϕ может быть неоднозначной функцией x и t, решение в этой области представляется в параметрическом виде. После взаимодействия эти две волны двигаются дальше без изменения своей формы и направления, но происходит лишь сдвиг аргументов каждой волны на величину импульса другой волны. Это означает, что в этой нелинейной теории не происходит рассеяния волн в смысле изменения направления и формы волны.

Неоднозначность решения от x, t в области взаимодействия является интересным качественно новым фактом этой нелинейной теории. Для его понимания, по-видимому, надо привлечь какие-то новые физические представления.

В первом разделе статьи проблема рассеяния двух плоских волн в 4-мерном пространстве-времени сводится к двухмерной задаче. Во втором разделе на основе упомянутого выше решения задачи Коши решается задача рассеяния. В третьем разделе обсуждаются особенности полученного решения, и в четвертом разделе задача рассеяния иллюстрируется на примере двух плоских волн, ограниченных в пространстве.

§ 1.

Нелинейное уравнение типа Борна-Инфельда для скалярного поля $\phi(x,y,z,t)$ получается варьированием лагранжиана

$$\mathfrak{L} = 1-\sqrt{1+\phi_x^2+\phi_y^2+\phi_z^2-\phi_t^2} \tag{1}$$

и имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}&(1+\phi_x^2+\phi_y^2+\phi_z^2-\phi_t^2)(\phi_{xx}+\phi_{yy}+\phi_{zz}-\phi_{tt})-\phi_x^2\phi_{xx}-\phi_y^2\phi_{yy}-\\&-\phi_z^2\phi_{zz}-\phi_t^2\phi_{tt}-2\phi_x\phi_y\phi_{xy}-2\phi_x\phi_z\phi_{xz}-2\phi_y\phi_z\phi_{yz}+\\&+2\phi_t\phi_x\phi_{tx}+2\phi_t\phi_y\phi_{ty}+2\phi_t\phi_z\phi_{tz}=0.\end{aligned} \tag{2}$$

Нетрудно проверить, что любая плоская волна

$$\phi=\phi(\vec{k}\vec{r}-|k|t) \tag{3}$$

является решением уравнения (2). Следовательно, сумма двух плоских волн

$$\phi=\phi_1(\vec{k}_1\vec{r}-|k_1|t)+\phi_2(\vec{k}_2\vec{r}-|k_2|t) \tag{4}$$

также является решением уравнения (2) в пространственно-временной области, где они не перекрываются, т.е. в области, где одна из функций ϕ_1 ϕ_2 обращается в нуль.

Без ограничения общности можно считать, что k_{1y}, k_{2y} и ik_{1z}, k_{2z} k равны нулю. К этому случаю всегда можно придти, направив ось времени по 4-вектору k_1+k_2, а ось x – по направлению k_1-k_2, где $k_1=(|k_1|,\vec{k}_1)$; $k_2=(|k_2|,\vec{k})$. В новой системе координат

$$\vec{k}_1\vec{r}-|k_1|t=\sqrt{\frac{(k_1k_2)}{2}}\,(x'-t')$$

$$\vec{k}_2\vec{r}-|k_2|t=-\sqrt{\frac{(k_1k_2)}{2}}\,(x'+t').$$

Переход к этой системе достигается преобразованием Лоренца, а поскольку уравнение (2) инвариантно относительно этих преобразований, то мы вправе записать (4) в виде:

$$\phi=\psi(x-t)+\psi(x+t). \tag{5}$$

Решение (5) уравнения (2) существует, например, в области $t<0$, если $\psi_1(x)=0$ при $x>-\delta$, а $\psi_2(x)=0$ при $x<\delta$, где δ – любое положительное число. В более общем случае решение уравнения (2) может удовлетворять лишь предельным условиям

$$\lim_{u\to\infty}\phi=\psi_2(v),\qquad \lim_{v\to-\infty}\phi=\psi_1(u), \tag{6}$$

где

$$u=x-t,\qquad v=x+t. \tag{7}$$

Очевидно, чтобы удовлетворить этим предельным условиям, будем искать решение уравнения (2), не зависящее от x и t, т.е. функцию, подчиняющуюся уравнению

$$(1-\phi_t^2)\phi_{xx}+2\phi_t\phi_x\phi_{xt}-(1+\phi_x^2)\phi_{tt}=0. \tag{8}$$

Таким образом, мы приходим к двумерной скалярной модели поля Борна-Инфельда, ибо уравнение (8) получается из лагранжиана

$$\mathfrak{L}=1-\sqrt{1+\phi_x^2-\phi_t^2}. \tag{9}$$

§ 2.

В работе [6] авторов была решена задача Коши для уравнения (8). Начальные данные заданы при $t=0$

$$\phi/_{t=0}=a(x),\qquad \phi_t/_{t=0}=b(x). \tag{10}$$

Они подчинены условию гиперболичности $1+a'^2(x)-b^2(x)>0$. Решение уравнения (8), удовлетворяющее начальным данным (10), получено в параметрическом виде:

$$t=\frac{\beta-\alpha}{2}+\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}H(\lambda)\,d\lambda$$

$$x = \frac{\beta+\alpha}{2} + \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta G(\lambda)\,d\lambda$$

$$\phi = \frac{a(\alpha)+a(\beta)}{2} + \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \pi(\lambda)\,d\lambda. \qquad (11)$$

Величины $\pi(x)$, $G(x)$ и $H(x)$ в формулах (11) имеют важный физический смысл. $\pi(x)$ является каноническим импульсом поля $\phi(x,t)$ при $t=0$

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \phi_t}\Big/_{t=0} = \frac{b(x)}{\sqrt{1+a'^2(x)-b^2(x)}}, \qquad (12)$$

$G(x)$ – плотность импульса поля $\phi(x,t)$ при $t=0$,

$$G(x) = -\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \phi_t}\phi_x\Big/_{t=0} = -\pi(x)\,a'(x), \qquad (13)$$

$H(x)$ – плотность энергии поля $\phi(x,t)$ при $t=0$:

$$H(x) = \Big[\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \phi_t}\phi_t - \mathfrak{L}\Big]\Big/_{t=0} = \sqrt{(1+a'^2(x))(1+\pi^2(x))} - 1. \qquad (14)$$

Исследуем асимптотическое поведение решения (11), устремляя $v \to -\infty$ при фиксированном u и $u \to \infty$ при фиксированном v. u, v – изотропные координаты (7). В обоих этих случаях $t = \frac{v-u}{2} \to -\infty$.

Согласно (11),

$$u = x - t = \alpha + \tfrac{1}{2}\int_\alpha^\beta [G(\lambda) - H(\lambda)]\,d\lambda$$

$$v = x + t = \beta + \tfrac{1}{2}\int_\alpha^\beta [G(\lambda) + H(\lambda)]\,d\lambda \qquad (15)$$

$$\phi = \frac{a(\alpha)+a(\beta)}{2} + \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \pi(\lambda)\,d\lambda.$$

Мы будем предполагать далее, что $a'(x)$ и $b(x)$ достаточно быстро убывает на бесконечности.

Параметры α и β приспособлены к задаче Коши. Для решения задачи о рассеянии плоских волн более удобны другие параметры $\mu=\mu(\alpha)$ и $\nu=\nu(\beta)$. К ним мы

естественным образом приходим, рассматривая пределы выражений (15) при $\beta \to -\infty$ и при $\alpha \to \infty$. В первом случае получаем

$$\lim_{\beta\to-\infty} u = \alpha + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\alpha} [H(\lambda) - G(\lambda)]\,d\lambda = \mu(\alpha)$$

$$\lim_{\beta\to-\infty} v = -\infty \qquad (16)$$

$$\lim_{\beta\to-\infty} \phi = \frac{a(\alpha)}{2} - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\alpha} \pi(\lambda)\,d\lambda = \psi_1(\mu).$$

Во втором случае

$$\lim_{\alpha\to\infty} u = \infty$$

$$\lim_{\alpha\to\infty} v = \beta - \frac{1}{2}\int_\beta^\infty [H(\lambda) + G(\lambda)]\,d\lambda = \nu(\beta) \qquad (17)$$

$$\lim_{\alpha\to\infty} \phi = \frac{a(\beta)}{2} - \frac{1}{2}\int_\beta^\infty \pi(\lambda)\,d\lambda = \psi_2(\nu).$$

В дальнейшем будет показано, что введенные здесь функции ψ_1 и ψ_2 совпадают с предельными условиями (6).

Заметим, что $\mu=\mu(\alpha)$ и $\nu=\nu(\beta)$ монотонио возрастающие функции, так как $H(\lambda) > G(\lambda)$. Следовательно, преобразование от параметров α, β к параметрам μ, ν взаимнооднозначно.

Выразим теперь решение (15) через новые параметры μ, ν и функции ψ_1, ψ_2. Нетрудно видеть, что

$$\psi_1(\mu) + \psi_2(\nu) = \phi(\alpha,\beta) - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \pi(\lambda)\,d\lambda. \qquad (18)$$

Функции ψ_1 и ψ_2, как это следует из (16), (17), имеют следующие предельные значения:

$$\lim_{\nu\to\infty} \psi_2(\nu) = 0 \qquad \lim_{\mu\to-\infty} \psi_1(\mu) = 0$$

$$\lim_{\nu\to-\infty} \psi_2(\nu) = \lim_{\mu\to\infty} \psi_1(\mu) = \psi = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \pi(\lambda)\,d\lambda, \qquad (19)$$

так как $\lim_{\alpha\to\pm\infty} \mu(\alpha) = \pm\infty$; $\lim_{\beta\to\pm\infty} \nu(\beta) = \pm\infty$.

Таким образом

$$\phi = \psi_1(\mu) + \psi_2(\nu) - \psi_0. \qquad (20)$$

Нам остается выразить u и v как функции от μ, ν. Для этого прежде всего заметим, что в соответствии с определением (16) и (17) функций $\mu(\alpha)$ и $\nu(\beta)$ величины u, v, заданные формулами (15), можно представить в следующем виде:

$$u = \mu(\alpha) + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\beta}[G(\lambda) - H(\lambda)]\,d\lambda$$

$$v = \nu(\beta) + \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\infty}[G(\lambda) + H(\lambda)]\,d\lambda. \tag{21}$$

В первом из этих интегралов произведем замену переменных $\sigma = \nu(\lambda)$, а во втором $\sigma = \mu(\lambda)$. Так как согласно (16) и (17)

$$\frac{d\mu}{d\lambda} = 1 + \frac{H(\lambda) - G(\lambda)}{2} \tag{22}$$

$$\frac{d\nu}{d\lambda} = 1 + \frac{H(\lambda) + G(\lambda)}{2},$$

то

$$u = \mu(\alpha) + \int_{-\infty}^{\nu(\beta)} \frac{G(\lambda) - H(\lambda)}{2 + H(\lambda) + G(\lambda)}\,d\sigma, \qquad \sigma = \nu(\lambda) \tag{23}$$

$$v = \nu(\beta) + \int_{\mu(\alpha)}^{\infty} \frac{G(\lambda) + H(\lambda)}{2 + H(\lambda) - G(\lambda)}\,d\sigma, \qquad \sigma = \mu(\lambda).$$

Для выражения величин, стоящих под интегралами (23), через ψ_1 и ψ_2 воспользуемся (16) и (17) и найдем производные

$$\frac{d\psi_1(\sigma)}{d\sigma} = \frac{a'(\lambda) - \pi(\lambda)}{2 + H(\lambda) - G(\lambda)}, \qquad \sigma = \mu(\lambda) \tag{24}$$

$$\frac{d\psi_2}{d\sigma} = \frac{a'(\lambda) + \pi(\lambda)}{2 + H(\lambda) + G(\lambda)}, \qquad \sigma = \nu(\lambda).$$

Воспользовавшись выражениями (13) и (14), получаем окончательно

$$u = \mu(\alpha) - \int_{-\infty}^{\nu(\beta)} \psi_2'^2(\sigma)\,d\sigma \tag{25}$$

$$v = \nu(\beta) + \int_{\mu(\alpha)}^{\infty} \psi_1'^2(\sigma)\,d\sigma.$$

Таким образом, мы получили решение уравнения (8) в новом параметрическом представлении

$$\phi = \psi_1(\mu) + \psi_2(\nu) - \psi_0$$

$$u = \mu - \int_{-\infty}^{\nu} \psi_2'^2(\sigma)\,d\sigma \tag{26}$$

$$v = \nu + \int_{\mu}^{\infty} \psi_1'^2(\sigma)\,d\sigma.$$

Теперь уже нетрудно доказать, что это решение удовлетворяет предельным условиям (6). В самом деле, если $u \to \infty$, то и $\mu \to \infty$, а ν становится равным v. Следовательно,

$$\lim_{u\to\infty} \phi = \psi_2(v). \tag{27}$$

Если же $v \to -\infty$, то и $\nu \to -\infty$, а μ становится равным u. Следовательно,

$$\lim_{v\to-\infty} \phi = \psi_1(u). \tag{28}$$

Таким образом, задача о рассеянии двух плоских волн в нелинейной мезодинамике типа Борна-Инфельда решена.

Посмотрим, во что переходит наше решение при $u \to -\infty$ и при $v \to \infty$. В обоих этих случаях $t = \frac{v-u}{2} \to \infty$. Очевидно, когда $u \to -\infty$, то и $\mu \to -\infty$, а ν становится равным $v - H_1$, где

$$H_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_1'^2(\sigma)\,d\sigma. \tag{29}$$

Следовательно,

$$\lim_{u\to-\infty} \phi = \psi_2(v - H_1) - \psi_2(-\infty). \tag{30}$$

Когда $v \to \infty$, то и $\nu \to \infty$, а μ становится равным $u + H_2$, где

$$H_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_2'^2(\sigma)\,d\sigma. \tag{31}$$

Следовательно,

$$\lim_{v\to\infty} \phi = \psi_1(u + H_2) - \psi_1(\infty). \tag{32}$$

Таким образом, две плоские волны из $t = -\infty$ в результате столкновения друг с другом переходят при $t = \infty$ тоже в две плоские волны той же формы, но со сдвинутыми аргументами. Величины H_1 и $-H_2$, на которые происходит сдвиг аргументов, равны импульсам, соответственно, первой и второй волны. Действительно, согласно каноническому определению плотность энергии поля с лагранжианом (1) равна

$$H = \frac{\phi_t^2}{\sqrt{1+\phi_x^2+\phi_y^2+\phi_z^2-\phi_t^2}} + \sqrt{1+\phi_x^2+\phi_y^2+\phi_z^2-\phi_t^2} - 1, \tag{33}$$

а плотность импульса этого поля равна

$$G^k = -\frac{\phi_\psi \ \phi_k}{\sqrt{1+\phi_x^2+\phi_y^2+\phi_z^2-\phi_t^2}}. \tag{34}$$

В частности, для плоской волны (3) получаем для энергии и импульса такие же выражения, как и в линейном случае. Полагая $\phi = \psi_1(x-t)$, находим $H=\psi_1'^2$, $G^x=\psi_1'^2$, $G^y=G^z=0$, полагая $\phi=\psi_2(x+t)$, находим $H=\psi_2'^2$, $G^x=-\psi_2'^2$, $G^y=G^z=0$, что и доказывает сделанное выше утверждение о величинах (29) и (31). При желании процесс столкновения можно рассматривать в системе центра инерции, где $H_1 = H_2$.

§ 3.

Полученное нами решение (26) оказывается, вообще говоря, многозначной функцией от u, v. Действительно, рассмотрим зависимость u, v от μ, ν

$$u = \mu - B(\nu); \qquad v = \nu + A(\mu), \tag{35}$$

где

$$A(\mu) = \int_\mu^\infty \psi_1'^2(\sigma)\, d\sigma, \qquad B(\nu) = \int_{-\infty}^\nu \psi_2'^2(\sigma)\, d\sigma. \tag{36}$$

Исключая ν из уравнений (35), получим уравнение

$$\mu = u + B(v - A(\mu)), \tag{37}$$

определяющее μ как функцию от u, v. Правая часть этого уравнения – монотонно возрастающая функция от μ, так как ее производная равна

$$\psi_2'^2(v - A(\mu))\psi_1'^2(\mu) \geq 0. \tag{38}$$

Так как

$$0 \leq A(\mu) \leq H, \tag{39}$$

то

$$u + B(v) < u + B(v - A(\mu)) < u + B(\nu + H_1). \tag{40}$$

Следовательно, все корни уравнения (37) лежат в пределах (40). Из соображений непрерывности очевидно, что число этих корней нечетно.

Если во всех точках

$$\psi_1'^2(\mu)\psi_2'^2(\nu) < 1, \tag{41}$$

то имеется всего один корень уравнения (37) и решение (26) является однозначной функцией от u, v.

Можно написать приближенное выражение для решения в следующем виде:

$$\phi = \psi_1(u + B(v)) + \psi_2(v - A(u)). \tag{42}$$

Оно будет тем точнее, чем меньше верхняя грань произведения $\psi_1'^2(\mu)\psi_2'^2(\nu)$.

Если же условие (41) нарушается, то уравнение (37) может иметь 3 или больше корней. Подставляя один из этих корней во второе из равенств (35), находим ν, а затем, согласно (26), и ϕ.

При нарушении условия (41) якобиан преобразования

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(\mu,\nu)} = 1 - \psi_1'^2(\mu)\ \psi_2'^2(\nu) \tag{43}$$

не везде отличен от нуля. Если якобиан (43) равен нулю, то либо

$$1 - \psi_1'(\mu)\psi_2'(\nu) = 0, \tag{44}$$

либо

$$1 + \psi_1'(\mu)\psi_2'(\nu) = 0. \tag{45}$$

Посмотрим, чем характерны соответствующие точки поверхности (26) в пространстве ϕ, u, v. Составим уравнения плоскости, касательной к этой поверхности. Мы получаем параметрические уравнения касательной плоскости, дифференцируя функции (26):

$$\begin{aligned} d\phi &= \psi_1'(\mu)\,d\mu + \psi_2'(\nu)\,d\nu \\ du &= d\mu - \psi_2'^2(\nu)\,d\nu \\ dv &= d\nu - \psi_1'^2(\mu)\,d\mu. \end{aligned} \tag{46}$$

Отсюда получаем

$$[1 - \psi_1'(\mu)\psi_2'(\nu)]\,d\phi = \psi_1'(\mu)\,du + \psi_2'(\nu)\,dv. \tag{47}$$

Таким образом, в каждой точке поверхности (26) существует касательная плоскость. В точках (44) она становится параллельной оси ϕ. Нам остается выяснить ее положение в точках (45). Как было показано в работе [6], уравнение (8) наделяет пространство ϕ, u, v структурой пространства Минковского с метрикой

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - d\phi^2 = - d\phi^2 - du\,dv \ . \tag{48}$$

Скалярное произведение векторов $\{d\phi, du, dv\}$ и $\{N_\phi, N_u, N_v\}$ равно

$$-N_\phi \, d\phi - \frac{1}{2} N_v \, du - \frac{1}{2} N_u \, dv , \tag{49}$$

так что плоскость (47) ортогональна к вектору

$$N_\phi = [\psi_1'(\mu)\psi_2'(\nu) - 1] , \quad N_u = \frac{1}{2}\psi_2'(\nu) , \quad N_v = \frac{1}{2}\psi_1'(\mu) . \tag{50}$$

Скалярный квадрат вектора (50) равен

$$(N, N) = -[1 + \psi_1'(\mu)\,\psi_1'(\nu)]^2 \le 0 . \tag{51}$$

Если $(N, N) < 0$, то плоскость (47) пересекает изотропный конус

$$d\phi^2 + du\,dv = 0 \tag{52}$$

по двум прямым. В этих точках решение (26) гиперболическое. Если же $(N,N) = 0$, что выполняется как раз в точках (45), то плоскость (47) касается изотропного конуса (52) и решение (26) становится параболическим.

Мы можем заключить, таким образом, что в случае нелинейного уравнения в данной пространственно-переменной точке может существовать несколько значений поля. Это не укладывается в современные представления о физическом поле.

§ 4.

Для большей наглядности процесса столкновения рассмотрим случай, когда падающие волны ограничены в пространстве. Примем, что $\psi_1(x)$ равна нулю вне интервала $-1 < x < 0$, а $\psi_2(x)$ – вне интервала $0 < x < 1$.

Равенство ширин этих волн не ограничивает общности задачи ввиду произвольности функций ψ_1 и ψ_2 в этих интервалах. Заметим, что и производные этих функций $\psi_1'(x)$, $\psi_2'(x)$ также равны нулю вне соответствующих интервалов. Рассмотрим для этих функций наше решение (26).

Разобьем плоскость μ, ν на девять областей, как показано на рис. 1, и посмотрим, как записывается решение (26) для каждой области. В областях I, II, III, IV решение равно нулю, т.е. падающих и рассеянных волн нет.

I) $\mu > 0$; $\nu > 1$; $u = \mu - H_2$; $v = \nu$; $\phi = 0$

II) $\mu < -1$ $\nu > 1$ $u = \mu - H_2$ $v = \nu + H_1$ $\phi = 0$

III) $\mu < -1$ $\nu < 0$ $u = \mu$ $v = \nu + H_1$ $\phi = 0$

IV) $\mu > 0$ $\nu < 0$ $u = M$ $v = \nu$ $\phi = 0$,

В области V распространяется падающая волна $\psi_1(\mu)$, а в области VI падающая волна $\psi_2(\nu)$ действительно.

V). $-1 < \mu < 0$; $\nu < 0$; $u = \mu$; $v = \nu + \int_\mu^0 \psi_1'^2(\sigma)\,d\sigma$; $\phi(\mu,\nu) = \psi_1(\mu) = \psi_1(u)$

VI) $\mu > 0$; $0 < \nu < 1$; $u = \mu - \int_0^\nu \psi_2'^2(\sigma)\,d\sigma$; $v = \nu$; $\phi = \psi_1(\nu) = \psi_1(v)$.

В областях VII и VIII распространяются волны после рассеяния.

VII). $-1 < \mu < 0$; $\nu > 1$; $u = \mu - H_2$; $v = \nu + \int_\mu^0 \psi_1'^2(\sigma)\,d\sigma$; $\phi = \psi_1(\mu) = \psi_1(u + H_2)$

VIII.) $\mu < -1$; $0 < \nu < 1$; $u = \mu - \int_0^\nu \psi_2'^2(\sigma)\,d\sigma$; $v = \nu + H_1$; $\phi = \psi_2(\nu) = \psi_2(v - H_1)$.

Наибольший интерес представляет область IX, где происходит взаимодействие двух падающих волн. В этой области имеем

IX) $-1 < \mu < 0$; $0 < \nu < 1$; $u = \mu - \int_0^\nu \psi_2'^2(\sigma)\,d\sigma$; $v = \nu + \int_\mu^0 \psi_1'^2(\sigma)\,d\sigma$; $\phi = \psi_1(\mu) + \psi_2(\nu) - \psi_0$.

В этой области присутствуют обе волны ψ_1 и ψ_2, μ и ν явно через u, v не выражаются.

Рассмотрим теперь картину рассеяния в переменных u, v (см. рис. 2). Восемь первых областей плоскости μ, ν отображаются на соответствующие восемь областей плоскости u, v.

I.) $u > -H_2$; $v > 1$; $\phi = 0$

II.) $u < -1 - H_2$; $v > 1 + H_1$; $\phi = 0$.

III.) $u < -1$; $v < H_1$; $\phi = 0$

IV.) $u > 0$; $v < 0$; $\phi = 0$

Области падающих волн ограничены следующими условиями

$$\text{V.)}\quad -1 < u < 0\ ; \quad v < \int_u^0 \psi_1'^2(\sigma)\, d\sigma\ ; \qquad \phi = \psi_1(u)$$

$$\text{VI.)}\quad u > -\int_0^{\nu} \psi_2'^2(\sigma)\, d\sigma\ ; \qquad 0 < v < 1\ ; \qquad \phi = \psi_2(v).$$

Области рассеянных волн

$$\text{VII.)}\quad -1 - H_2 < u < -H_2\ ; \qquad v > 1 + \int_{u+H_2}^{0} \psi_1'^2(\sigma)\, d\sigma\ ; \qquad \phi = \psi_1(u + H_2)$$

$$\text{VIII.)}\quad u < -1 - \int_0^{v-H_1} \psi_2'^2(\sigma)\, d\sigma\ ; \qquad v < 1 + H_1\ ; \qquad \phi = \psi_2(v - H_1).$$

Результат рассеяния здесь напоминает картину соударения под прямым углом двух тел, когда после соударения они продолжают лететь в прежнем направлении, но смещаются перпендикулярно своему движению первое на величину H_2, а второй - на величину H_1, т.е. на величину импульса ударяющего тела.

Область взаимодействия IX выражается через μ, ν и, как уже указывалось, функция ϕ может быть неоднозначной функцией u, v. Если $\psi_1'^2(\mu)\,\psi_2'^2(\nu) < 1$, то область IX плоскости μ, ν отображается однозначно на область IX плоскости u, v. В противном случае область IX может отобразиться на большую область плоскости u,v.

В заключение авторы выражают благодарность Д.И. Блохинцеву за полезное обсуждение затронутых здесь вопросов.

Литература

1. W.Heisenberg. Zeit. f. Naturforsch., 9a, 292 (1954).
2. W.E.Thirring. Ann. Phys., 9, 91 (1958).
3. V.Glaser. Nuovo Cim., vol. IX, no.6, 990 (1958).
4. M.Born. Proc. Roy. Soc., A, 143, 410 (1934).
   B.Born, and L.Infeld. ibid. 144, 425.(1934).
5. Д. Блохинцев, В. Орлов. ЖЭТФ, 25, 503 (1953).
6. Б. Барбашов, Н. Черников. ЖЭТФ, № 5 (1966) (будет опубликовано). Препринт ОИЯИ, Р-2151, Дубна 1965. г.

Рукопись поступила в издательский отдел
4 марта 1966 г.

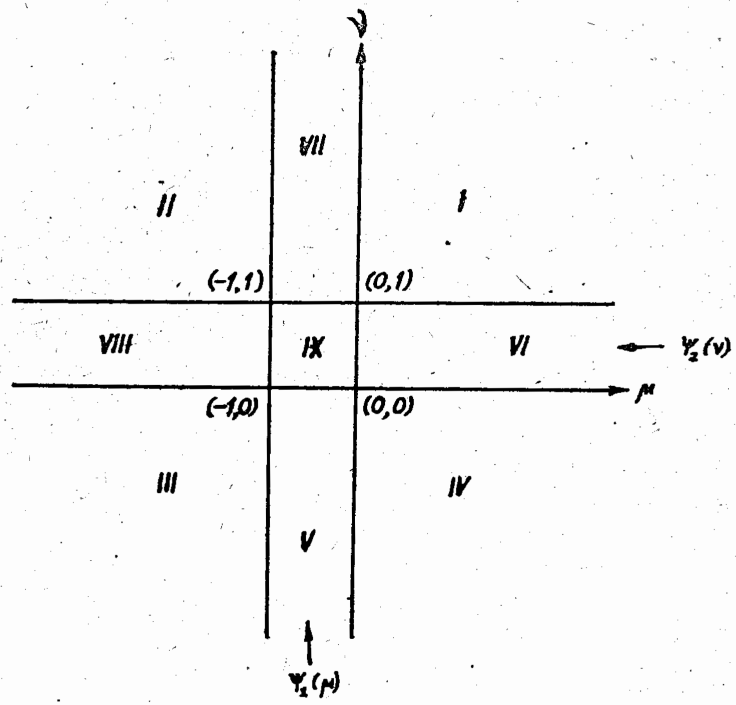
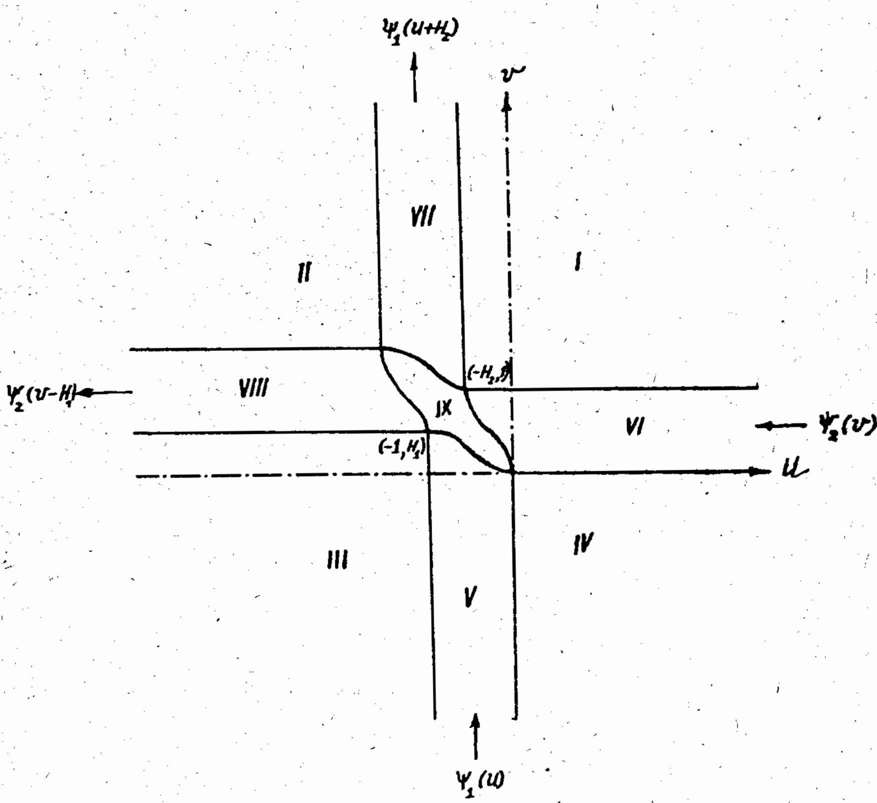


Рис. 1



$\psi_1(u+H_2)$
v
VII
II
I
VIII
$(-H_2,1)$
$\psi_2(v-H_1)$
IX
VI
$\psi_2(v)$
$(-1,H_1)$
u
III
IV
V
$\psi_1(u)$

Рис. 2