ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория теоретической физики

В. С. Владимиров и А. А. Логунов

Р-260

Доказательство некоторых дисперсионных соотношений в квантовой теории поля

г. Дубна, 1958

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
Лаборатория теоретической физики

В.С.Владимиров[x] и А.А.Логунов

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕКОТОРЫХ ДИСПЕРСИОННЫХ СООТНОШЕНИЙ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

1958 год

x) Математический институт им. В.А.Стеклова Академии Наук СССР

Аннотация

Методом Боголюбова с помощью интегрального представления Иоста-Лемана-Дайсона для причинного коммутатора дается доказательство дисперсионных соотношений для некоторых неупругих процессов.

Введение

Метод дисперсионных соотношений в квантовой теории поля был предложен в 1955 г. Гольдбергером /1/. Дисперсионные соотношения устанавливают связь между вещественной и мнимой частями амплитуды рассеяния. Эта связь позволяет получить соотношения между величинами, которые можно определить из опытов по рассеянию частиц. Экспериментальная проверка дисперсионных соотношений могла бы указать на возможные нарушения основных принципов теории, если бы было установлено, что эти соотношения являются следствиями этих принципов. В этой связи важное значение приобретают строгие доказательства дисперсионных соотношений. Метод дисперсионных соотношений основывается на свойствах аналитичности амплитуд рассеяния, которые являются, вообще говоря, обобщенными функциями[x)]. Установление свойств аналитичности амплитуд рассеяния приводило к ряду математических трудностей, в связи с чем дисперсионные соотношения некоторое время не были обоснованы.

В 1956 г. Н.Н.Боголюбов[xx)], опираясь на теорию обобщенных функций и теорию функций многих комплексных переменных, впервые разработал метод, позволяющий строго доказывать дисперсионные соотношения. Этим путем он доказал (см. /4/, Математическое дополнение) дисперсионные соотношения для мезон-нуклонного рассеяния для передачи импульса

$$\frac{1}{4}(p-p')^2 = \Delta^2 \leq \frac{M}{M+\mu}\mu^2$$

где M и μ - массы нуклона и мезона соответственно.

---

x) Обобщенной функцией мы называем всякий линейный непрерывный функционал над пространством S Шварца (2) или, что одно и то же, на введенных Боголюбовым классах $C(p,q;n)$ (см., например, (3)).

xx) Доклад на Международном съезде физиков-теоретиков в Сиэттле, США (сентябрь 1956 г.); см. также работу Боголюбова, Медведева и Поливанова .

В этом же году Симанчиком[x)] было дано доказательство дисперсионных соотношений для $\Delta^2 = 0$. В этом случае имеет место упрощающее обстоятельство, связанное с отсутствием так называемой ненаблюдаемой области.

Дальнейшее усовершенствование и развитие метод Боголюбова получил в работе /5/, где верхняя грань для Δ^2 в случае мезон-нуклонного рассеяния была доведена до $2\mu^2$. Вскоре этот же результат был получен в совместной работе Бремермана, Эме и Тейлора /6/. Основой метода работы /6/ является построение аналитического расширения (см., например, /7/ гл.IУ) для областей специального вида, называемых полутрубами.

Опираясь на результаты работы /5/, Владимиров в /8/ увеличил верхнюю границу для Δ^2 до $2{,}56\,\mu^2$ (в предположении, что $M = \frac{}{}\mu$). Наконец, недавно Леман /9/, пользуясь интегральным представлением Дайсона /I0/ для причинного коммутатора, получил оценку:

$$\Delta^2 < \Delta^2_{max} = \frac{8}{3}\,\frac{2M+\mu}{2M-\mu}\,\mu^2 \approx 3{,}10\,\mu^2 \left(M = \frac{940}{140}\mu \right) \tag{0.I}$$

Дисперсионные соотношения для процессов типа I-6 (см.ниже) были доказаны в работах /8,I4,20/.

В настоящей работе методом Боголюбова /4,5/ с помощью интегрального представления Иоста-Лемана-Дайсона /22,I0/ дается доказательство дисперсионных соотношений для процессов I-6 для более широкого интервала изменения передачи импульса Δ^2.

I. Комптон-эффект на нуклонах ($p+\gamma \to p'+\gamma'$) (Гелл-Манн, Гольдбергер и Тирринг /II/, Боголюбов и Ширков /I2/, Акиба и Сато /I3/). Для данного процесса параметры γ_i и τ_i° [xx)] принимают значения

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 2\,, \quad \tau_1^\circ = \tau_2^\circ = 0$$

Верхняя граница Δ^2_{max} для передачи импульса Δ^2 вычисляется по формуле (I.I7) и равна:

$$\Delta^2_{max} = \frac{(2M+\mu)(6M^2+9M\mu+4\mu^2)}{4M(M+\mu)^2} \approx 3{,}02\,\mu^2 \tag{0.2}$$

---

x) Доклад на Международном съезде физиков-теоретиков в Сиэттле, США (сентябрь 1956 г.)

xx) По поводу смысла обозначений параметров γ_j и τ_j° см. основную теорему.

2. Тормозное излучение γ - квантов в электрон-нуклонных столкновениях ($p+e\to p'+e'+\gamma$) (Логунов[I5])

$$\gamma_1=\gamma_2=2,\quad \tau_1^\circ=\tau^\circ<0,\quad \tau_2^\circ=0$$

$$\Delta^2_{max}=\frac{M}{M+\mu}\;\frac{2\mu^2-\tau^\circ}{4}+\frac{(\mu^2-\tau_\circ)\mu^2}{2(2M+2\mu)^2}+\frac{(2M+\mu)\mu}{4M}\sqrt{4\mu^2-\tau^\circ}\Big[1+ \tag{0.3}$$

$$+\sqrt{1+\frac{\mu^2-\tau^\circ}{4\mu^2-\tau^\circ}\cdot\frac{M}{(M+\mu)^2}\cdot\frac{(2M+\mu)^2-\tau^\circ}{2M+\mu}}\;\sqrt{1+\frac{M(2M+\mu)}{(2M+2\mu)^2}}\Big],\ \text{если}\ \tau^\circ<-3\mu^2$$

при $\tau^\circ\geq-3\mu^2$ Δ^2_{max} дается общей формулой (I.I2). Вычисления дали следующие результаты:

τ°/μ^2	-I	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-I0	-20
Δ^2_{max}/μ^2	3,69	4,30	4,88	5,4I	5,9I	6,40	6,88	7,33	7,77	8,I9	I2,23

3. Фоторождение электронно-позитронных пар на нуклонах $(p+\gamma\to p'+e^++e^-)$ (Логунов[I5])

$$\gamma_1=\gamma_2=2,\quad \tau_1^\circ=0,\quad (2m_e)^2\leq\tau_2^\circ=\tau^\circ<2{,}15\mu^2$$

где m_e - масса электрона. Верхняя граница τ° вычислена согласно формуле (I.5) Δ^2_{max} вычисляется по формуле (0.3):

τ°/μ^2	0	0,25	0,5	0,75	I,0	I,5	2,0
Δ^2_{max}/μ^2	3,02	2,84	2,66	2,46	2,25	I,79	I,I5

4. Фоторождение мезонов на нуклонах ($p+\gamma\to p'+\pi$) (Логунов и Степанов[I6], Логунов, Соловьев и Тавхелидзе[I7], Коринальдези[I8], Чу, Гольдбергер, Лоу и Намбу[I9])

$$\gamma_1=2,\ \gamma_2=3,\quad \tau_1^\circ=0,\ \tau_2^\circ=\mu^2 \tag{0.4}$$

$$\Delta^2_{max}=\frac{M}{M+\mu}\;\frac{\mu^2}{4}+(2M+\mu)\mu^2\sqrt{\frac{2}{3M(2M-\mu)}}\Big[1+\sqrt{1+\frac{M(2M+\mu)}{4(M+\mu)^2}}\Big]\simeq3{,}04\mu^2$$

5. Рождение π -мезонов в электрон-нуклонных столкновениях $(p+e\to p'+e'+\pi)$ (Логунов[I5], Фубини, Намбу и Ватагин[2I])

$$\gamma_1=2,\ \gamma_2=3,\quad \tau_1^\circ=\tau^\circ<0,\ \tau_2^\circ=\mu^2 \tag{0.5}$$

$$\Delta^2_{max}=\frac{M}{M+\mu}\;\frac{\mu^2-\tau^\circ}{4}+\frac{(2M+\mu)\mu}{2}\sqrt{\frac{2}{3}\;\frac{4\mu^2-\tau^\circ}{M(2M-\mu)}}\Big[1+\sqrt{1+\frac{\mu^2-\tau^\circ}{4\mu^2-\tau^\circ}\cdot\frac{M}{(M+\mu)^2}\cdot\frac{2(M+\mu)^2-\tau^\circ}{2M+\mu}}$$

если $\tau^\circ<-3\mu^2$, при $\tau^\circ\geq-3\mu^2$ Δ^2_{max} дается общей формулой (I.I2). Вычисления дали следующие результаты:

τ°/μ^2	-I	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-I0	-20
Δ^2_{max}/μ^2	3,73	4,36	4,95	5,5I	6,04	6,54	7,03	7,50	7,95	8,39	I2,32

6. Рождение электронно-позитронных пар π -мезонами $(p+\pi \to p'+e^+ +e^-)$ (Логунов[I5])

$$\gamma_1=3,\ \gamma_2=2,\ \tau_1^\circ=\mu^2,\ (2m_e)^2 < \tau^\circ=\tau_2^\circ < 2,15\mu^2$$

дается формулой (0.5):

τ°/μ^2	0	0,25	0,5	0,75	I	I,5	2,0
Δ^2_{max}/μ^2	3,04	2,85	2,65	2,45	2,23	I,83	I,09

Процессы 2-6 являются простейшими примерами неупругих реакций. Для мезон-нуклонного рассеяния $(\gamma_1=\gamma_2=3,\ \tau_1^\circ=\tau_2^\circ=\mu^2)$ полученное здесь значение Δ^2_{max} совпадает со значением, полученным Леманом в работе[9] (формула 0.I). В случае процессов I и 4 полученные в данной работе значения Δ^2_{max} совпадают с соответствующими значениями, вычисленными Эме и Тейлором[24]. Что касается процесса 5, наши результаты совпадают с соответствующими результатами работы[24] лишь при

$$\tau^\circ \geq -4\mu^2\frac{M+\mu}{M-\mu}=\tau'$$

При значениях $\tau^\circ < \tau'$ результаты работы[24] неправильны, поскольку при вычислении Δ^2_{max} по формуле (I.I2) ими, по существу, не была учтена вторая возможность в формулах (I.I0) (см.доказательство вспомогательной теоремы).

Как следует из основной теоремы, антиэрмитова часть амплитуды рассеяния при любых фиксированных $t \geq 1/2\,(M+\mu)$ и $\tau \leq 0$ является голоморфной функцией Δ^2 внутри эллипса (I.7) с границей

$$\Delta^2 = A + B\cos\delta + iC\sin\delta\,,\quad 0 \leq \delta < 2\pi$$

и фокусами

$$A \pm 1/2\sqrt{\varphi^2(t,\tau+\tau_1^\circ)\,\varphi^2(t,\tau+\tau_2^\circ)}$$

если $\tau_j^\circ \leq \mu^2$ x). Функции A, B, C и φ^2 определены формулами (I.8)-(I.I0). При $t > 1/2\ (M+\mu)$ в качестве новой переменной можно ввести $\cos\theta$ по формуле

$$\cos\theta = \frac{2(\Delta^2 - A)}{\sqrt{\varphi^2(t,\tau+\tau_1^\circ)\,\varphi^2(t,\tau+\tau_2^\circ)}}\,.$$

---

x) В том случае, если одно из $\tau_j^\circ > \mu^2$, фокусы могут лежать на мнимой оси.

Заметим попутно, что для вещественных значений этот косинус представляет собой косинус угла между импульсами начального и конечного нуклонов.

Тогда антиэрмитова часть амплитуды будет аналитической функцией от $\cos\theta$, голоморфной внутри эллипса с фокусами $\pm$ I и с границей

$$\cos\theta = D\cos\delta + i\sqrt{D^2-1}\,\sin\delta, \quad 0 \le \delta < 2\pi \tag{0.6}$$

где

$$D = \frac{2B}{\sqrt{\varphi^2(t,\tau+\tau_1^\circ)\,\varphi^2(t,\tau+\tau_2^\circ)}}$$

(9,24,25)

Поэтому она может быть разложена в ряд по полиномам Лежандра от $\cos\theta$ и этот ряд будет сходиться внутри эллипса (0.6). Коэффициенты этого ряда определяются значениями антиэрмитовой части в области, где $|\cos\theta| \le 1$. Полученный ряд, в частности, будет сходиться и для всех вещественных Δ^2 из промежутка:

$$\Delta^2_{min} < \Delta^2 < \Delta^2_{max}$$

Это обстоятельство даст возможность выразить антиэрмитову часть в ненаблюдаемой области, содержащейся в дисперсионных соотношениях, через значения в физической области.

§ I. Основная теорема

В настоящем параграфе нами будет дано доказательство основной теоремы, которая является обобщением и развитием соответствующей теоремы Боголюбова (/4/, Математическое дополнение, см.также/5.6.5/).

Эта теорема позволяет установить дисперсионные соотношения для всех перечисленных выше процессов (см. работы/14,20/), а также приводит к некоторым аналитическим свойствам амплитуды как функции энергии и передачи импульса. Получающиеся при этом результаты приведены во введении. Следует заметить, что аналитические свойства амплитуды доказываются на основе общих принципов квантовой теории поля-локальности и спектральных условий.

<u>ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА.</u> Пусть даны 4 обобщенные функции четырех 4-векторов

$$\mathcal{F}_{ij}(x_1, x_2, x_3, x_4), \quad i,j = \tau, a,$$

инвариантные относительно преобразований из неоднородной ортохронной группы Лоренца. Предположим, что эти обобщенные функции удовлетворяют следующим условиям:

$$\mathcal{F}_{rr} = 0, \text{ если } x_1 \leq x_3, \text{ или } x_2 \leq x_4$$
$$\mathcal{F}_{ra} = 0, \text{ если } x_1 \leq x_3, \text{ или } x_2 \geq x_4$$
$$\mathcal{F}_{ar} = 0, \text{ если } x_1 \geq x_3, \text{ или } x_2 \leq x_4 \qquad (I.I)$$
$$\mathcal{F}_{aa} = 0, \text{ если } x_1 \geq x_3, \text{ или } x_2 \geq x_4$$

Пусть далее их преобразования Фурье $\tilde{\mathcal{F}}_{ij}(p_1, \dots, p_4)$

$$\int \mathcal{F}_{ij}(x_1,\dots,x_4) \exp i(p_1x_1 + \dots + p_4x_4)\, dx_1 \dots dx_4 = (2\pi)^4 \delta(p_1 + \dots + p_4)\, \tilde{\mathcal{F}}_{ij}(p_1, \dots, p_4)$$

определенные, очевидно, на многообразии

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0 \qquad (I.2)$$

удовлетворяют условиям:

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{\mathcal{F}}_{rj} = \tilde{\mathcal{F}}_{aj} \quad \text{если} \quad p_1^2 < (M+\mu)^2, \quad p_3^2 < \gamma_1^2 \mu^2; \quad j = r, a \\ &\tilde{\mathcal{F}}_{ir} = \tilde{\mathcal{F}}_{ia} \quad \text{если} \quad p_2^2 < (M+\mu)^2, \quad p_4^2 < \gamma_2^2 \mu^2; \quad i = r, a \end{aligned}\right\} \qquad (I.3)$$

$$\tilde{\mathcal{F}}_{ij} = 0 \quad \text{если} \quad (p_1 + p_3)^2 < (M+\mu)^2 \quad \text{или} \quad p_{10} + p_{30} < 0, \quad i,j = r\, a \qquad (I.4)$$

При этом считаем, что $\gamma_j > 1, \ M + \mu \geq \gamma_j \mu > 0, \ j = 1,2$. Пусть τ_j° – любые фиксированные числа, обладающие тем свойством, что

$$\min_{t \geq 1/2 (M+\mu)} \left[\left(t + \frac{M^2 - \tau_j^\circ}{4t}\right)^2 - M^2 + \frac{(2M+\mu)(\gamma_j^2 \mu^2 - \tau_j^\circ)}{4t^2 - (M+\mu-\gamma_j\mu)^2}\, \mu \right] > 0 \quad j = 1,2 \qquad (I.5)$$

Тогда можно построить обобщенную функцию $\phi(z_1, z_2, \dots, z_5; t)$ вещественной переменной t со свойствами:

I) $\phi(z_1, \dots, z_5; t)$ голоморфна относительно $z = (z_1, z_2, \dots, z_5)$ в некоторой области D_t. Область $D_t,\ t \geq 1/2\ (M+\mu)$ содержит все точки z вида:

$$z_1 = M^2, \quad z_2 = M^2, \quad z_3 = \tau + \tau_1^\circ, \quad z_4 = \tau + \tau_2^\circ, \quad z_5 = -4\Delta^2 \qquad (I.6)$$

где τ – любое число, меньшее или равное нулю, и Δ^2 пробегает внутренность эллипса

$$A(t,\tau) + B(t,\tau)\cos\delta + iC(t,\tau)\sin\delta, \quad 0 \leq \delta < 2\pi \qquad (I.7)$$

где

$$A(t,\tau) = 1/4\, \varphi^2(t, \tau + \tau_1^\circ) + 1/4\, \varphi^2(t, \tau + \tau_2^\circ) - \left(\frac{\tau_1^\circ - \tau_2^\circ}{8t}\right)^2$$

$$B(t,\tau) = 1/2\, \varphi(t, \gamma_1, \tau + \tau_1^\circ)\, \varphi(t, \gamma_2, \tau + \tau_2^\circ) + 1/2 \sqrt{\varphi^2(t, \gamma_1, \tau + \tau_1^\circ) - \varphi^2(t, \tau + \tau_1^\circ)} \sqrt{\varphi^2(t, \gamma_2, \tau + \tau_2^\circ) - \varphi^2(t, \tau + \tau_2^\circ)}$$

$$C(t,\tau) = 1/2\, \varphi(t, \gamma_1, \tau + \tau_1^\circ) \sqrt{\varphi^2(t, \gamma_2, \tau + \tau_2^\circ) - \varphi^2(t, \tau + \tau_2^\circ)} + 1/2\, \varphi(t, \gamma_2, \tau + \tau_2^\circ) \sqrt{\varphi^2(t, \gamma_1, \tau + \tau_1^\circ) - \varphi^2(t, \tau + \tau_1^\circ)} \qquad (I.8)$$

$$\varphi^2(t, \tau) = \left(t + \frac{M^2 - \tau}{4t}\right)^2 - M^2 \qquad (I.9)$$

$$\varphi(t,\tau,\gamma)=\begin{cases}\sqrt{\varphi^2(t,\tau)+\dfrac{(2M+\mu)(\gamma^2\mu^2-\tau)}{4t^2-(M+\mu-\gamma\mu)^2}}, & \text{если } \tau\geq\gamma\mu\left(M+\mu-\dfrac{4t^2}{M+\mu-\gamma\mu}\right)\\ \dfrac{(2M+\mu)\mu}{4t}+\dfrac{1}{4t}\sqrt{(2t+M+\mu)^2-\tau}\sqrt{(2t-M-\mu)^2-\tau}, & \text{если } \tau\leq\gamma\mu\left(M+\mu-\dfrac{4t^2}{M+\mu-\gamma\mu}\right)\end{cases} \quad (1.10)$$

В частности, если выполнено неравенство $\Delta^2_{min} < \Delta^2_{max}$ x), то ко всем областям $\mathcal{D}_t$ принадлежат Δ^2 из промежутка

$$\Delta^2_{min} < \Delta^2 < \Delta^2_{max} \quad (I.II)$$

где

$$\Delta^2_{max} = \min_{t\geq 1/2(M+\mu)} [A(t,0)+B(t,0)] \quad (I.I2)$$

$$\Delta^2_{min} = \max_{\substack{t\geq 1/2(M+\mu)\\ \tau\leq 0}} [A(t,\tau)-B(t,\tau)] \quad (I.I3)$$

2) $\Phi(z_1,\dots,z_5;\, t) = 0$, если $t < 1/2\,(M+\mu)$

3) Для вещественных ($\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$) из многообразия (I.2), для которых величины

$$z_1=\rho_1^2,\ z_2=\rho_2^2,\ z_3=\rho_3^2,\ z_4=\rho_4^2,\ z_5=(\rho_1+\rho_2)^2$$

принадлежат области $\mathcal{D}_t$, где $t^2=\left(\frac{\rho_1+\rho_3}{2}\right)^2$ имеет место представление

$$\tilde{\mathcal{F}}_{ij}(\rho_1,\dots,\rho_4)=\Phi\left[\rho_1^2, \rho_2^2, \rho_3^2, \rho_4^2, (\rho_1+\rho_2)^2; \left(\frac{\rho_1+\rho_3}{2}\right)^2\right]$$

если $\rho_{10}+\rho_{30}\geq 0$

Отметим несколько важных для приложений частных случаев этой теоремы.

I. Пусть

$$2\leq\gamma_j\leq 3, \qquad -\gamma_j^2\mu^2\frac{M+\mu}{M+\mu-\gamma_j\mu}\leq\tau_j^0\leq\mu^2 \quad (I.I4)$$

и M/μ = экспериментальному отношению массы нуклона к массе π -мезона (M = 6,734). Тогда Δ^2_{min}= 0 (см. рассуждение в конце § 3) и, следовательно, промежуток изменения Δ^2 в (I.II) можно заменить на

$$0<\Delta^2<\Delta^2_{max} \quad (I.I5)$$

2. Если минимум в (I.I2) реализуется в точке $t=\frac{1}{2}(M+\mu)$ и

$$\tau_j^0\geq-\gamma_j^2\mu^2\frac{M+\mu}{M+\mu-\gamma_j\mu} \quad (I.I6)$$

---

x) Это опять приведет к некоторым ограничениям на числа γ_j, τ_j^0 и M/μ.

то выражение для Δ^2_{max} упрощается и принимает следующий вид:

$$\Delta^2_{max} = \frac{M}{M+\mu}\,\frac{2\mu^2-\tau_1^\circ-\tau_2^\circ}{4} + \frac{(\mu^2-\tau_1^\circ)(\mu^2-\tau_2^\circ)}{8\,(M+\mu)^2} + \frac{2M+\mu}{2}\sqrt{\frac{(\gamma_1^2\mu^2-\tau_1^\circ)(\gamma_2^2\mu^2-\tau_2^\circ)}{\gamma_1\gamma_2\,(2M+2\mu-\gamma_1\mu)(2M+2\mu-\gamma_2\mu)}}\,\cdot$$

$$\cdot\left[1+\sqrt{1+\frac{\mu^2-\tau_1^\circ}{\gamma_1^2\mu^2-\tau_1^\circ}\cdot\gamma_1\frac{(2M+2\mu-\gamma_1\mu)}{4\,(M+\mu)^2}\cdot\frac{(2M+\mu)^2-\tau_1^\circ}{2M+\mu}}\,\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\sqrt{1+\frac{\mu^2-\tau_2^\circ}{\gamma_2^2\mu^2-\tau_2^\circ}\cdot\gamma_2\frac{(2M+2\mu-\gamma_2\mu)}{4(M+\mu)^2}\cdot\frac{(2M+\mu)^2-\tau_2^\circ}{2M+\mu}}\,\right] \qquad (I.17)$$

Для процессов I–6 при $\tau^\circ \le -3\mu^2$ минимум в (I.II) фактически реализуется в точке $t = 1/2\,(M+\mu)$ и, следовательно, Δ^2_{max} вычисляется по формуле (I.17). Это приводит нас к формулам (0.I)–(0.5).

3. Если

$$\gamma_1=\gamma_2=\gamma,\quad \tau_1^\circ=\tau_2^\circ=\tau^\circ,\quad \tau^\circ \geqslant -\gamma^2\mu^2\frac{M+\mu}{M+\mu-\gamma\mu}$$

то легко видеть, что $\Delta^2_{min} = 0$. Формула (I.I2) в этом случае значительно упрощается

$$\Delta^2_{max} = \min_{t\ge 1/2\,(M+\mu)} \varphi^2(t,\gamma,\tau^\circ) = \min_{t\ge 1/2\,(M+\mu)}\left[\left(t+\frac{M^2-\tau^\circ}{4t}\right)^2 - M^2 + \frac{(2M+\mu)\mu(\gamma^2\mu^2-\tau^\circ)}{4t^2-(M+\mu-\gamma\mu)^2}\right] \qquad (I.I8)$$

В случае мезон-нуклонного рассеяния и комптон-эффекта минимум в (I.I8) реализуется в точке $t = 1/2\,(M+\mu)$, что приводит к формулам (0.I) и (0.2). В случае равных масс ($M=\mu$, $\gamma = 2$, $\tau^\circ=\mu^2$) минимум в (I.I8) реализуется в точке $t=\sqrt{\frac{3}{2}}\,M$, что приводит к значению $\Delta^2_{max} = 2M^2$, указанному в работе /6/.

§ 2. Вспомогательная теорема

Доказательство основной теоремы опирается на теорему об аналитических свойствах запаздывающей и опережающей амплитуд процесса. Содержанием этого параграфа является доказательство этой вспомогательной теоремы, представляющей к тому же и самостоятельный интерес.

ТЕОРЕМА. Пусть даны две обобщенные функции $\mathcal{F}_r(x)$ и $\mathcal{F}_a(x)$, обладающие свойством запаздывания и опережения соответственно: $x=(x_0, x_1, x_2, x_3)$

$$\mathcal{F}_r(x)=0,\ \text{если}\ x\le 0;\quad \mathcal{F}_a(x)=0,\ \text{если}\ x\ge 0 \qquad (2.I)$$

Пусть, кроме того, их преобразования Фурье $\tilde{\mathcal{F}}_j(p)$, $p=(p_0, p_1, p_2, p_3)$, $j=r,a$ совпадают в области:

$$t-\sqrt{\vec{p}^2+\gamma^2\mu^2}<p_0<-t+\sqrt{\vec{p}^2+(M+\mu)^2} \tag{2.2}$$

Предполагаем, что

$$2t \geq M+\mu-\gamma\mu \geq 0, \quad \gamma>1, \ \mu>0 \tag{2.3}$$

Тогда существует аналитическая функция $\tilde{\Phi}(\kappa)$ четырех комплексных переменных

$$\kappa=(\kappa_0, \kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa)=p+iq=(p_0+iq_0, \vec{p}+i\vec{q})$$

голоморфная в области $G_t(\gamma)$, где область $G_t(\gamma)$ есть совокупность точек κ, удовлетворяющих условиям: либо $q^2>0$, либо при $q^2 \leq 0$:

$$(p_0+t)^2<\vec{p}^2+(M+\mu)^2; \ (p_0-t)^2<\vec{p}^2+\gamma^2\mu^2 \tag{2.4}$$

$$v_1(p_0, |\vec{p}|) \equiv -\frac{\alpha^2-\beta^2}{4}-t^2+p^2+\sqrt{\vec{p}^2(4t^2-\beta^2)+(t\alpha-p_0\beta)^2}<q^2, \text{ если } p_0+|\vec{p}| \leq t\,\alpha/\beta \tag{2.5}$$

$$v_2(p_0, |\vec{p}|) \equiv \frac{t-p_0-|\vec{p}|}{t+p_0+|\vec{p}|}\left[-(p_0+t)^2+\vec{p}^2+(M+\mu)^2\right]<q^2, \text{ если } p_0+|\vec{p}| \geq t\,\alpha/\beta \tag{2.6}$$

где обозначено

$$\alpha=M+\mu+\gamma\mu, \quad \beta=M+\mu-\gamma\mu$$

Функция $\tilde{\Phi}(\kappa)$ такова, что при вещественных p из области (2.2)

$$\tilde{\Phi}(p)=\tilde{\mathcal{F}}_r(p)=\tilde{\mathcal{F}}_a(p)$$

<u>ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.</u> В работах Иоста и Лемана/22/ и Дайсона/10/ найдено интегральное представление для причинного коммутатора. Применяя теорему Дайсона для нашего случая, получим

$$\tilde{\mathcal{F}}_r(p)-\tilde{\mathcal{F}}_a(p)=\int \varepsilon(p_0-u_0)\,\varphi\left[u, (p-u)^2\right]du \tag{2.7}$$

где обобщенная функция $\varphi(u, \lambda^2)$ сосредоточена в области:

$$|u_0|+|\vec{u}| \leq t, \ \lambda \geq \max\left[0, M+\mu-\sqrt{(t+u_0)^2-\vec{u}^2}, \gamma\mu-\sqrt{(t-u_0)^2-\vec{u}^2}\right] \tag{2.8}$$

В силу свойств (2.I) функции $\tilde{\mathcal{F}}_r(\kappa)$ и $\tilde{\mathcal{F}}_a(\kappa)$ голоморфны соответственно в областях: $q_0>|\vec{q}|$ и $q_0<-|\vec{q}|$ и имеют место предельные соотношения

$$\tilde{\mathcal{F}}_r(p+iq) \xrightarrow[q\to 0,\ q_0>|\vec{q}|]{} \tilde{\mathcal{F}}_r(p), \qquad \tilde{\mathcal{F}}_a(p+iq) \xrightarrow[q\to 0,\ q_0<-|\vec{q}|]{} \tilde{\mathcal{F}}_a(p) \tag{2.9}$$

причем стремление к пределу имеет место в слабом смысле. Фиксируем вещественный вектор $\vec{p}$ и рассмотрим функции $\tilde{\mathcal{F}}_r(\kappa_0, \vec{p})$ и $\tilde{\mathcal{F}}_a(\kappa_0, \vec{p})$, являющиеся голоморфными функциями $\kappa_0=p_0+iq_0$ соответственно в верхней и нижней полуплоскости;

введенные функции ограничены полиномом некоторой степени m соответственно в областях $q_0 \geq \delta$ и $q_0 \leq -\delta$ при каждом $\delta > 0$. Как следует из доказательства леммы I работы [23], степень мажорирующего полинома не зависит от $\vec{p}$ и δ, а зависит только от того класса $C(p,q;4)$, которому принадлежат функции $\tilde{\mathcal{F}}_j$. Принимая во внимание свойства функций $\tilde{\mathcal{F}}_j(K_0,\vec{p})$ и применяя теорему Коши, получим при $q_0 > 0$

$$\tilde{\mathcal{F}}_r(K_0,\vec{p}) = \frac{(K_0-iN)^{n+1}}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\tilde{\mathcal{F}}_r(\xi,\vec{p})-\tilde{\mathcal{F}}_a(\xi,\vec{p})}{(\xi-K_0)(\xi-iN)^{n+1}}\,d\xi + \sum_{s=0}^{n}\frac{(K_0-iN)^s}{s!}\left.\frac{\partial^s\tilde{\mathcal{F}}_r(\xi,\vec{p})}{\partial\xi^s}\right|_{\xi=iN} \tag{2.10}$$

где n - достаточно большое натуральное число (во всяком случае не меньшее числа m) и N - произвольное положительное число.

Учитывая представление (2.7), после несложных преобразований получим из (2.10)

$$\tilde{\mathcal{F}}_r(K_0,\vec{p}) = \frac{(K_0-iN)^{n+1}}{2\pi i}\int\frac{\left[K_0-u_0-\sqrt{\lambda^2+(\vec{p}-\vec{u})^2}\right]\left[u_0-iN+\sqrt{\lambda^2+(\vec{p}-\vec{u})^2}\right]^{n+1}-\left[K_0-u_0+\sqrt{\lambda^2+(\vec{p}-\vec{u})^2}\right]\left[u_0-iN-\sqrt{\lambda^2+(\vec{p}-\vec{u})^2}\right]^{n+1}}{2\sqrt{\lambda^2+(\vec{p}-\vec{u})^2}\left[(K_0-u_0)^2-(\vec{p}-\vec{u})^2-\lambda^2\right]\left[(u_0-iN)^2-(\vec{p}-\vec{u})^2-\lambda^2\right]^{n+1}}\cdot$$

$$\varphi(u,\lambda^2)\,du\,d\lambda^2 + \sum_{s=0}^{n}\frac{(K_0-iN)^s}{s!}\tilde{\mathcal{F}}^{(s)}(iN,\vec{p}) \tag{2.11}$$

Интеграл в (2.11) можно интерпретировать как значение функционала (обобщенной функции) φ на функции из соответствующего класса $C(p,q;4)$ (при достаточно большом n).

Из (2.11) следует, что функция $\tilde{\mathcal{F}}_r(K_0,\vec{p})$ допускает аналитическое продолжение как по комплексной переменной K_0, так и по вещественным переменным $\vec{p}$ на комплексные значения $\vec{p}$. Получающаяся при этом функция $\tilde{\mathcal{F}}_r(K)$ будет голоморфной для тех K, для которых одновременно имеют место неравенства

$$\vec{q}^{\,2} < N^2$$

$$\left.\begin{aligned}&(K_0-u_0)^2-(\vec{K}-\vec{u})^2-\lambda^2 \neq 0\\&(iN-u_0)^2-(\vec{K}-\vec{u})^2-\lambda^2 \neq 0\end{aligned}\right\}\ \text{при всех } (u,\ \lambda^2) \text{ из области (2.8)} \tag{2.12}$$

Так как N - произвольное положительное число и область (2.12) монотонно возрастает с увеличением N, то в (2.12) можно перейти к пределу при $N \to +\infty$. Таким образом, к области голоморфности функции $\tilde{\mathcal{F}}_r(K)$ относятся те точки K, для которых выполнено неравенство

$$(K_0-u_0)^2-(\vec{K}-\vec{u})^2-\lambda^2 \neq 0 \tag{2.13}$$

при всех (w, λ^2) из области (2.8). Из условия (2.13) непосредственно следует, что точки K, для которых $q^2>0$, принадлежат области голоморфности функции $\tilde{F}_2(K)$. Поэтому мы можем ограничить наше рассмотрение теми K, для которых $q^2\leq 0$. Эти последние K содержатся в силу (2.13) в области, определяемой условием:

$$Re\,[(K_0-u_0)^2-(\vec{K}-\vec{u})^2-\lambda^2]^2=(p-u)^2-q^2-\lambda^2<0 \qquad (2.14)$$

при всех (w, λ^2) из области (2.8).

Чтобы раскрыть условие (2.14), предположим для определенности, что $2t\geq M+\mu+\gamma\mu$. Принимая во внимание (2.8), запишем условие (2.14) в виде:

$$\max_{|u_0|+|\vec{u}|\leq t} f(u_0,|\vec{u}|)<0 \qquad (2.15)$$

где f – непрерывная функция своих аргументов (см.рис.I).

$$f(u_0,|\vec{u}|)=\begin{cases}(p_0-u_0)^2-(|\vec{p}|-|\vec{u}|)^2-q^2 & \text{если } (u_0,|\vec{u}|)\in \text{ области I},\\ (p_0-u_0)^2-(|\vec{p}|-|\vec{u}|)^2-q^2-[\gamma\mu-\sqrt{(t-u_0)^2-\vec{u}^2}]^2 & \text{если } (u_0,|\vec{u}|)\in \text{II},\\ (p_0-u_0)^2-(|\vec{p}|-|\vec{u}|)^2-q^2-[M+\mu-\sqrt{(t+u_0)^2-\vec{u}^2}]^2 & \text{если } (u_0,|\vec{u}|)\in \text{III}.\end{cases}$$

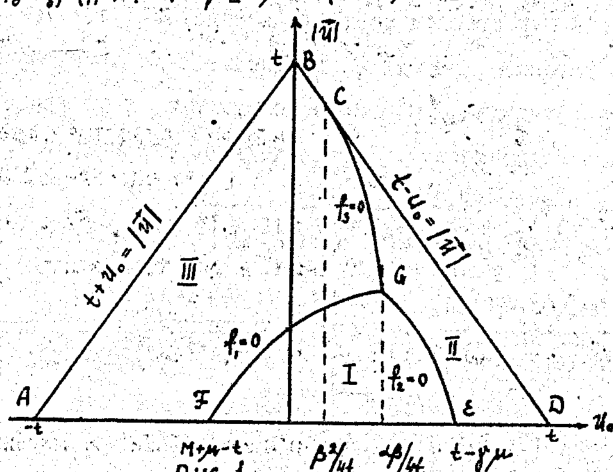

Рис. 1

Линии FG, EG и CG имеют соответственно уравнения:

$$f_1(u_0,|\vec{u}|)\equiv M+\mu-\sqrt{(t+u_0)^2-\vec{u}^2}=0$$

$$f_2(u_0,|\vec{u}|)\equiv \gamma\mu-\sqrt{(t-u_0)^2-\vec{u}^2}=0$$

$$f_3(u_0,|\vec{u}|)\equiv f_1(u_0,|\vec{u}|)-f_2(u_0,|\vec{u}|)=0$$

Уравнение линии CG преобразуется к виду:

$$2\beta\,|\vec{u}| = \sqrt{(4t^2-\beta^2)(\beta^2-4u_0^2)}\ , \quad \frac{\beta^2}{4t} \leq u_0 \leq \frac{\alpha\beta}{4t} \tag{2.16}$$

Замечая, что

$$f(-t,0) = (p_0+t)^2-\vec{p}^{\,2}-q^2-(M+\mu)^2,\quad f(t,0) = (p_0-t)^2-\vec{p}^{\,2}-q^2-\gamma^2\mu^2$$

видим из (2.15), что к области голоморфности в случае $q^2 \leq 0$ принадлежат только те точки K, для которых выполнены неравенства (2.4), эквивалентные неравенствам (2.2).

Очевидно, что внутри области I и внутри линии $\mathcal{F}\mathcal{E}$ максимум функции f не реализуется. Из (2.2) следует, что этот максимум может быть только на границах областей II и III.

Внутри участков $A\mathcal{F}$ и $\mathcal{E}D$ максимум функции f не реализуется, ибо там она линейна; так как правее от линии AB и левее от линии CD функция f возрастает, то ее максимум не может достигаться также и внутри линий AB и CD.

Докажем, что в точках A и D максимум функции f не реализуется. Действительно, рассматривая для определенности точку A, имеем в силу (2.2):

$$\max_{0<\rho<1} \tfrac{1}{2}\, \partial/\partial u_0\, f[u_0, (t+u_0)\rho]\Big|_{u_0=-t} = -p_0 - t + \sqrt{\vec{p}^{\,2}+(M+\mu)^2} > 0$$

Отсюда следует, что в окрестности точки A всегда найдется лежащее в области III направление, вдоль которого функция f возрастает. Докажем теперь, что вдоль линии $\mathcal{F}G$ производная функции f по u_0 положительна, в то время как вдоль линии $\mathcal{E}G$ эта производная отрицательна. Действительно, рассматривая, например, случай линии $\mathcal{F}G$, имеем в силу (2.2)

$$f = (p_0-u_0)^2-q^2-\left[|\vec{p}|-\sqrt{(t+u_0)^2-(M+\mu)^2}\right]^2,\quad M+\mu-t < u_0 \leq \frac{\alpha\beta}{4t};$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial u_0} = -p_0-t+\frac{(t+u_0)|\vec{p}|}{\sqrt{(t+u_0)^2-(M+\mu)^2}} \geq -p_0-t+\frac{(4t^2+\alpha\beta)|\vec{p}|}{\sqrt{(4t^2+\alpha\beta)^2-16t^2(M+\mu)^2}} \geq$$

$$\geq -p_0-t+\sqrt{\vec{p}^{\,2}+(M+\mu)^2} > 0$$

При этом мы приняли во внимание только те $\vec{p}^{\,2}$, которые в силу (2.2) удовлетворяют неравенству

$$\vec{p}^{\,2} > \frac{(4t^2-\alpha^2)(4t^2-\beta^2)}{16t^2} \tag{2.17}$$

Из сказанного вытекает, что максимум функции f может достигаться либо на линии BC, либо на линии CG. На линии BC имеем:

$$f=(p_0-u_0)^2-(|\vec{p}|-t+u_0)^2-q^2-(M+\mu-2\sqrt{tu_0})^2, \quad 0\le u_0\le \beta^2/4t$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial u_0}=-t-p_0-|\vec{p}|+(M+\mu)\sqrt{\frac{t}{u_0}}$$

Отсюда следует, что если выполнено неравенство

$$p_0+|\vec{p}|\ge t\frac{\alpha}{\beta} \tag{2.18}$$

то максимум функций f достигается на линии BC и равен $V_2(p_0,|\vec{p}|)-q^2$, что в силу (2.15) приводит к условиям (2.6). Принимая во внимание (2.16), на линии CG получим

$$f=(p_0-u_0)^2-\Big[|\vec{p}|-\sqrt{\frac{4t^2-\beta^2}{4\beta^2}(\beta^2-4u_0^2)}\Big]^2-q^2-\Big(M+\mu-\frac{\beta}{2}-\frac{2u_0t}{\beta}\Big)^2; \quad \frac{\beta^2}{4t}\le u_0\le\frac{\alpha\beta}{4t};$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial u_0}=t\frac{\alpha}{\beta}-p_0-\frac{2u_0|\vec{p}|}{\beta}\sqrt{\frac{4t^2-\beta}{\beta^2-4u_0^2}}$$

Если p удовлетворяет условиям (2.2) /и, следовательно, (2.17)/, то

$$\frac{1}{2}\frac{\partial f}{\partial u_0}\Big|_{u_0=\frac{\alpha\beta}{4t}-0}=t\frac{\alpha}{\beta}-p_0-|\vec{p}|\sqrt{\frac{4t^2-\beta^2}{4t^2-\alpha^2}}\frac{\alpha}{\beta}<t-p_0-\sqrt{\vec{p}^{\,2}+\gamma^2\mu^2}<0$$

Поэтому, если условие (2.18) не выполнено, то максимум функции f непременно реализуется на участке CG и равен $V_1(p_0,|\vec{p}|)-q^2$, что в силу (2.15) приводит к условиям (2.5).

Докажем теперь, что при $q^2=0$ неравенства (2.5)-(2.6) следуют из неравенств (2.4) или, что то же самое, из неравенств (2.2). Для этого достаточно заметить, что неравенство (2.5) при $q^2=0$ может быть записано в виде

$$\big[(p_0+t)^2-\vec{p}^{\,2}-(M+\mu)^2\big]\big[(p_0-t)^2-\vec{p}^{\,2}-\gamma^2\mu^2\big]>0, \quad \text{если } p_0+|\vec{p}|\le t\frac{\alpha}{\beta}$$

Таким образом доказано, что область $G_t(\gamma)$ содержит все вещественные точки (2.2).

Аналогичные рассуждения (с соответствующими упрощениями) приводят к той же самой области $G_t(\gamma)$ для случая, когда $2t\le M+\mu+\gamma\mu$. Повторяя подобные рассуждения для функции $\tilde{\mathcal{F}}_a$, мы придем к аналитической функции $\tilde{\mathcal{F}}_a(k)$, голоморфной в области $G_t^{\prime}(\gamma)$. Но по доказанному область $G_t^{\prime}(\gamma)$ содержит все вещественные точки (2.2) вместе с их (комплексными) окрестностями. Следовательно, в комплексной окрестности области (2.2) построенные функции $\tilde{\mathcal{F}}_j(k)$ голоморфны; по условию при вещественных p из области (2.2) эти функции совпадают как обобщенные и, следовательно, в силу их голоморфности совпадают в каждой точке. Поэтому функции $\tilde{\mathcal{F}}_j(k)$, $j=r,a$ определяют фактически одну аналитическую функцию $\tilde{\Phi}(k)$, голоморфную в области G_t и совпадающую при вещественных p из области (2.2) с функциями $\tilde{F}_j(p)$. Теорема доказана полностью.

Отметим одно полезное для приложений следствие, установленное при доказательстве этой теоремы: в условиях теоремы функция $\tilde{\Phi}(\kappa)$ голоморфна в комплексной окрестности области (2.2). Сформулированный результат был впервые установлен Н.Н.Боголюбовым (/4/ Математическое дополнение, теорема I); в дальнейшем этот результат был доказан другими методами в работах /22,5,6/. В /6/ такого типа теоремы названы теоремами " edge of the wedge".

§ 3. Доказательство основной теоремы

Доказательство основной теоремы будем проводить по схеме доказательства теорем III и II в работе /5/, используя при этом вместо теоремы I из /5/ доказанную в § 2 вспомогательную теорему. Предварительно кратко изложим ту часть доказательства, которая в некоторой степени повторяет соответствующие рассуждения в работе /5/.

Ввиду трансляционной инвариантности обобщенных функций $F_{ij}(x_1,\dots,x_4)$ их можно рассматривать как обобщенные функции трех 4-векторов, например:

$$y_1=x_1-x_3,\quad y_2=x_4-x_2,\quad y_3=x_1-x_2+x_3-x_4$$

Это приводит нас к функциям

$$\phi_{ij}(y_1,y_2,y_3)=\phi_{ij}(x_1-x_3,\ x_4-x_2,\ x_1-x_2+x_3-x_4)=F_{ij_1}(x_1,\dots,x_4) \tag{3.1}$$

$$\tilde{\Phi}_{ij}(q_1,q_2,q_3)=2^4\tilde{F}_{ij_1}(q_1+q_3,\ -q_2-q_3,\ q_3-q_1,\ +q_2-q_3) \tag{3.2}$$

где $j_1=r$, если $j=a$ и $j_1=a$, если $j=r$. Положив $p_1=q_1+q_3$, $p_2=-q_2-q_3$, $p_3=q_3-q_1$, $p_4=+q_2-q_3$, находим

$$q_3=\frac{p_1+p_3}{2},\quad p_1^2=(q_1+q_3)^2,\quad p_2^2=(q_2+q_3)^2,\quad p_3^2=(q_3-q_1)^2, \tag{3.3}$$
$$p_4^2=(q_2-q_3)^2,\quad (p_1+p_2)^2=(q_1-q_2)^2$$

В силу условий (I.4) и соотношений (3.3) функции $\tilde{\Phi}_{ij}(q_1,\dots,q_3)$ обращаются в нуль в области, где

$$q_3^2<\left(\frac{M+\mu}{2}\right)^2,\ \text{или}\ q_{30}<0, \tag{3.4}$$

т.е. вне будущего светового конуса. Поэтому, а также на основании лоренцовской инвариантности функций $\tilde{\Phi}_{ij}$, всегда можно выбрать систему координат таким образом, чтобы вектор q_3 был равен:

$$q_3 = (t, \vec{0}) \tag{3.5}$$

В этой системе координат обобщенные функции $\tilde{\Phi}_{ij}(q_1, q_2, q_3)$ будем записывать в виде: $\tilde{f}_{ij}(q_1, q_2, t)$. Таким образом, мы приходим к системе четырех обобщенных функций $f_{ij}(y_1, y_2, y_0)$ 9-ти переменных ($y_{10}, \vec{y}_1, y_{20}, \vec{y}_2, y_0$), обладающих в силу (I.I), (I.3), (I.4) и (3.I)-(3.5) следующими свойствами:

$$
\begin{aligned}
1.\ & f_{rr} = 0, \text{ если } y_1 \le 0, \text{ или } y_2 \le 0, \\
& f_{ra} = 0, \text{ если } y_1 \le 0, \text{ или } y_2 \ge 0, \\
& f_{ar} = 0, \text{ если } y_1 \ge 0, \text{ или } y_2 \le 0, \\
& f_{aa} = 0, \text{ если } y_1 \ge 0, \text{ или } y_2 \ge 0.
\end{aligned} \tag{3.6}
$$

$$2.\ \tilde{f}_{rj} - \tilde{f}_{aj} = 0, \quad j = r, a, \text{ если}$$

$$(q_{10}+t)^2 < \vec{q}_1^{\,2} + (M+\mu)^2; \quad (q_{10}-t)^2 < \vec{q}_1^{\,2} + \gamma_1^2 \mu^2 \tag{3.7}$$

$$\tilde{f}_{ir} - \tilde{f}_{ia} = 0, \quad i = r, a, \text{ если}$$

$$(q_{20}+t)^2 < \vec{q}_2^{\,2} + (M+\mu)^2, \quad (q_{20}-t)^2 < \vec{q}_2^{\,2} + \gamma_2^2 \mu^2 \tag{3.8}$$

$$3.\ f_{ij} = 0, \text{ если } \quad t < \frac{M+\mu}{2}, \quad ij = r, a \tag{3.9}$$

4. Функции $\tilde{f}_{ij}(q_1, q_2, t)$ инвариантны относительно пространственных вращений и отражений векторов $\vec{q}_1$ и $\vec{q}_2$.

Из (3.6) и (3.7) заключаем, что для двух ($j = r, a$) пар функций $\tilde{f}_{rj}(q_1, q_2, t)$ и $\tilde{f}_{aj}(q_1, q_2, t)$ относительно переменной q_1 выполнены условия вспомогательной теоремы. Применяя эту теорему, придем к функциям

$$\tilde{\Phi}_j(\kappa_1, q_2, t), \quad j = r, a \tag{3.10}$$

которые являются голоморфными относительно κ_1, в области $G_t(\gamma_1)$ и обобщенными относительно (q_2, t). В силу (3.6), (3.8) и (3.9) построенные функции (3.10) опять удовлетворяют условиям вспомогательной теоремы по переменным q_2. Применяя снова эту теорему к функциям (3.10), построим функцию $\tilde{\Phi}(\kappa_1, \kappa_2, t)$, голоморфную по совокупности переменных (κ_1, κ_2) из области $G_t(\gamma_1) \times G_t(\gamma_2)$ и обобщенную относительно (вещественной) переменной t. Здесь мы воспользовались теоремой Гартогса (см. например, /7/ гл.УП), гласящей: если функция $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ голоморфна по каждой переменной при фиксированных остальных, то она голоморфна и по совокупности переменных ($z_1, z_2, \ldots, z_n$).

Полученная функция $\tilde{\Phi}(\kappa_1, \kappa_2; t)$ при вещественных $(\kappa_1, \kappa_2) = (q_1, q_2)$ из области $(3.7) \times (3.8)$ совпадает с функциями $\tilde{f}_{ij}(q_1, q_2, t)$.

Воспользуемся теперь условием инвариантности относительно пространственных вращений и отражений. В силу этого условия функция $\tilde{\phi}(K_1, K_2; t)$ зависит от (K_1, K_2) лишь посредством пяти переменных:

$$K_{10},\ K_{20},\ \vec{K}_1^2,\ \vec{K}_2^2,\ \vec{K}_1\vec{K}_2$$

Вместо них можно ввести эквивалентную систему переменных $z = (z_1, z_2, \dots, z_5)$, положив

$$z_1 = (K_{10}+t)^2 - \vec{K}_1^2,\quad z_2 = (K_{20}+t)^2 - \vec{K}_2^2,\quad z_3 = (K_{10}-t)^2 - \vec{K}_1^2,\quad z_4 = (K_{20}-t)^2 - \vec{K}_2^2,$$
$$z_5 = (K_{10}-K_{20})^2 - (\vec{K}_1 - \vec{K}_2)^2 \tag{3.11}$$

так что

$$\tilde{\phi}(K_1, K_2; t) = \phi(z_1, z_2, \dots, z_5; t) \tag{3.12}$$

Из (3.11) получаем

$$K_{10} = \frac{z_1 - z_3}{4t} \qquad K_{20} = \frac{z_2 - z_4}{4t},\quad (\vec{K}_1 - \vec{K}_2)^2 = -z_5 + \left(\frac{z_1 - z_2 - z_3 + z_4}{4t}\right)^2,$$
$$\vec{K}_1^2 = t^2 - \frac{z_1 + z_3}{2} + \left(\frac{z_1 - z_3}{4t}\right)^2,\quad \vec{K}_2^2 = t^2 - \frac{z_2 + z_4}{2} + \left(\frac{z_2 - z_4}{4t}\right)^2 \tag{3.13}$$

Таким образом, для доказательства основной теоремы достаточно в силу (1.6) показать, что каковы бы ни были числа t, τ и Δ^2 соответственно из промежутков $t \geq \frac{M+\mu}{2}$, $\tau \leq 0$ и из эллипса (1.7) найдется хотя бы одна (комплексная) точка (K_1, K_2), удовлетворяющая соотношениям

$$K_{j0} = \frac{M^2 - \tau - \tau_j^\circ}{4t},\quad \vec{K}_j^2 = t^2 - \frac{M^2 + \tau + \tau_j^\circ}{2} + \left(\frac{M^2 - \tau - \tau_j^\circ}{4t}\right)^2 \equiv \varphi^2(t, \tau + \tau_j^\circ),\ j = 1, 2$$
$$(\vec{K}_1 - \vec{K}_2)^2 = 4\Delta^2 + \left(\frac{\tau_1^\circ - \tau_2^\circ}{4t}\right)^2 \tag{3.14}$$

и принадлежащая области $G_t(\gamma_1) \times G_t(\gamma_2)$

Из (3.14) следует, что комплексные векторы $\vec{K}_j = \vec{p}_j + i\vec{q}_j$ имеют ортогональные вещественные и мнимые части: $\vec{p}_j \vec{q}_j = 0$, $j = 1, 2$. Поэтому условия (3.14) можно переписать в виде:

$$p_{j0} = \frac{M^2 - \tau - \tau_j^\circ}{4t},\quad q_{j0} = 0,\quad \vec{p}_j^{\,2} - \vec{q}_j^{\,2} = \varphi^2(t, \tau + \tau_j^\circ),\ j = 1, 2 \tag{3.15}$$

$$\vec{p}_1^{\,2} + \vec{p}_2^{\,2} - 2|\vec{p}_1||\vec{p}_2|\mu_1 - \vec{q}_1^{\,2} - \vec{q}_2^{\,2} + 2|\vec{q}_1||\vec{q}_2|\mu_2 + 2i|\vec{q}_1||\vec{p}_2|\nu_1 + 2i|\vec{p}_1||\vec{q}_2|\nu_2 = 4\Delta^2 + \left(\frac{\tau_1^\circ - \tau_2^\circ}{4t}\right)^2 \tag{3.16}$$

где числа μ_j и ν_j, $j = 1, 2$ суть косинусы углов между соответствующими векторами, удовлетворяющие соотношениям:

$$\mu_1\nu_2 + \nu_1\mu_2 + \alpha_1\alpha_2 = 0,\quad \mu_j^2 + \nu_j^2 = 1 - \alpha_j^2,\quad |\mu_j| \leq 1,\quad |\nu_j| \leq 1,\quad |\alpha_j| \leq 1,\quad j = 1, 2 \tag{3.17}$$

Исключая величины $|\vec{q}_j|$ из (3.16), с помощью (3.15) получим соотношение:

$$4\Delta^2 = \varphi^2(t,\tau+\tau_1^\circ)+\varphi^2(t,\tau+\tau_2^\circ)-\left(\frac{\tau_1^\circ-\tau_2^\circ}{4t}\right)^2-2|\vec{p}_1||\vec{p}_2|\mu_1+2\sqrt{\vec{p}_1^{\,2}-\varphi^2(t,\tau+\tau_1^\circ)}\sqrt{\vec{p}_2^{\,2}-\varphi^2(t,\tau+\tau_2^\circ)}\mu_2+$$
$$+2i|\vec{p}_1|\sqrt{\vec{p}_2^{\,2}-\varphi^2(t,\tau+\tau_2^\circ)}\nu_2+2i|\vec{p}_2|\sqrt{\vec{p}_1^{\,2}-\varphi^2(t,\tau+\tau_1^\circ)}\nu_1 \qquad (3.18)$$

Воспользуемся теперь вспомогательной теоремой из § 2. Выясним условия принадлежности к области $G_t(\gamma)$ точек K, удовлетворяющих условиям (3.15), т.е. точек вида:

$$K=\left[\frac{M^2-\tau-\tau^\circ}{4t},\ \vec{p}+i\vec{\lambda}\sqrt{\vec{p}^{\,2}-\varphi^2(t,\tau+\tau^\circ)}\right], \qquad (3.19)$$

где $\vec{\lambda}$ – вещественный ортогональный к вектору $\vec{p}$ орт, а $\vec{p}$ – произвольный вещественный вектор такой, что[x)]

$$\max\left[0,\varphi^2(t,\tau+\tau^\circ)\right]\le\vec{p}^{\,2} \qquad (3.20)$$

В рассматриваемом случае $q^2\le 0$.

Из (I.9) следует, что неравенства (2.4) для точек (3.19) всегда выполнены, если $\tau^\circ<\gamma^2\mu^2$. Условия (2.5) и (2.6) примут соответственно вид:

$$|\vec{p}|<\sqrt{\varphi^2(t,\tau+\tau^\circ)+\frac{(2M+\mu)(\gamma^2\mu^2-\tau-\tau^\circ)}{4t^2-(M+\mu-\gamma\mu)^2}}=u_1(t,\tau+\tau_\circ),\ \text{если}\ \frac{M^2-\tau-\tau^\circ}{4t}+|\vec{p}|\le$$
$$\le t\,\frac{M+\mu+\gamma\mu}{M+\mu-\gamma\mu}\ ; \qquad (3.21)$$

$$u_3(t,\tau+\tau_\circ)=\frac{(2M+\mu)\mu}{4t}-\frac{1}{4t}\sqrt{(2t+M+\mu)^2-\tau-\tau^\circ}\sqrt{(2t-M-\mu)^2-\tau-\tau^\circ}<|\vec{p}|<$$
$$<\frac{(2M+\mu)\mu}{4t}+\frac{1}{4t}\sqrt{(2t+M+\mu)^2-\tau-\tau^\circ}\sqrt{(2t-M-\mu)^2-\tau-\tau^\circ}\equiv \qquad (3.22)$$
$$\equiv u_2(t,\tau+\tau_\circ)$$

если $\quad \dfrac{M-\tau-\tau^\circ}{4t}+|\vec{p}|\ge t\,\dfrac{M+\mu+\gamma\mu}{M+\mu-\gamma\mu}$

Функция $u_1(t,\tau)$ монотонно убывает с возрастанием τ. Поэтому условие

$$\min_{t\ge 1/2\,(M+\mu)}\left[\left(t+\frac{M^2-\tau^\circ}{4t}\right)^2-M^2+\frac{(2M+\mu)(\gamma^2\mu^2-\tau^\circ)}{4t^2-(M+\mu-\gamma\mu)^2}\,\mu\right]>0 \qquad (3.23)$$

обеспечивает положительность подкоренного выражения в (3.21). Функция $u_3(t,\tau)$ отрицательна при всех

$$t\ge 1/2\,(M+\mu) \qquad \text{и} \qquad \tau<\gamma\mu\left(M+\mu-\frac{4t^2}{M+\mu-\gamma\mu}\right)$$

Поэтому ограничения снизу на $|\vec{p}|$ в (3.22) фактически нет.

---

x) При $\tau>\mu^2$ функция $\varphi^2(t,\tau)$ может стать отрицательной.

Рассмотрим в 3-мерном пространстве переменных ($t, \tau, |\vec{\rho}|$) три поверхности

$$|\vec{\rho}| = u_1(t,\tau+\tau^\circ),\ |\vec{\rho}| = u_2(t,\tau+\tau^\circ),\ |\vec{\rho}| = t\,\frac{M+\mu+\gamma\mu}{M+\mu-\gamma\mu} - \frac{M^2-\tau-\tau^\circ}{4t}$$

По построению (см. вспомогательную теорему) эти поверхности пересекаются по общей линии, проекция которой на плоскость $|\vec{\rho}|=0$ дается уравнением

$$u_1(t,\tau+\tau^\circ) = u_2(t,\tau+\tau^\circ)$$

которое преобразуется к виду:

$$\tau+\tau^\circ = \gamma\mu\left(M+\mu-\frac{4t^2}{M+\mu-\gamma\mu}\right)$$

В силу сказанного условия (3.21)-(3.22) можно переписать в форме:

$$|\vec{\rho}| < \varphi(t,\gamma,\tau+\tau^\circ) \tag{3.24}$$

где непрерывная функция φ определяется формулами (I.10).

Таким образом, на основании (3.20) и (3.24) получен следующий результат: все точки (3.19), для которых

$$\max[0,\varphi^2(t,\tau+\tau^\circ)] \leq \vec{\rho}^{\,2} < \varphi^2(t,\gamma,\tau+\tau^\circ) \tag{3.25}$$

принадлежат области голоморфности $G_t(\gamma)$.

Теперь выясним условия, которые обеспечивают непустоту области (3.25) при всех $\tau \leq 0$ и $t \geq 1/2\,(M+\mu)$. Для этого необходимо и достаточно, чтобы были выполнены неравенства:

$$\varphi^2(t,\gamma,\tau+\tau^\circ) > 0\,;\ \varphi^2(t,\gamma,\tau+\tau^\circ) - \varphi^2(t,\tau+\tau^\circ) > 0 \tag{3.26}$$

Из (I.9) и (I.10) следует, что функции φ и φ убывают с возрастанием τ . Докажем, что $\varphi^2-\varphi^2$ убывает с возрастанием τ . Для первого выражения в (I.10) это очевидно. Для второго выражения имеем:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}(\varphi^2-\varphi^2) = \frac{1}{2t}\left(t+\frac{M^2-\tau}{4t}\right) + \frac{1}{8t^2}\left[(2M+\mu)\mu + \sqrt{(2t+M+\mu)^2-\tau}\sqrt{(2t-M-\mu)^2-\tau}\right] \times$$

$$\times\frac{\tau-4t^2-(M+\mu)^2}{\sqrt{(2t+M+\mu)^2-\tau}\sqrt{(2t-M-\mu)^2-\tau}},\ \text{если } \tau \leq \gamma\mu\left(M+\mu-\frac{4t^2}{M+\mu-\gamma\mu}\right)$$

Откуда $$\frac{\partial}{\partial\tau}(\varphi^2-\varphi^2) < -\frac{(2M+\mu)\mu}{8t^2} < 0,\ \text{если } \tau \leq \gamma\mu\left(M+\mu-\frac{4t^2}{M+\mu-\gamma\mu}\right)$$

Таким образом, условия (3.26) можно переписать в виде:

$$\varphi^2(t,\gamma,\tau^\circ) > 0\,,\quad \varphi^2(t,\gamma,\tau^\circ) - \varphi^2(t,\tau^\circ) > 0$$

Но эти последние неравенства обеспечиваются условием (3.23).

Итак, условие (3.23) обеспечивает непустоту области (3.25). Применим полученный результат к точкам K_j, удовлетворяющим соотношениям (3.15). В силу (3.25) эти точки будут принадлежать области голоморфности $G_t(\gamma_1)\cdot G_t(\gamma_2)$ в том случае, если одновременно выполнены неравенства

$$\max[0,\varphi^2(t,\tau+\tau_j^\circ)]\leq \vec{p}_j^{\,2}<\varphi^2(t,\gamma_j,\tau+\tau_j^\circ),\; j=1,2 \tag{3.27}$$

Неравенства (I.5) обеспечивают непустоту области (3.27).

В силу изложенного к области голоморфности D_t функции ϕ принадлежат те значения Δ^2 (при данном $\tau\leq 0$), которые могут быть представлены в виде (3.18) хотя бы при одном наборе чисел $\mu_j, \nu_j, |\vec{p}_j|, j=1,2$, удовлетворяющих соответственно условиям (3.17) и (3.27). Чтобы получить границу соответствующей области необходимо, очевидно, положить в (3.18)

$$-\mu_1=\mu_2=\cos\delta,\quad \nu_1=\nu_2=\sin\delta,\quad |\vec{p}_j|=\varphi(t,\gamma_j,\tau+\tau_j^\circ)$$

(условия (3.17) при этом будут выполнены при $\alpha_j = 0$). Таким образом, мы приходим к эллипсу (I.7).

Докажем теперь, что промежуток (I.II) принадлежит всем эллипсам (I.7). Ясно, что всем эллипсам (I.7) принадлежат вещественные Δ^2 из промежутка

$$\max_{\substack{t\geq 1/2(M+\mu)\\ \tau\leq 0}}[A(t,\tau)-B(t,\tau)]<\Delta^2<\min_{\substack{t\geq 1/2(M+\mu)\\ \tau\leq 0}}[A(t,\tau)+B(t,\tau)] \tag{3.28}$$

Покажем, что минимум в правой части (3.28) реализуется при $\tau = 0$. Для этого достаточно установить, что при любом $t\geq 1/2(M+\mu)$ функции A и B монотонно возрастают с убыванием τ при всех $\tau\leq 0$. Но это утверждение непосредственно следует из (I.8) и из установленных свойств функций φ, φ и $\varphi^2-\varphi^2$.

Основная теорема доказана полностью.

Докажем теперь, что если параметры γ_j и τ_j° удовлетворяют соотношениям (I.14), то $\Delta^2_{min} = 0$. Так как

$$\lim_{t\to\infty}[A(t,\tau)-B(t,\tau)]=0$$

то для доказательства достаточно установить неравенство

$$A(t,\tau)-B(t,\tau)\leq 0 \tag{3.29}$$

при всех $t\geq 1/2(M+\mu)$ и $\tau\leq 0$. Неравенство (3.29) будет обеспечено, если мы докажем выполнение такого неравенства:

$$\begin{aligned}&\varphi^2(t,\tau+\tau_2^\circ)[\varphi^2(t,\gamma_1,\tau+\tau_1^\circ)-\varphi^2(t,\tau+\tau_1^\circ)]+\varphi^2(t,\tau+\tau_1^\circ)[\varphi^2(t,\gamma_2,\tau+\tau_2^\circ)-\varphi^2(t,\tau+\tau_2^\circ)]+\\&+2\sqrt{\varphi^2(t,\gamma_1,\tau+\tau_1^\circ)-\varphi^2(t,\tau+\tau_1^\circ)}\sqrt{\varphi^2(t,\gamma_2,\tau+\tau_2^\circ)-\varphi^2(t,\tau+\tau_2^\circ)}\,\times\\&\times\left[\left(t+\frac{M^2-\tau-\tau_1^\circ}{4t}\right)\left(t+\frac{M^2-\tau-\tau_2^\circ}{4t}\right)-M^2\right]-M^2\left(\frac{\tau_1^\circ-\tau_2^\circ}{4t}\right)^2\geq 0\end{aligned} \tag{3.30}$$

При доказательстве основной теоремы было установлено, что функции φ, φ и $\varphi^2 - \varphi^1$ монотонно убывают с возрастанием τ. Условие $\tau_j^\circ \leq \mu^2$ влечет неотрицательность функции φ^1. Следовательно, левая часть неравенства (3.30) монотонно убывает с возрастанием τ. Поэтому неравенство (3.30) достаточно установить при $\tau = 0$. Но тогда ограничение снизу на τ_j° в (I.I4) показывает, что функции φ вычисляются по первой из формул (I.I0). Нетрудно проверить, что функции $\varphi^2(t, \gamma, \tau)$ возрастают с возрастанием γ при рассматриваемых t и τ. Поэтому неравенство (3.30) достаточно доказать при $\gamma_1 = \gamma_2 = 2$. Но тогда левая часть (3.30) будет симметричной функцией от τ_1° и τ_2°. Учитывая свойство монотонности по τ_j°, заключаем, что неравенство (3.30) достаточно доказать при

$$\tau = 0, \quad \gamma_1 = \gamma_2 = 2, \quad \tau_1^\circ = \mu^2, \quad -9\,\frac{M+\mu}{M-2\mu}\,\mu^2 \leq \tau_2^\circ \leq \mu^2$$

При этих значениях параметров неравенство (3.30) примет вид

$$\left[\left(t + \frac{M^2-\mu^2}{4t}\right)\sqrt{4\mu^2 - \tau_2^\circ} + \left(t + \frac{M^2 - \tau_2^\circ}{4t}\right)\sqrt{3}\mu\right]^2 \geq M^2\left(\sqrt{3}\mu + \sqrt{4\mu^2 - \tau_2^\circ}\right)^2 + \frac{M^2(\mu^2 - \tau_2^\circ)^2}{(2M+\mu)\mu} \cdot \frac{4t^2 - (M-\mu)^2}{16t^2};$$

справедливость которого проверяется непосредственно.

В заключение мы выражаем глубокую благодарность Н.Н.Боголюбову за интересные обсуждения и замечания.

Литература

I. M.L.Goldberger Causality Conditions and dispersion relations, Phys.Rev.99(1955),979-

2. L.Schwartz, Theorie des distributions, I-2, Paris, 1950-51.

3. Н.Н.Боголюбов и Д.В.Ширков, Вопросы квантовой теории поля, I,П, УФН, 55 (1955), 149-214; 57 (1955) 1-92.

4. Н.Н.Боголюбов, Б.В.Медведев и М.К.Поливанов, Вопросы теории дисперсионных соотношений, Гостехиздат, 1958 год.

5. Н.Н.Боголюбов и В.С.Владимиров, Об аналитическом продолжении обобщенных функций, Изв. АН СССР, сер.матем., 22 (1958) 15-48.

6. H.J.Bremermann, R.Oehme and J.G.Taylor, A proof of dispersion relations in quantized field theories, Phys.Rev., 109 (1958), 2178-2190.

7. С.Бохнер и У.Т.Мартин, Функции многих комплексных переменных, ИИЛ, 1951.

8. В.С.Владимиров, Об определении области аналитичности, Изв.АН СССР, сер.матем.(в печат

9. H.Lehmann, Analytic properties of scattering amplitudes as functions of momentum transfer, (в печати).

10. F.J.Dyson, Integral representations of causal commutators, Phys.Rev.,110 (1958),1460.

11. M.Gell-Mann, M.L.Goldberger and W.E.Thirring, Use of Causality Conditions in Quantum Theory, Phys.Rev., 95 (1954), 1612-1627.

12. Н.Н.Боголюбов и Д.В.Ширков, Дисперсионные соотношения для комптоновского рассеяния

на нуклонах, ДАН СССР, II3 (1957) 529-532.
I3. T.Akiba and I.Sato, The dispersion relations for the scattering of Photons from proton, Prog.Theor.Phys., I9 (1958), 93-111.
I4. А.А.Логунов и П.С.Исаев, К теории дисперсионных соотношений для рассеяния γ-квантов на нуклонах, Nuovo Cimento, (1958) (в печати).
I5. А.А.Логунов, Дисперсионные соотношения для виртуальных процессов, ДАН СССР, II7 (1957) 792.
I6. А.А.Логунов и Б.М.Степанов, Дисперсионные соотношения для реакций фоторождения π-мезонов, ДАН СССР, II0 (1956) 368-370.
I7. А.А.Логунов, Л.Д.Соловьев и А.Н.Тавхелидзе, Photoproduction processes and dispersion relations, Nuclear Physics, 4 (1957), 427-452.
I8. E.Corinaldesi, Dispersion relations for photoproduction of mesons, Nuovo Cim.lY(1956) 1384.
I9. G.Chew, M.L.Goldberger, F.Low and Y.Nambu, Relativistic Dispersion Relation Approach to Photomeson Production, Phys.Rev., I06 (1957), I345-I355.
20. А.А.Логунов, К теории дисперсионных соотношений для виртуальных процессов, Nuclear Physics, I958 год (в печати).
2I. S.Fubini, Y.Nambu and V.Wataghin, Dispersion Theory treatment of pion production in electron-nucleon collisions, Phys.Rev., 111 (I958), 329-336.
22. R.Jost and H.Lehmann, Integral-Darstellung kausaler Kommutatoren, Nuovo Cimento, Y (I957), I598-I6I0.
23. Н.Н.Боголюбов и В.С.Владимиров, Одна теорема об аналитическом продолжении обобщенных функций, Научные доклады высшей школы, 3 (I958).
24. R.Oehme and J.G.Taylor, Proof of Dispersion Relations for the Production of Pions by Real and Virtual Photons and for Related Processes, 1958 (preprint).
25. Е.Т.Уиттекер и Г.Н.Ватсон, Курс современного анализа, Гостехиздат, I934, гл.I5.

Работа поступила в издательский отдел I ноября I958 г.