ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р-2569

П.Н. Боголюбов

О МАГНИТНОМ МОМЕНТЕ ДИРАКОВСКОЙ ЧАСТИЦЫ В ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЯМЕ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1966

Р-2569

П.Н. Боголюбов

О МАГНИТНОМ МОМЕНТЕ ДИРАКОВСКОЙ ЧАСТИЦЫ В ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЯМЕ

В работе [1] был вычислен магнитный момент дираковской частицы в сильном скалярном поле. Авторы выбрали потенциал в следующем виде:

$$V(r) = \begin{cases} 0\,, & r > r_o \\ -M+a\,, & r < r_o \end{cases}$$

и показали, что магнитный момент для связанного состояния может усилиться и стать обратно пропорциональным не массе частицы, а энергии связанного состояния. В работе [2] обращено внимание на некоторую, так сказать, неустойчивость этого результата. Липкин и Тавхелидзе [2] показали, что такой эффект усиления магнитного момента имеется у дираковской частицы в скалярном поле и отсутствует в векторном.

Целью настоящей работы является рассмотрение вопроса о том, насколько устойчив результат работы [1] по отношению к выбору той или иной формы скалярного потенциала.

Рассмотрим задачу о вычислении магнитного момента дираковской частицы в потенциальной яме произвольной формы. Уравнение Дирака будет:

$$\begin{gathered} \{ L - U(r) \} \psi = 0 \\ L = i \sum_{\nu} \gamma_{\nu} \left(\frac{\partial}{\partial x_{\nu}} + e A_{\nu} \right) \\ U(r) = M + V(r)\,. \end{gathered} \tag{1}$$

Рассмотрим сначала случай отсутствия внешнего поля A. Предположим, что уравнение (1) имеет связанные состояния. Допустим далее, что состояние с наименьшей энергией будет S -состоянием, т.е. что его полный угловой момент равен нулю. Тогда

$$\psi = \begin{vmatrix} \phi(r)\, \chi_j \\ g(r)\, (\vec\sigma\, \vec r)\, \chi_j \end{vmatrix} e^{-iEt} \quad ; \qquad \chi_j = \begin{vmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{vmatrix} ,$$

где $\phi(r)$, $g(r)$ – нормируемые функции r .

Включим малое постоянное магнитное поле H , характеризуемое векторным потенциалом

$$A_1 = \tfrac{1}{2} H_{x_2} \;;\quad A_2 = -\tfrac{1}{2} H_{x_1}\;;\qquad A_3 = 0$$

и найдем приращение δE собственного значения энергии E, обусловленное этим полем. Для этого удобно квадрировать исходное уравнение, записав его в виде

$$\{ L + U \}\{ L - U \}\psi = 0 .$$

Раскрывая, получим:

$$\{ E^2 - p^2 - U^2 - i\gamma_0 \rho \frac{U'(r)}{r} \sum_{\nu=1}^{3} \sigma_\nu x_\nu +$$

$$+ e i H \left(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right) + e\sigma_z H \}\psi = 0 .$$

Положим $E = E_0 + \delta E$, $\psi = \psi_{(0)} + \delta\psi$ и, оставляя лишь члены первого порядка малости по отношению к полю, имеем:

$$\{ E^2 - p^2 - U^2 - i\gamma_0 \rho \frac{U'(r)}{r} \sum_{\nu=1}^{3} \sigma_\nu x_\nu \} \delta\psi +$$

$$+ \{ 2E_0 \delta E + e i H \left(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right) + e\sigma_z H \}\psi_{(0)} = 0 .$$

Отсюда видно, что

$$\delta E = -\frac{e}{2E_0} H \frac{\int \overset{+}{\psi}_0 (\bar r) \{ i \left(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right) + \sigma_z \} \psi_0 (\bar r)\, d\bar r}{\int \overset{+}{\psi}_0 (\bar r)\, \psi_0 (\bar r)\, d\bar r}$$

и для магнитного момента в рассматриваемом случае получаем следующую формулу:

$$\mu = \frac{e}{2E} \{ 1 - 1/3 < 1 - \gamma_0 > \} ,$$

где

$$< A > = \int \overset{+}{\psi} (\bar r)\, A\, \psi (\bar r)\, d\bar r ,$$

причем интеграция также учитывает суммирование по спиновым индексам. Это выражение для магнитного момента можно представить в другой форме, а именно, исходя из соотношения

$$\int \overset{+}{\psi} (\bar r) (\sigma \bar M) \psi (\bar r)\, d\bar r = -2 \int \bar r^2 g^2(\bar r)\, d\bar r =$$

$$= -\int \overset{+}{\psi} (r) (1 - \gamma_0) \psi (\bar r)\, d\bar r ,$$

получим

$$< 1 - \gamma_0 > = -< \sigma \bar M > .$$

Окончательно выражение для магнитного момента запишем в виде:

$$\mu = \frac{e}{2E} \{ 1 - 1/3 < 1 - \gamma_0 > \} = \frac{e}{2E} \{ 1 + 1/3 < \sigma \bar M > \} .$$

Для нерелятивистского движения магнитный момент будет просто $\frac{e}{2E}$. Интересно отметить, что отличие μ от $\frac{e}{2E}$ обусловлено членом $<\sigma \bar M>$, характеризующим связь спин-орбита.

Представляет интерес рассмотрение этой задачи и для случая псевдоскалярного потенциала. Уравнение Дирака для этого случая будет иметь вид:

$$(\hat\partial + M + \rho V) \psi = 0 \;; \qquad \rho^2 = 1 .$$

Квадрируем это уравнение

$$(\hat\partial + M + \rho V)(\hat\partial - M + \rho V) \psi = 0$$

и, проделав вычисления, аналогичные прежним, получим:

$$\{ E^2 - \bar p^2 + V^2 - M^2 - \rho i \sum_\nu \gamma_\nu \frac{\partial v}{\partial x_\nu} + e i H \left(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right) + e\sigma_z H \}\psi = 0 .$$

Отсюда можно было бы получить интересующий нас результат, действуя описанным ранее способом. Но здесь имеет смысл для упрощения получить магнитный момент в пределе большой массы частицы. Обозначим $U = V^2 - M^2$. Получим:

$$V = M \sqrt{1 + \frac{U}{M^2}} = M + \frac{U}{2M} + f\left(\frac{1}{M^3}\right) .$$

Тогда в пределе при большом M и конечном U уравнение упрощается и принимает вид:

$$\{ E^2 - p^2 + U(r) + e i H \left(y \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y} \right) + e\sigma_z H \}\psi = 0 .$$

Можно получить условие для ψ, подставив разложение $V = M + \frac{U}{2M}$ в исходное уравнение и разделив на M. В пределе для большого M $(\rho - 1)\psi = 0$, т.е. $\psi = \psi_+ = \psi_-$, и мы можем далее рассматривать однокомпонентную волновую функцию. Функцию ϕ невозмущенного уравнения

$$(E^2 - p^2 + U(r))\, \phi = 0$$

можно представить в виде $\phi = f(\bar r)\, \chi_\sigma$, поэтому, включая слабое электромагнитное поле и вычислив в первом порядке, получим: $2E\delta E = \frac{\int \phi e \sigma_z H \phi\, d\bar r}{\int \phi \phi\, d\bar r}$.

Магнитный момент для случая псевдоскалярного потенциала будет просто $\mu = \frac{e}{2E}$.

Литература

1. Н.Н. Боголюбов, Б.В. Струминский, А.Н. Тавхелидзе. Препринт ОИЯИ Д-1968, Дубна 1965.

2. H.I. Lipkin, A. Tavkhelidze. Preprint ICTP, IC/65/54, Trieste, 1965.

Рукопись поступила в издательский отдел
2 февраля 1966 г.