ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р-2567

И. Н. Михайлов, Р. В. Джолос

ОДИН МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ НУКЛОН-ФОНОННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1966

P-2567

И. Н. Михайлов, Р. В. Джолос

ОДИН МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ НУКЛОН-ФОНОННОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Направлено в Acta Physica Polonica

1. В в е д е н и е

В данной работе предложен метод решения задач, подобных тем, которые возникают, например, в ядерной физике при рассмотрении низколежащих возбужденных состояний (в сферических ядрах). Эти состояния имеют коллективный характер, и они возникают из основного путем возбуждения "фононов" – колебаний поверхности или плотности ядра:

$$\Psi_{\{\ldots\nu\ldots\}} = \prod_{\nu} (b_{\nu}^{+})^{k_{\nu}} \Psi_{o} . \tag{1.1}$$

В формуле (1) $\Psi_o , \Psi_{\{\ldots\nu\ldots\}}$ – функции основного и возбужденного состояний, $b_{\nu}^{+}(b_{\nu})$ – операторы рождения (поглощения) фононов, удовлетворяющие коммутационным соотношениям Бозе

$$[b_{\nu} , b_{\nu'}^{+}] = \delta_{\nu,\nu'} ,$$
$$[b_{\nu} , b_{\nu'}] = [b_{\nu}^{+} , b_{\nu'}^{+}] = 0. \tag{2.1}$$

Операторы b_{ν} , b_{ν}^{+} коммутируют с фермиевскими операторами a_i , a_i^{+} , которые определяют другую (более жесткую) "ветвь возбуждений"

$$\Psi_{\{\ldots i\ldots\}} = \prod_{i} a_i^{+} \Psi_o . \tag{3.1}$$

Полный набор состояний образуется возбуждением всевозможных "квазичастичных" конфигураций и некоторого числа фононов, т.е. строится из функций вида:

$$\Psi_{\{\ldots\nu\ldots i\ldots\}} = \prod_{\nu} (b_{\nu}^{+})^{k_{\nu}} \prod_{i} a_i^{+} \Psi_o . \tag{4.1}$$

Выражения (4.1) могут приближенно описывать стационарные состояния ядер, если характеристики фононов и квазичастичных возбуждений являются общими для многих состояний большого числа ядер, т.е. если гамильтониан системы имеет вид:

$$H_o = \sum_i E_i a_i^{+} a_i + \sum_{\nu} \hbar \omega_{\nu} b_{\nu}^{+} b_{\nu} + E_o . \tag{5.1}$$

Для реальных ядер и реальных фононов гамильтониан (5.1) является очень плохим приближением. Уже давно стало ясно, что взаимодействием фононов и нуклонов в ядрах пренебрегать нельзя (см.[1]).

В работе[2] проведен подробный анализ квадрупольных колебаний в сферических ядрах, также свидетельствующий о большой величине эффектов, связанных с нуклон-фононным взаимодействием.

Взаимодействие коллективных и одночастичных степеней свободы можно описать, введя в гамильтониан системы член взаимодействия[3]

$$H_{int} = \sum_{i,j;\nu} \gamma_{ij,\nu} \; a_i^+ a_j b_\nu + h.c., \tag{6.1}$$

где коэффициенты $\gamma_{ij,\nu}$ удовлетворяют некоторым правилам отбора, определяемым квантовыми характеристиками одночастичных уровней i, j, а также спином и четностью фонона[x)].

Математическая структура возникающей при этом задачи оказывается чрезвычайно сложной. Методы анализа, известные из теории поля[6] и из теории сверхпроводимости[7], не позволяют исследовать задачу с достаточной полнотой. Нам кажется, что метод, к изложению которого мы переходим, может оказаться полезным для анализа эффектов взаимодействия фононов и нуклонов.

2. Монопольный фонон, связывающий состояния двух вырожденных уровней

В этом разделе будет проведено подробное исследование системы, гамильтониан которой имеет вид:

$$\begin{aligned} H = {} & E_1 \sum_{m=-j}^{j} a_{1m}^+ a_{1m} + E_2 \sum_{m=-j}^{j} a_{2m}^+ a_{2m} + \hbar\omega b^+ b + \\ & + \sum_m (\gamma_0 a_{1m}^+ a_{1m} + \tilde{\tilde{\gamma}}_0 a_{2m}^+ a_{2m})(b^+ + b) + \\ & + \gamma_1 \sum_m (a_{1m}^+ a_{2m} + a_{2m}^+ a_{1m})(b^+ + b) = H_0 + H_1 + H_2 . \end{aligned} \tag{1.2}$$

---

x) Введение операторов b, b^+, точно удовлетворяющих условиям коммутации (Бозе) между собой и с операторами a, a^+, приводит к появлению лишних степеней свободы у системы. Вопросы, связанные с этим, можно обойти, считая, что фононный оператор b^+ выражается суперпозицией большого числа пар $a_i^+ a_j^+$, а коммутационные соотношения – приближенными[4]. Точность такого приближения оказывается связанной с ограничениями, налагаемыми принципом Паули, на размещение квазичастиц в основном состоянии ядра[5]. Принцип Паули также приводит к эффектам ангармоничности. В данной методической работе относительная важность каждого из этих эффектов обсуждаться не будет.

Такой гамильтониан описывает нуклоны в незаполненной оболочке сферического ядра, взаимодействующие со скалярным (псевдоскалярным) фононом, причем взаимодействие связывает состояния, принадлежащие только двум оболочкам (имеющие одинаковые значения магнитного квантового числа). Очевидно, что между четностями (π) связанных фононом состояний должны быть следующие соотношения:

$$\pi_1 = \pi_2 \qquad L_1 = L_2,\ L_2 \pm 2, \qquad \text{и т.д,}$$

если фонон скалярен ($\pi = +1$)

$$\pi_1 = -\pi_2 \qquad L_1 = L_2 \pm 1,\ \ L_2 + 3 \qquad \text{и т.д.,}$$

если фонон псевдоскалярен ($\pi = -1$).

Главные квантовые числа состояний, связываемых скалярным фононом, должны либо совпадать, либо отличаться по крайней мере на две единицы. В этом случае есть все основания пренебрегать членом H_2 гамильтониана. Из приведенных рассуждений следует, что один из членов, описывающих взаимодействие в гамильтониане (1.2), является лишним; в представляющих физический интерес задачах может появиться либо H_1 (скалярный фонон), либо H_2 (псевдоскалярный фонон). Первая возможность ($\gamma_1 = 0$) приводит к задаче, которую можно решить, введя каноническое преобразование

$$U = e^S$$

$$S = -\sum_m (\gamma_0 a_{1m}^+ a_{1m} + \tilde{\tilde{\gamma}}_0 a_{2m}^+ a_{2m})(b^+ - b) = \sum_m (S_m + \tilde{\tilde{S}}_m) \tag{2.2}$$

от операторов a, b к операторам квазичастиц α, и перенормированных фононов β:

$$\begin{aligned} \alpha_m &= e^{-S} a_m e^{S} = e^{-S_m} a_m e^{S_m} \\ \beta &= e^{-S} b e^{S} = b + \sum_m (\gamma_0 a_{1m}^+ a_{1m} + \tilde{\tilde{\gamma}}_0 a_{2m}^+ a_{2m}). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Записанный в терминах операторов α, β (при $H_2 = 0$) гамильтониан принимает вид:

$$\begin{aligned} H = {} & E_1 \sum_m \alpha_{1m}^+ \alpha_{1m} + E_2 \sum_m \alpha_{2m}^+ \alpha_{2m} - \\ & - \frac{1}{\hbar\omega} \Big[\sum_m \{ \gamma_0 \alpha_{1m}^+ \alpha_{1m} + \tilde{\tilde{\gamma}}_0 \alpha_{2m}^+ \alpha_{2m} \} \Big]^2 + \hbar\omega \beta^+ \beta \end{aligned} \tag{4.2}$$

и описывает систему взаимодействующих между собой фермионов не связанных с квазифононами, частота которых равна ω. Унитарное преобразование, рассмотренное выше, является частным случаем приведенного в[6]. С помощью этого унитарного преобразования легко вычислить функции Грина системы, которые определяются формулами, аналогичными формулам из работы[3].

Перейдем к рассмотрению второй возможности ($H_1=0$). Гамильтониан системы имеет вид:

$$H = E_1 \sum_{m=-j}^{j} a^+_{1m} a_{1m} + E_2 \sum_{m=-j}^{j} a^+_{2m} a_{2m} + \hbar\omega b^+ b + \gamma(b + b^+) \sum_m (a^+_{2m} a_{1m} + a^+_{1m} a_{2m}). \qquad (1',2)$$

Несмотря на видимую простоту задачи, ее аналитическое решение отсутствует. Гамильтониан обладает многочисленными свойствами инвариантности. Он коммутирует с операторами числа фермионов, имеющих фиксированное магнитное квантовое число m

$$\hat{n}_m = a^+_{1m} a_{1m} + a^+_{2m} a_{2m}, \qquad (5,2)$$

благодаря чему квантовые числа этих операторов являются интегралами движения. Далее, гамильтониан инвариантен относительно любого, унитарного преобразования U операторов a_{1m} (a_{2m})

$$a_1 \to U a_1 U^{-1} \qquad a_2 \to U a_2 U^{-1}. \qquad (6,2)$$

Введем оператор seniority

$$\hat{\sigma}_m = ½(1 - (-1)^{\hat{n}_m}), \qquad (7,2)$$

собственные числа которого равны 0 ($n_m = 0,2$) 1 ($n_m = 1$).

Состояние системы характеризуется $2j + 1$ числами n_m:

$$H \Psi_{\{n_m\}} = E_{\{n_m\}} \Psi_{\{n_m\}}, \qquad (8,2)$$

где

$$E_{\{n_m\}} = \frac{E_1 + E_2}{2} N + \mathcal{E}_{\{n_m\}} \qquad (9,2)$$

$$N = \sum_{m=-j}^{j} n_m, \qquad (10,2)$$

а $\mathcal{E}_{\{n_m\}}$ зависит только от величины

$$\sigma = \sum_{m=-j}^{j} \sigma_m. \qquad (11,2)$$

При $\sigma = 0$ $\mathcal{E} = \hbar\omega n$, где n – целое число, равное числу квантов в системе.

Простейший нетривиальный случай возникает при нечетном числе нуклонов N, если $\sigma = \sigma_{m_0} = 1$. Уравнение Шредингера (8,2) в этом случае сводится к уравнению для одного неспаренного нуклона, который из-за взаимодействия с фононом имеет

конечную вероятность оказаться на одном из двух уровней с фиксированным m. Волновая функция системы имеет вид:

$$\Psi = (a^+_{m} F(b^+) + a^+_{2m} \Phi(b^+)) \prod_{m' \neq m} (a^+_{1m'} a^+_{2m'}) |0\rangle, \qquad (12,2)$$

где произведение содержит $\frac{N-1}{2}$ пар операторов $a^+_{1m_1} a^+_{2m_1}$, а функции F и Φ обозначают ряды

$$F = \sum_n f_n (b^+)^n, \qquad \Phi = \sum_n \phi_n (b^+)^n. \qquad (13,2)$$

Коэффициенты F и Φ удовлетворяют алгебраическим уравнениям, следующим из уравнения Шредингера:

$$[-(\mathcal{E} + \epsilon) + b^+ b] F + \gamma(b^+ + b)\Phi = 0$$
$$[-(\mathcal{E} - \epsilon) + b^+ b] \Phi + \gamma(b^+ + b) F = 0, \qquad (14,2)$$

и условию нормировки

$$\langle \Psi | \Psi \rangle = \sum_n n! \, (|f_n|^2 + |\phi_n|^2) = 1. \qquad (15,2)$$

Записывая уравнения (14,2), мы определили масштаб измерения энергии так, чтобы $\hbar\omega = 1$ и ввели обозначение $2\epsilon = E_2 - E_1$. Величина $\mathcal{E}$ связана с энергией системы E соотношением (9,2).

Уравнения для коэффициентов f_n, ϕ_n имеют вид:

$$[-(\mathcal{E} + \epsilon) + n] f_n + \gamma[(n+1)\phi_{n+1} + \phi_{n-1}] = 0$$
$$[-(\mathcal{E} - \epsilon) + n] \phi_n + \gamma[(n+1) f_{n+1} + f_{n-1}] = 0. \qquad (16,2)$$

а) Слабая связь. Теория возмущений

Если $\gamma \ll \epsilon$ или $\gamma \ll \omega\hbar = 1$ систему уравнений (16,2) можно исследовать методами теорий возмущений. Функции нулевого приближения описывают фермион на верхнем (+) или нижнем (−) уровне и n_0 свободных фононов. Коэффициенты f_n, ϕ_n (нормированных функций) равны

$$f^{(0)}_n(n_0-) = \frac{1}{(n!)^{1/2}} \delta_{n,n_0} \qquad \phi^{(0)}_n(n_0-) = 0$$
$$\mathcal{E}^{(0)}(n_0-) = -\epsilon + n_0$$
$$f^{(0)}_n(n_0+) = 0 \qquad \phi^{(0)}_n(n_0+) = \frac{1}{(n!)^{1/2}} \delta_{n,n_0} \qquad (17,2)$$
$$\mathcal{E}^{(0)}(n_0+) = \epsilon + n_0.$$

Легко убедиться, что поправка к энергии возникает только во втором приближении по γ

$$\mathcal{E}^{(2)}(n_0-)=-\frac{\gamma^2}{2\epsilon+1}-\frac{4\epsilon\gamma^2}{4\epsilon^2-1}n_0,$$
$$\mathcal{E}^{(2)}(n_0+)=\frac{\gamma^2}{2\epsilon-1}+\frac{4\epsilon\gamma^2}{4\epsilon^2-1}n_0, \qquad (18.2)$$

так что в этом приближении спектр фононных состояний остается эквидистантным, но частота колебаний перенормируется и становится разной для двух состояний с seniority I.

Формулы (18.2) справедливы, если отсутствует резонанс: $2\epsilon \neq \hbar\omega \equiv 1$. Они показывают также, что применимость теории возмущений нарушается, если n_0 становится большим.

В первом порядке по γ единственными не равными нулю коэффициентами являются

$$\phi^{(1)}_{n_0-1}(n_0-)=-\frac{\gamma}{2\epsilon-1}\frac{n_0}{(n_0!)^{1/2}}\ ;\quad \phi^{(1)}_{n_0+1}(n_0-)=-\frac{\gamma}{2\epsilon+1}\frac{1}{(n_0!)^{1/2}} \qquad (19.2)$$

для состояний нижней колебательной серии

$$f^{(1)}_{n_0-1}(n_0+)=\frac{\gamma}{2\epsilon+1}\frac{n_0}{(n_0!)^{1/2}}\ ;\quad f^{(1)}_{n_0+1}(n_0+)=\frac{\gamma}{2\epsilon-1}\frac{1}{(n_0!)^{1/2}} \qquad (19'.2)$$

для состояний верхней колебательной серии.

б) Общий случай. Метод производящих функций

При произвольном соотношении между константами ϵ, $\gamma\,(\hbar\omega=1)$ решение уравнения Шредингера приводит к диагонализации бесконечной матрицы, вид которой определяется уравнениями (16). Сами уравнения (16) можно рассматривать как рекурентные соотношения для определения коэффициентов f_n, ϕ_n при $n\geq 1$ по первым двум (f_0,ϕ_0). Набор чисел f_n, ϕ_n, получающихся из рекурентных соотношений, можно найти при любом, взятом наугад значении энергии $\mathcal{E}$. Однако только в том случае, если $\mathcal{E}$ совпадает с одним из собственных значений $\mathcal{E}_n$, существуют ряды $\sum\limits_n n!(|f_n|^2+|\phi_n|^2)$, определяющие норму волновой функции системы. Для аналитического исследования таких числовых рядов удобно ввести производящие функции

$$F(z)=\sum_n f_n z^n,$$
$$\Phi(z)=\sum_n \phi_n z^n, \qquad (20.2)$$

определив их как функции комплексного переменного z. Аналитические свойства этих функций будут изучены в данном разделе. Ниже будет показано, что производящие функции представляют удобный аппарат как для изучения общих свойств решения задачи взаимодействующих нуклонов и фононов, так и для численных расчетов энергии и определения волновых функций системы, в случаях, когда аналитическое исследование невозможно довести до конца.

Сложив уравнения (16.2) для разных n, умноженные на z^n, легко убедиться, что функции F и Φ удовлетворяют дифференциальным уравнениям[x)]

$$\left[-(\mathcal{E}+\epsilon)+z\frac{d}{dz}\right]F(z)+\gamma\left(\frac{d}{dz}+z\right)\Phi(z)=0$$
$$\left[-(\mathcal{E}-\epsilon)+z\frac{d}{dz}\right]\Phi(z)+\gamma\left(\frac{d}{dz}+z\right)F(z)=0. \qquad (21.2)$$

Определим, как формулируется проблема отыскания собственных значений в терминах производящих функций. Волновые функции состояний системы должны обладать свойством нормируемости (15.2), а также удовлетворять неравенству Буняковского-Шварца, которое выражается следующим образом. Пусть

$$\zeta=\zeta^{(1)}a^+_{1m}|0>+\zeta^{(2)}a^+_{2m}|0>,$$
$$\zeta^{(1)}=\sum_n \zeta^{(1)}_n(b^+)^n, \qquad (22.2)$$

обозначает произвольное нормированное состояние, т.е. такое, что

$$\sum_n(|\zeta^{(1)}_n|^2+|\zeta^{(2)}_n|^2)\,n!=1. \qquad (23.2)$$

Тогда нормированная волновая функция системы Ψ, определенная формулой (12.2), должна удовлетворять условию:

$$|<\zeta^{(1)}|F>+<\zeta^{(2)}|\phi>|=$$
$$=|\sum_n n!\,(\zeta^{*(1)}_n f_n+\zeta^{*(2)}_n\zeta_n)|\leq 1. \qquad (24.2)$$

Выберем ζ следующим образом:

$$\zeta^{(1)}_n=e^{-\frac{|z|^2}{2}}\frac{z^{*n}}{n!}\quad(<\zeta|\zeta>=1)$$
$$\zeta^{(2)}_n\equiv 0. \qquad (25.2)$$

x) Эти уравнения получаются из (16.2) формальной заменой $b\to\frac{d}{dz}$, $b^+\to z$. Операторы z, $\frac{d}{dz}$, определенные в пространстве функций комплексного переменного аналитических в некоторой области G, обладают всеми свойствами операторов поля фононов b, b^+. Условие $\frac{d}{dz}Z_0(z)=0$, определяющее "вакуум", дает $Z_0=1$.

При таком выборе ζ условие (24.2) приводит к неравенству

$$|F(z)| \le e^{\frac{|z|^2}{2}}, \qquad (26.2)$$

показывающему, что функция $F(z)$ ограничена в любой конечной области z. Взяв такую пробную функцию ζ, у которой

$$\zeta_n^{(2)}=0, \qquad \zeta_0^{(1)}=0=\dots=\zeta_{N-1}^{(1)}, \qquad \zeta_n^{(1)}=e^{-\frac{|z|^2}{2}}\frac{z^{*\,n-N}}{(n-N)!}$$

воспользовавшись вновь условием (24.2), можно написать условие ограниченности N-ой производной функции $F(z)$

$$\left|\frac{d^N F(z)}{dz^N}\right| \le [N!\, L_N(-|z|^2)\, e^{|z|^2}]^{1/2}, \qquad (27.2)$$

где $L(\xi)$ – полином Лягерра N-го порядка

$$L_N(\xi)=\frac{1}{N!}\, e^{\xi}\, \frac{d^{(N)}}{d\xi^N}\, \xi^N e^{-\xi}.$$

Полагая $\xi^{(1)}=0$ и выбирая пробные функции $\xi^{(2)}$ по аналогии с тем, как это было сделано ранее, легко убедиться в справедливости таких же неравенств для функции $\Phi(z)$.

Легко показать (см. Приложение 1), что функции, удовлетворяющие условиям (26.2), (27.2), должны быть целыми функциями комплексной переменной z, т.е. что они не могут иметь особенностей, расположенных в конечных точках плоскости z.

Исследование свойств целых решений уравнений (21.2) показывает (см. Приложение 2), что ряды $\sum_n n!|\phi_n|^2$, $\sum_n n!|f_n|^2$ с коэффициентами ϕ_n, f_n, определенными формулами (20.2), сходятся.

Таким образом, задача определения полной системы собственных функций (12.2) свелась к отысканию всех решений дифференциальных уравнений (21.2), выражающихся целыми функциями x). Граничные условия, которым должны удовлетворять решения, можно установить, рассмотрев несколько подробнее свойства симметрии гамильтониана (1').

---

x) В сноске к формуле (21.2) определена зависимость от z производящей функции $Z_o(z)=\mathrm{const}$ в состоянии без фононов. Состояние с фиксированным числом фононов (n) в терминах операторов b^+, b удовлетворяет уравнению

$$b^+ b\, \phi = n\phi.$$

Соответствующая производящая функция $\phi(z)$ удовлетворяет уравнению

$$z\frac{d}{dz}\phi = n\phi,$$

отсюда следует

$$\phi = c z^n.$$

Условие аналитичности функции означает, что n – любое целое положительное число, и определяет, таким образом, все состояния системы в этом простом случае.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что гамильтониан (1') инвариантен относительно преобразования $U_0 H U_0^{-1}$ x), где

$$U_0=e^{iS_0} \qquad S_0=\frac{\pi}{2}(a^+_{1m}a_{1m}-a^+_{2m}a_{2m})+\pi b^+ b. \qquad (28.2)$$

Следовательно, собственная функция системы может быть подчинена условию

$$U_0\Psi=\xi\Psi. \qquad (29.2)$$

Подставляя в (29.2) выражение для Ψ, определяемое формулой (12.2), найдем

$$F(-b^+)=-i\xi F(b^+)$$
$$\Phi(-b^+)=i\xi\Phi(b^+). \qquad (30.2)$$

Для рассматриваемого случая (seniority $\sigma_m=1$)

$$\xi^2=-1, \qquad \xi=\pm i. \qquad (31.2)$$

Используя формулы (30.2), (31.2) и определения производящих функций (13.2), (20.2), найдем

$$F(-z)=\pm F(z)$$
$$\Phi(-z)=\mp\Phi(z). \qquad (32.2)$$

Оказывается удобным ввести линейные комбинации функций F и Φ

$$X=F+\Phi \qquad Y=F-\Phi, \qquad (33.2)$$

которые в силу условий (32.2) связаны соотношением

$$X(-z)=\pm Y(z). \qquad (34.2)$$

Уравнения (21.2) в терминах новых функций имеют вид:

$$\left[(z+\gamma)\frac{d}{dz}-(\mathcal{E}-\gamma z)\right]X(z)=\mp\epsilon X(-z) \qquad (35.2)$$

или

$$\left[(z-\gamma)\frac{d}{dz}-(\mathcal{E}+\gamma z)\right]Y(z)=\mp\epsilon Y(-z). \qquad (35'.2)$$

Проблема определения собственных значений свелась, таким образом, к отысканию целых решений дифференциальных уравнений первого порядка (35.2) или (35'.2).

---

x) Это преобразование эквивалентно замене

$$a^+_{1m}\to i a^+_{1m}, \quad a^+_{2m}\to -i a^+_{2m}, \quad b^+\to -b^+$$

$$a_{1m}\to -i a_{1m}, \quad a_{2m}\to i a_{2m}, \quad b\to -b$$

Для отыскания коэффициентов f_n, ϕ_n, определяющих волновую функцию системы, следует вычислить соответствующие производящие функции F, Φ или X:

$$f_n = \frac{1}{2}\frac{1}{n!}\left[\frac{d^{(n)}}{dz^n}\left(X(z) \pm X(-z)\right)\right]_{z=0} \tag{36.2}$$

$$\phi_n = \frac{1}{2}\frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{dz^n}\left(X(z) \mp X(-z)\right)\right]_{z=0}.$$

Норма функции (15.2) может быть представлена в виде

$$I = \left[F^*\left(\frac{d}{dz}\right)F(z) + \Phi^*\left(\frac{d}{dz}\right)\Phi(z)\right]_{z=0} =$$

$$= \left[X^*\left(\frac{d}{dz}\right)X(z)\right]_{z=0} = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{dz}{z} X^*\left(\frac{d}{dz}\right)X(z), \tag{37.2}$$

где контур интегрирования замкнут и обходит точку $z=0$.

3. Частные случаи, допускающие решение

а) Частный случай $\epsilon=0$

Уравнения (35.2) легко интегрируются в частном случае, когда $\epsilon=0$. Решение имеет вид:

$$X = C e^{-\gamma z}(z+\gamma)^{\mathcal{E}+\gamma^2}. \tag{1.3}$$

Условие аналитичности функции приводит к спектру собственных значений

$$\mathcal{E} = -\gamma^2 + n, \tag{2.3}$$

где n - целое положительное число. Норма функции определяется в соответствии с формулой (37.2) и равна

$$|C_n|^2 = \frac{e^{-\gamma^2}}{n!}. \tag{3.3}$$

Конечно, решение задачи в этом случае можно получить и не прибегая к производящим функциям (см. описание метода унитарного преобразования в начале предыдущего раздела), однако разработанный аппарат позволил значительно упростить ее решение. Для вопроса, обсуждаемого в следующем разделе, это упрощение оказывается значительно более существенным.

б) Приближение сильной связи

В рассматриваемой задаче имеются три различные величины с размерностью энергии. Сила связи зависит от соотношений между всеми этими величинами. В данном разделе мы имеем ввиду случай, когда γ и ω сравнимы по величине, а

расстояние между уровнями $\epsilon \ll \hbar\omega = 1$. Мы хотим найти разложения для энергии и для векторов состояний по степеням ϵ. Случаю предельно сильной связи соответствуют уже найденные функции

$$X_n = e^{\frac{\gamma^2}{2}}\frac{1}{(n!)^{1/2}} e^{-\gamma z}(z+\gamma)^n \tag{4.3}$$

и энергии (2.3).

При конечных, но малых ϵ будем искать решение в виде разложения по функциям (4.3)

$$X = \sum_n c_n X_n(z). \tag{5.3}$$

Подставив выражение для $X(z)$ в виде (5) в уравнение (35.2), умножив обе части уравнения на $e^{\gamma z}$, продифференцировав n раз и положив $z=-\gamma$, получим соотношения

$$-(\mathcal{E} - n + \gamma^2)c_n(n!)^{1/2} =$$

$$= \mp\epsilon\sum_{n'} c_{n'}(n'!)^{1/2}\left[\frac{d^n}{dz^n}e^{2\gamma z}(\gamma-z)^{n'}\right]_{z=-\gamma}. \tag{6.3}$$

При $\epsilon \ll 1$ естественно считать, что только один коэффициент c_{n_0} велик ($c_{n_0} \approx 1$) и что энергия $\mathcal{E}$ близка к $n_0-\gamma^2$. Тогда для поправки к энергии первого порядка по ϵ получаем уравнение:

$$c_{n_0}\left\{\mathcal{E} - n_0 + \gamma^2 \pm \epsilon\left[\frac{d^{n_0}}{dz^{n_0}}e^{2\gamma z}(\gamma-z)^{n_0}\right]_{z=-\gamma}\right\} = 0,$$

откуда

$$\mathcal{E} = -\gamma^2 + n_0 \mp \epsilon(-)^{n_0}e^{-2\gamma^2}L_{n_0}(4\gamma^2). \tag{7.3}$$

L_{n_0} - полином Лагерра порядка n_0:

$$L_0(x) = 1; \quad L_1(x) = 1 - x; \quad L_2(x) = 1 - 2x + \frac{x^2}{2}.$$

Поправка к волновой функции состояния определяется формулами

$$c_{n \neq n_0} = \mp\frac{\epsilon}{n_0-n}\frac{(-1)^n(n!)^{1/2}}{(n_0!)^{1/2}}e^{-2\gamma^2}(2\gamma)^{n_0-n}L_n^{(n_0-n)}(4\gamma^2), \tag{8.3}$$

где L_n^m - присоединенный полином Лагерра.

Анализ аналитических свойств производящей функции, определяемой формулами (5.3), (8.3) для произвольного значения n_0, не представляет затруднений. Так, при $n_0=0$ имеем

$$X(z) = e^{-\frac{\gamma^2}{2}-\gamma z}\left(1 \pm \epsilon\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z+\gamma)^n}{n!}\,\frac{1}{n}(2\gamma)^{-n}(4\gamma^2)^n\right]e^{-2\gamma^2}\right) =$$

$$= e^{-\frac{\gamma^2}{2}-\gamma z}\left(1 \pm \epsilon\, e^{-2\gamma^2}\left[\int_{-\gamma}^{z}\frac{e^{2\gamma(z+\gamma)}-1}{(z+\gamma)}dz\right)\right. \qquad (9.3)$$

функцию, аналитичность которой при конечных z очевидна.

Аналогичным образом можно найти поправки второго и т.д. порядка по ϵ, отправляясь от уравнений (6.3).

в) Резонанс: $2\epsilon = \omega = 1$ (упрощенный вариант модели Ли теории поля)

При $\epsilon = ½$ приближение сильной связи уже должно приводить к существенным ошибкам. В разделе (2.а) было показано, что в этом случае теория возмущений не работает (если разность $|\epsilon - ½|$ сравнима с $|\gamma|$). Тем не менее приближенное решение при $\gamma \ll 1$ можно построить и в этом случае. Характер приближений, которые нужно сделать, виден из формул (19.2) раздела 2а. "Опасные" члены в теории возмущений в этом случае возникают из-за части гамильтониана взаимодействия

$$H = \gamma \sum_m \left(a^+_{2m} a_{1m} b + a^+_{1m} a_{2m} b^+\right), \qquad (10.3)$$

представляющей собой чрезвычайно упрощенный вариант взаимодействия в модели Ли теории поля (см. /6/). Замена гамильтониана взаимодействия в (1.2) выражением (10.3) приводит к следующим изменениям в уравнениях для производящих функций F, Φ:

$$\left[-(\mathcal{E} + \epsilon) + z\frac{d}{dz}\right]F + \gamma z \Phi = 0 \qquad (11.3)$$

$$\left[-(\mathcal{E} - \epsilon) + z\frac{d}{dz}\right]\Phi + \gamma\frac{d}{dz}F = 0 .$$

Из уравнений (11.3) видно, что их решение можно искать в виде[x)]

$$F(z) = f z^n \qquad \Phi(z) = \phi z^{n-1} . \qquad (12.3)$$

Для определения численных коэффициентов f и ϕ имеем уравнения

$$[-(\mathcal{E} + \epsilon) + n] f + \gamma\phi = 0 \qquad (13.3)$$

$$[-(\mathcal{E} - \epsilon) + n - 1]\phi + \gamma n f = 0 .$$

---

x) Легко проверить, что гамильтониан с взаимодействием (10.3) коммутирует с оператором S_o, определенным формулой (28.2). Используя это обстоятельство и выбирая собственную функцию так, чтобы $S_o\Psi = \xi\Psi$, сразу же приходим к формулам (12.3).

Отсюда следует уравнение на собственные значения

$$\begin{vmatrix} -(\mathcal{E}+\epsilon)+n & \gamma \\ n\gamma & -(\mathcal{E}-\epsilon)+n-1 \end{vmatrix} = 0 ,$$

решением которого является

$$\mathcal{E} = n - \frac{1}{2} \pm \sqrt{(\epsilon - \tfrac{1}{2})^2 + n\gamma^2} . \qquad (14.3)$$

4. Заключение

В данной методической работе мы ставили своей целью развить математический аппарат, который, как нам кажется, может быть применен к различным физическим задачам. Для этого была выбрана простейшая модель, описывающая взаимодействие фермионов со скалярным фононом. Здесь мы хотим очень коротко остановиться на физическом содержании разобранной модели.

В ядерной физике в противоположность положению дел с квадрупольными колебаниями, существование которых не вызывает сомнений, ситуация с монопольными коллективными состояниями не ясна. Возбужденные состояния с моментом $J = 0$ с небольшой энергией возбуждения имеются во многих (четно-четных) ядрах, близких к магическим. Так, наличие большого числа уровней 0^+ в области от 6 до 16 Мэв в ядрах O^{16} резко противоречит предсказаниям простой оболочечной модели. Интерпретация нижайшего из этих состояний ($E_{возб}$ = 6,06 Мэв) как однофононного возбуждения (см. /10/) находится, по крайней мере, в качественном соответствии с представлениями о характере остаточных сил межнуклонного взаимодействия и свойств ядерного потенциала. Низколежащие 0^+ состояния существуют и в других ядрах. Однако число нуклонов, играющих эффективную роль в образовании состояния 0^+, оказывается очень малым. Поэтому гамильтониан взаимодействия типа (6.1) может оказаться лишь очень плохим приближением к реальному. Тем не менее нам кажется интересным проследить, нельзя ли существенную часть нуклон-нуклонных корреляций в легких ядрах описать как результат взаимодействия нуклонов с фононами и, в частности, взаимодействием со скалярным фононом.

В заключение авторы выражают благодарность сотрудникам отдела низких энергий, принимавших участие в обсуждении работы и в особенности Л.Г.Заставенко и Е.Б. Бальбуцеву. Один из авторов (М.И.) признателен Е.Бангу (Дания), продолжительные дискуссии с которым послужили хорошим стимулом для работы над изложенными вопросами.

П р и л о ж е н и е

1. Определим радиус сходимости R ряда

$$F(z) = \sum_n f_n z^n , \qquad (1.1)$$

коэффициенты которого удовлетворяют неравенствам (26.2), (27.2). Для этого воспользуемся формулой /10/

$$R = [\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n|}]^{-1} . \qquad (2.1)$$

Имеем

$$|f_n| = \frac{1}{n!} [\frac{d^n}{dz^n} F(z)]_{z=0} < \frac{1}{[n!]^{1/2}} \qquad (3.1)$$

поскольку $L_n(0) = 1$. Следовательно,

$$R \geq [\lim_{n\to\infty} (n!)^{-1/2n}]^{-1} = \lim_{n\to\infty} (n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n})^{1/2n} = \qquad (4.1)$$

$$= \lim_{n\to\infty} n^{1/2} e^{-1/2} (2\pi n)^{\frac{1}{4n}} = \infty .$$

II. Докажем сходимость ряда

$$\sum_n n! |f_n + \phi_n|^2 , \qquad (I.II)$$

который в соответствии с формулами (15.2) и (32.2) определяет норму функции (12.2), причем считаем f_n, ϕ_n коэффициентами ряда Тейлора для целой функции, являющейся решением дифференциальных уравнений (21.2) или (35.2), (35.2). Интегрируя функцию $\frac{X(z)}{2\pi i\, z^{n+1}}$ (см. формулу (32.2)) по окружности радиуса R с центром в точке $z=0$, легко получить следующую оценку для $x_n = f_n + \phi_n$:

$$|x_n| < M(R)\; R^{-n} , \qquad (2.II)$$

где $M(R) = \max|X(z)|$, при $|z|=R$ (см. /11/). Величину $M(R)$ при больших значениях $|z|$ можно определить, воспользовавшись дифференциальным уравнением второго порядка для $X(z)$, эквивалентным уравнениям (21.2), (35.2):

$$X'' + \{\frac{1-\mathcal{E}+\gamma z}{z+\gamma} - \frac{\mathcal{E}+\gamma z}{z-\gamma}\} X' + \{\frac{\mathcal{E}^2 - \epsilon^2 - \gamma^2 z^2 + \gamma(z-\gamma)}{z^2-\gamma^2}\} X = 0 . \qquad (3.II)$$

Это уравнение имеет правильные особые точки при $z = -\gamma$ ($X(z) \approx (z+\gamma)^{\rho}$, $\rho = 0$, $\mathcal{E} + \gamma^2$) и $z = +\gamma$ ($\rho = 0$, $\mathcal{E} + \gamma^2 + 1$), а также существенную особенность при $z = \infty$. Асимптотика решений уравнения (3.II) определяется формулой:

$$X(z) = A e^{\gamma z} z^{\mathcal{E}-1/2} (1 + 0(\frac{1}{z})) . \qquad (4.II)$$

Комбинируя (2.II) и (4.II), получаем

$$|x_n| \leq A \exp(\gamma_R)\; R^{\mathcal{E}-1/2-n} (1 + 0(\frac{1}{R})) . \qquad (5.II)$$

Формула (5.II), справедливая для любых n и R, будет верна, если для $n \gg 1$ положить $R = n$. В этом случае имеем

$$|x_n| \leq A e^{\gamma n} n^{\mathcal{E}-1/2-n} (1 + 0(\frac{1}{n})) \qquad (6.II)$$

Следовательно, ряд (I.II) мажорируется рядом $\sum_n c_n$ с коэффициентами c_n, равными

$$c_n = n! \exp\{2\gamma n\} n^{-2n-1+2\mathcal{E}} (1 + 0(\frac{1}{n})) .$$

Поскольку

$$\frac{c_n}{c_{n-1}} = n e^{2\gamma} n^{-2} (\frac{n}{n-1})^{-2n-3+2\mathcal{E}} (1 + 0(\frac{1}{n})) \underset{n\to\infty}{\to} 0 ,$$

мажорирующий ряд, а вместе с ним и ряд (I.II), сходятся.

Л и т е р а т у р а

1. T.Tamura, Udagawa, Nucl. Phys., 53, 33 (1964).
2. С.Т.Беляев. Ядерная физика, 1, 3 (1965).
3. С.Т.Беляев, В.Г.Зелевинский. Ядерная физика, 1, 13 (1965).
4. A.M.Lane. Nucl. Theory, W.A.Benjamin, INC., 1964. русский перевод готовится к печати.
5. Ken ji Hara. Progr. Theor. Phys. Japan, 32,88 (1964).
6. С.Швебер. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля, стр. 328-358, ИЛ., Москва, 1963.
7. Сборник "Теория сверхпроводимости", Г.Фрелих, "Теория сверхпроводящего состояния", ИЛ, Москва, 1960.
8. F.A.Aizenberg and T.Lauritren. Rev. Mod. Phys., 27, 77 (1955).
9. Ferrel. Phys. Rev., 102, 450 (1955).
10. С.Стоилов. Теория функций комплексного переменного, том. 1., стр.54, ИЛ., Москва, 1962.
11. М.А.А Евграфов. Асимптотические оценки целых функций. Физматгиз, Москва, 1962.

Рукопись поступила в издательский отдел
1 февраля 1966 г.