ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р-2565

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

А.А. Хелашвили

РАССЕЯНИЕ СЛОЖНОЙ ЧАСТИЦЫ НА СИЛОВОМ ЦЕНТРЕ

1966

Р-2565

А.А. Хелашвили

РАССЕЯНИЕ СЛОЖНОЙ ЧАСТИЦЫ НА СИЛОВОМ ЦЕНТРЕ

В последнее время значительно возрос интерес к изучению амплитуд рассеяния трех частиц в рамках теории потенциального рассеяния[1]. Это обусловлено, во-первых, большими успехами дисперсионного подхода в проблеме двух тел, а во-вторых, сама по себе задача трех частиц представляется физически интересной и привлекательной. Имеется надежда, что изучение аналитических свойств трехчастичных амплитуд рассеяния по инвариантным переменным, от которых они зависят, прольет свет на понимание закономерностей в системе многих тел. При изучении таких задач естественно постараться по возможности максимально свести задачу трех частиц к задаче двух частиц, поскольку задача двух частиц изучена достаточно хорошо. Для этой цели применяется как обычный подход с помощью уравнения Липмана-Швингера, так и сравнительно новый и оригинальный подход с помощью уравнений Фаддеева[2].

Общий случай задачи трех частиц довольно сложен, однако задача сравнительно упрощается, когда одна из частиц обладает бесконечно тяжелой массой, т.е. выступает в роли силового центра. Мы рассмотрим именно такой случай, когда на силовом центре рассеивается связанная система двух частиц. Будем считать, что в результате взаимодействия с силовым центром связанная система не разрушается. В таком случае оказывается, что задача сводится к многоканальной задаче рассеяния двух частиц на некотором "обобщенном" потенциале, зависящем от внутреннего движения связанной системы. В § 1 выводится система уравнений для амплитуд рассеяния, а также указан рецепт построения "обобщенного" потенциала. В § 2 построен такой потенциал для частного случая, когда в сложной системе частицы взаимодействуют между собой с юкавским потенциалом.

§ 1. "Обобщенный" потенциал

Пусть частицы 1 и 2 с равными массами m образуют связанную систему благодаря взаимодействию между собой с потенциалом $V_{12}(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|)$. Рассмотрим рассеяние такой системы на третьей частице, которую мы будем считать бесконечно тяжелой. Гамильтониан такой задачи имеет вид (в системе $\hbar = 1$)

$$H(\vec r_1, \vec r_2) = -\frac{1}{2m}\nabla^2_{\vec r_1} - \frac{1}{2m}\nabla^2_{\vec r_2} + V_{12}(|\vec r_1 - \vec r_2|) + V_1(|\vec r_1|) + V_2(|\vec r_2|), \qquad (1)$$

где $V_i(|\vec r_i|)$ – потенциал взаимодействия i -той частицы с полем. Волновая функция удовлетворяет стационарному уравнению Шредингера:

$$H(\vec r_1, \vec r_2)\Psi(\vec r_1, \vec r_2) = E\Psi(\vec r_1, \vec r_2), \qquad (2)$$

где E – полная энергия. Введем координаты центра инерции и относительного движения связанной системы $\vec r = ½(\vec r_1 + \vec r_2)$, $\vec\rho = \vec r_1 - \vec r_2$.

В этих координатах гамильтониан (1) принимает вид:

$$H(\vec r_1, \vec r_2) \equiv H(\vec r, \vec\rho) = -\frac{1}{m}\nabla^2_{\vec\rho} + V(|\vec\rho|) - \frac{1}{4m}\nabla^2_{\vec r} + V_1(|\vec r + \frac{\vec\rho}{2}|) + V_2(|\vec r - \frac{\vec\rho}{2}|). \qquad (3)$$

Тогда часть гамильтониана (3)

$$H_{12}(\vec\rho) = -\frac{1}{m}\nabla^2_{\vec\rho} + V_{12}(|\vec\rho|) \qquad (4)$$

описывает относительное движение сложной системы при отсутствии третьей частицы. Пусть нам известно это относительное движение:

$$[-\frac{1}{m}\nabla^2_{\vec\rho} + V_{12}(|\vec\rho|)]\phi_\alpha(\vec\rho) = \epsilon^\alpha_{12}\phi_\alpha(\vec\rho), \qquad (5)$$

где ϵ^α_{12} – энергия связи в состоянии α | $\epsilon^\alpha_{12} = -|\epsilon^\alpha_{12}| < 0$ | , и предположим, что система собственных функций $\{\phi_\alpha(\vec\rho)\}$ ортонормирована. Тогда, разлагая полную волновую функцию $\Psi(\vec r, \vec\rho)$ по функциям $\phi_\alpha(\vec\rho)$

$$\Psi(\vec r, \vec\rho) = \sum_\alpha F_\alpha(\vec r)\phi_\alpha(\vec\rho), \qquad (6)$$

нетрудно видеть, что для функций $F_\alpha(\vec r)$ получается следующая система уравнений:

$$[-\frac{1}{4m}\nabla^2_{\vec r}\,(E - \epsilon^\alpha_{12})]F_\alpha(\vec r) = -\sum_\beta W_{\beta\alpha}(\vec r)F_\beta(\vec r), \qquad (7)$$

где

$$W_{\beta\alpha}(\vec r) = \int \phi^*_\beta(\vec\rho)\, V_1(|\vec r + \frac{\vec\rho}{2}|)\phi_\alpha(\vec\rho)\, d\vec\rho + \int \phi^*_\beta(\vec\rho)\, V_2(|\vec r - \frac{\vec\rho}{2}|)\, \phi_\alpha(\vec\rho)\, d\vec\rho. \qquad (8)$$

Таким образом, задача сводится к многоканальной задаче рассеяния центра инерции сложной системы на некотором "обобщенном" потенциале (8), который сильно зависит от внутреннего движения связанной системы.

Особенно интересный результат получается, если рассмотреть задачу в импульсном представлении, вводя Фурье-образы:

$$F_\alpha(\vec r) = (2\pi)^{-3/2}\int e^{i\vec p\vec r}\, F_\alpha(\vec p)\, d\vec p, \qquad \phi_\alpha(\vec\rho) = (2\pi)^{-3/2}\int e^{i\vec p\vec r}\, \phi_\alpha(\vec p)\, d\vec p$$

$$W_{\beta\alpha}(\vec r) = (2\pi)^{-3/2}\int e^{i\vec p\vec r}\, W_{\beta\alpha}(\vec p)\, d\vec p.$$

Тогда $F_\alpha(\vec p)$ удовлетворяет системе уравнений:

$$[p^2/4m - (E - \epsilon^\alpha_{12})]F_\alpha(\vec p) = -\sum_\beta \int d\vec k\; W_{\beta\alpha}(\vec p - \vec k)F_\beta(\vec k), \qquad (9)$$

где

$$W_{\beta\alpha}(\vec p - \vec k) = V_1((\vec p - \vec k)^2)\int d\vec q\; \phi^*_\beta(\vec q + \frac{\vec p - \vec k}{2})\phi_\alpha(\vec q) + V_2((\vec p - \vec k)^2)\int d\vec q\; \phi^*_\beta(\vec q - \frac{\vec p - \vec k}{2})\phi_\alpha(\vec q) \qquad (10)$$

и если обе частицы взаимодействуют с внешним полем с одинаковой силой $|V_1 = V_2 = V|$, то

$$W_{\beta\alpha}(\vec p - \vec k) = f_{\beta\alpha}(\vec p - \vec k)\, V((\vec p - \vec k)^2), \qquad (11)$$

где

$$f_{\beta\alpha}(\vec p - \vec k) = \int d\vec q\; \phi^*_\beta(\vec q + \frac{\vec p - \vec k}{2})\phi_\alpha(\vec q) + \int d\vec q\; \phi^*_\beta(\vec q - \frac{\vec p - \vec k}{2})\phi_\alpha(\vec q). \qquad (12)$$

Как видно из результата (10), в "обобщенном" потенциале взаимодействие с внешним полем факторизуется с формфактором сложной системы.

Система уравнений Липмана-Швингера для амплитуд рассеяния имеет вид

$$T_{\beta\alpha}(\vec p', \vec p) = W_{\beta\alpha}(\vec p' - \vec p) + \sum_\gamma \int \frac{d\vec q\; W_{\beta\gamma}(\vec p' - \vec q)\, T_{\gamma\alpha}(\vec q, \vec p)}{\vec q^{\,2}/4m - (E - \epsilon^\gamma_{12})}. \qquad (13)$$

Если рассмотреть ряд теории возмущений для этой системы, то нетрудно видеть, что этот ряд допускает очень наглядную диаграммную интерпретацию (см.рис.1). Единственное отличие от диаграммной техники обычного потенциального рассеяния состоит только в том, что вершинам, вместо "голой" константы связи, будут соответствовать формфакторы $f_{\beta\alpha}(\vec p - \vec k)$, наличие которых отражает тот факт, что связанная система имеет структуру.

Следует заметить, что полученные результаты в рассмотренной задаче являются общими, т.е. система уравнений (13), определение "обобщенного" потенциала (10) не зависят от конкретного вида взаимодействия между частицами, они справедливы для любого локального парного взаимодействия. Когда выбраны потенциалы и известны для них решения двухчастичной проблемы, можно построить "обобщенные" потенциалы, используя определение (10). В дальнейшем подробно разберем случай юкавских потенциалов.

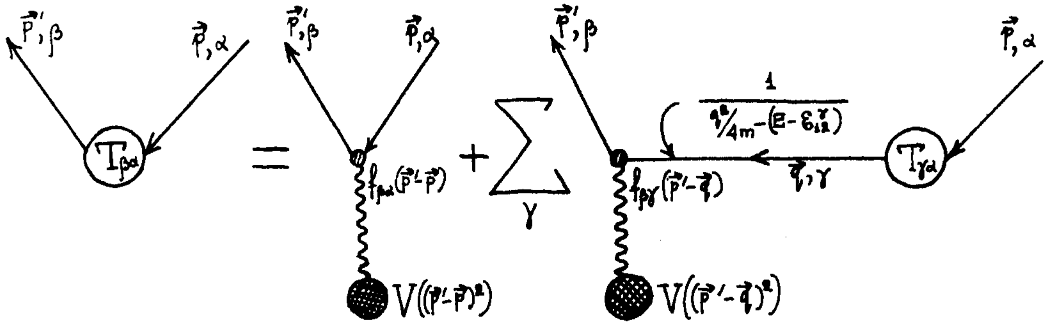

Рис. 1. Диаграммная интерпретация системы уравнений (13) для амплитуд рассеяния

§ 2. Юкавское взаимодействие

Пусть потенциал V_{12} центрально симметричен: $V_{12} = V_{12}(|\vec{\rho}\,|)$. Тогда связанное состояние описывается волновыми функциями вида

$$\phi_{\alpha}(\vec{\rho}\,) = \phi_{n\ell m}(\vec{\rho}) = \frac{u_{n\ell}(\rho)}{\rho}\, Y_{\ell m}\left(\frac{\vec{\rho}}{\rho}\right), \qquad (14)$$

где $\rho = |\vec{\rho}\,|$, а $u_{n\ell}(\rho)$ удовлетворяет радиальному уравнению Шредингера. Нетрудно получить из этого определения вид волновых функций в импульсном пространстве[3]:

$$\phi_{\alpha}(\vec{q}) = \phi_{n\ell m}(\vec{q}\,) = \phi^{n\ell}(q)\, Y_{\ell m}\left(\frac{\vec{q}}{q}\right), \qquad (15)$$

$$\phi_{\beta}(\vec{q} \pm \vec{Q}\,) = \phi_{n\ell' m'}(\vec{q} \pm \vec{Q}\,) = \sum_{\substack{\ell_1 \ell_2 \\ m_1 m_2}} B^{\ell_1 \ell_2 \ell'}_{m_1 m_2 m'}\, Y_{\ell_1 m_1}\left(\frac{\vec{q}}{q}\right) Y^*_{\ell_2 m_2}\left(\mp\frac{\vec{Q}}{Q}\right) \phi^{n\ell'}_{\ell_1 \ell_2}(Q,q), \qquad (16)$$

где

$$B^{\ell_1 \ell_2 \ell'}_{m_1 m_2 m'} = \left[\frac{(2\ell'+1)(2\ell_1+1)(2\ell_2+1)}{4\pi}\right]^{1/2} (-1)^{m_1} \begin{pmatrix} \ell' & \ell_2 & \ell_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell' & \ell_2 & \ell_1 \\ m' & m_2 & -m_1 \end{pmatrix} \qquad (17)$$

$$\phi^{n\ell'}_{\ell_1 \ell_2}(Q,q) = (4\pi)^2\, i^{\ell_1} (-i)^{\ell_2} \int_0^\infty r\,dr\, j_{\ell_1}(qr)\, j_{\ell_2}(Qr)\, u_{n\ell'}(r) \qquad (18)$$

$$\phi^{n\ell}(q) = 4\pi\, i^{\ell} \int_0^\infty r\,dr\, j_{\ell}(qr)\, u_{n\ell}(r) \qquad (19)$$

$$\vec{Q} = \frac{\vec{p} - \vec{k}}{2}, \qquad Q = |\vec{Q}\,| .$$

Тогда

$$\int \phi^*_{\beta}\left(\vec{q} \pm \frac{\vec{p}-\vec{k}}{2}\right) \phi_{\alpha}(\vec{q})\, d\vec{q} = \sum_{\ell_2 m_2} B^{\ell \ell_2 \ell'}_{m m_2 m'}\, Y_{\ell_2 m_2}\left(\mp\frac{\vec{Q}}{Q}\right) \int_0^\infty q^2 dq\, \phi^{*\,n\ell'}_{\ell \ell_2}(Q,q)\, \phi^{n\ell}(q) =$$

$$= \sum_{\ell_2 m_2} (4\pi)^3\, i^{\ell_2} \int_0^\infty r\,dr\, u_{n\ell}(r) \int_0^\infty r'\,dr'\, j_{\ell_2}(Qr')\, u_{n\ell'}(r') \int_0^\infty q^2 dq\, j_{\ell}(qr)\, j_{\ell}(qr')\, B^{\ell \ell_2 \ell'}_{m m_2 m'}\, Y_{\ell_2 m_2}\left(\mp\frac{\vec{Q}}{Q}\right).$$

Последний интеграл равен

$$\int_0^\infty q^2 dq\, j_{\ell}(qr)\, j_{\ell}(qr') = \frac{\pi}{2rr'}\, \delta(r - r') .$$

Поэтому интегрирование по dr' проводится тривиально и мы получаем

$$\int \phi^*_{\beta}(\vec{q} \pm \vec{Q}\,)\, \phi_{\alpha}(\vec{q})\, d\vec{q} =$$
$$= (4\pi)^3 \frac{\pi}{2} \sum_{\ell_2 m_2} i^{\ell_2}\, B^{\ell \ell_2 \ell'}_{m m_2 m'}\, Y_{\ell_2 m_2}\left(\mp\frac{\vec{Q}}{Q}\right) \int_0^\infty dr\, j_{\ell_2}(Qr)\, u_{n\ell}(r)\, u_{n\ell'}(r). \qquad (20)$$

Это выражение справедливо для произвольного центрального потенциала $V_{12}(|\vec{\rho}\,|)$. Рассмотрим теперь частный случай, когда

$$V_{12}(|\vec{\rho}\,|) \equiv V_{12}(\rho) = \int_{\mu_0}^\infty g(\mu)\, \frac{\exp[-\mu\rho]}{\rho}\, d\mu . \qquad (21)$$

Тогда решения радиального уравнения можно записать в следующем спектральном виде[4]

$$u_{n\ell}(\rho) = \int_0^\infty G_{n\ell}(\sigma)\, \exp[-\sigma\rho]\, d\sigma , \qquad (22)$$

где $$G_{n\ell}(\sigma) = (-1)^{\ell} \int_0^\infty \rho_{n\ell}(\gamma) \left[\delta(\sigma-\gamma)\, P_{\ell}\left(\frac{\sigma}{\gamma}\right) + \theta(\sigma-\gamma) \frac{d}{d\sigma} P_{\ell}\left(\frac{\sigma}{\gamma}\right)\right] d\gamma , \qquad (23)$$

а $\rho_{n\ell}(\gamma)$ определяется из интегрального уравнения типа Вольтерра

$$\rho_{n\ell}(\gamma) = N\,\delta(\gamma-\kappa_{n\ell}) + \frac{m}{\gamma^2-\kappa_{n\ell}^2}\int_0^{\gamma-\mu_0} K_\ell(\gamma,\gamma')\,\rho_{n\ell}(\gamma')\,d\gamma', \tag{24}$$

где N – постоянная нормировки, $\kappa_a^2 = m|\epsilon^a|$, ϵ^a – энергия связи состояния a.
Ядро уравнения (24) равно

$$K_\ell(\gamma,\gamma') = \int_{\mu_0}^{\infty} g(\mu)\, G_\ell(\gamma,\gamma';\mu)\,d\mu,$$

где

$$G_\ell(\gamma,\gamma';\mu) = -\frac{\gamma}{\gamma'}\int_0^{\infty} dr\, P_\ell\left(\frac{\gamma}{\gamma'}\right)\theta(\gamma-\gamma')\frac{d}{d\mu}\left[\theta(\gamma-\mu-r)P_\ell\left(\frac{\mu+r}{\gamma}\right)\right].$$

Ясно, что для данного $K_\ell(\gamma,\gamma')$ уравнение (24) имеет однозначное решение для любого значения параметра κ и это решение можно строить с помощью ряда, который будет сходиться при любых μ_0. Используем теперь представление (22) в выражении (20). Имеем:

$$\int_0^\infty dr\, j_{\ell_2}(Qr)\,u_{n\ell}(r)\,u_{n'\ell'}(r) = \int_0^\infty d\sigma\, G_{n\ell}(\sigma)\int_0^\infty dr\, G_{n'\ell'}(r)\int_0^\infty dr\, j_{\ell_2}(Qr)\,e^{-(\sigma+r)r}. \tag{25}$$

Легко показать [4], что

$$\int_0^\infty dr\, j_\ell(kr)\,e^{-ar} = \int_a^\infty \left(\frac{k}{\beta}\right)^\ell \frac{P_\ell\left(\frac{a}{\beta}\right)}{k^2+\beta^2}\,d\beta.$$

Используя это в (25), имеем

$$\int_0^\infty dr\, j_{\ell_2}(Qr)\,u_{n\ell}(r)\,u_{n'\ell'}(r) = \int_0^\infty d\sigma\, G_{n\ell}(\sigma)\int_0^\infty dr\, G_{n'\ell'}(r)\int_{\sigma+r}^\infty \frac{d\beta}{\beta^{\ell_2}}\,P_{\ell_2}\left(\frac{\sigma+r}{\beta}\right)\frac{Q^{\ell_2}}{Q^2+\beta^2} \tag{26}$$

и вспомнив определение Q, получаем

$$\int \phi^*_\beta\left(\vec q \pm \frac{\vec p-\vec k}{2}\right)\phi_a(\vec q)\,d\vec q = \sum_{\ell_2 m_2} B^{\ell\ell_2\ell'}_{mm_2m'}\,Y_{\ell_2 m_2}\left(\mp\frac{\vec p-\vec k}{|\vec p-\vec k|}\right)\int_{\lambda_{\beta a}}^\infty G^{nn'}_{\ell\ell_2\ell'}(\lambda)\,\frac{|\vec p-\vec k|^{\ell_2}}{(\vec p-\vec k)^2+\lambda^2}\,d\lambda, \tag{27}$$

где

$$G^{nn'}_{\ell\ell_2\ell'}(\lambda) = \pi(4\pi)^3\,\frac{i^{\ell_2}}{\lambda^{\ell_2+1}}\int_0^\infty d\sigma\int_0^\infty dr\,\theta(\lambda-2(\sigma+r))\,G_{n\ell}(\sigma)\,G_{n'\ell'}(r)\,P_{\ell_2}\left(\frac{2(\sigma+r)}{\lambda}\right), \tag{28}$$

а нижний предел интеграции $\lambda_{\beta a}$ определяется минимальными значениями σ и r, при которых отличны от нуля весовые функции $G_{n\ell}(\sigma)$ и $G_{n'\ell'}(r)$. Как видно из (23) и (24), эти значения равны κ_i. Поэтому

$$\lambda_{\beta a} = 2(\kappa_\beta+\kappa_a), \qquad \kappa_i^2 = m\,|\epsilon^i_{12}|. \tag{29}$$

Таким образом, используя выражение (27) в формуле (10), получаем следующее представление "обобщенного" потенциала:

$$W_{\beta a}(\vec p-\vec k) \equiv W_{n'\ell'm',n\ell m}(\vec p-\vec k) = \sum_{\ell_2 m_2} B^{\ell\ell_2\ell'}_{mm_2m'}\,Y_{\ell_2 m_2}\left(\frac{\vec p-\vec k}{|\vec p-\vec k|}\right)\int_{\lambda_{\beta a}}^\infty G^{nn'}_{\ell\ell_2\ell'}(\lambda)\,\frac{|\vec p-\vec k|^{\ell_2}\,d\lambda}{(\vec p-\vec k)^2+\lambda^2}\left[(-1)^{\ell_2}V_1((\vec p-\vec k)^2)+V_2((\vec p-\vec k)^2)\right], \tag{30}$$

$$|\ell-\ell'| \le \ell_2 \le \ell+\ell'.$$

Если потенциалы взаимодействия с внешним полем одинаковы для обеих частиц, то формфактор (12) имеет вид:

$$f_{\beta a}(\vec p-\vec k) = f_{n'\ell'm',n\ell m}(\vec p-\vec k) = \sum_{\ell_2 m_2}\left[1+(-1)^{\ell_2}\right]B^{\ell\ell_2\ell'}_{mm_2m'}\,Y_{\ell_2 m_2}\left(\frac{\vec p-\vec k}{|\vec p-\vec k|}\right)\int_{\lambda_{\beta a}}^\infty G^{nn'}_{\ell\ell_2\ell'}(\lambda)\,\frac{|\vec p-\vec k|^{\ell_2}}{(\vec p-\vec k)^2+\lambda^2}\,d\lambda, \tag{31}$$

$$|\ell-\ell'| \le \ell_2 \le \ell+\ell'.$$

Мы видим, что несмотря на центрально-симметричный характер первичного потенциала "обобщенный" потенциал перестает быть центрально-симметричным – возникает зависимость от направления вектора $\vec p-\vec k$.

Из выражения (31) заключаем, что величина $\lambda^{-1}_{\beta a}$ определяет "размазанность" центра инерции сложной частицы и если связь между частицами бесконечно велика ($|\epsilon^i_{12}| \to \infty$, $\lambda^{-1}_{\beta a} \to 0$), то составную систему можно рассмотреть как точечную частицу.

В следующей работе, используя полученные выражения для формфакторов и "обобщенных" потенциалов, мы изучим аналитические свойства амплитуд $T_{\beta a}(\vec p\,',\vec p)$.

В заключение автор приносит глубокую благодарность проф. А.А. Логунову за постановку вопроса и ценные обсуждения.

Литература

1. L.Rosenberg. Phys. Rev., 129, no.2, 968 (1963); 131, no.2, 874 (1963).
2. Л.Д.Фаддеев. ЖЭТФ, 39, 1459 (1960).
   C.Lovelace. Lectures at Scottish Summer School (1963).
   Phys. Rev., 135, B1225 (1964).
   И.Ш.Вашакидзе и др. Препринт ОИЯИ Р-1662 Дубна 1964; Е-1659, Дубна 1964.
3. D.Tadic and T.Tuan. Nuovo Cim., 36, no.2, 463 (1965).
4. L.Bertocchi, C.Ceolin and M.Tonin. Nuovo Cim., 18, no.4, 770 (1960).

Рукопись поступила в издательский отдел
1 февраля 1966 г.