ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р-2564

Л.И. Пономарев

К ТЕОРИИ АСИМПТОТИЧЕСКОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СФЕРОИДАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1966

P - 2564

Л.И. Пономарев

К ТЕОРИИ АСИМПТОТИЧЕСКОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СФЕРОИДАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Направлено в "Журнал вычислительной математики и математической физики"

Многие задачи математической физики (квантовой механики, теории электромагнетизма и т.д.,см.[1]) приводят к уравнениям для сфероидальных функций:

$$\frac{d}{d\xi}(\xi^2-1)\frac{dX}{d\xi}+[\kappa^2(\xi^2-1)-\lambda-\frac{m^2}{\xi^2-1}]X=0, \qquad (1)$$

$$\frac{d}{d\eta}(1-\eta^2)\frac{dY}{d\eta}+[\kappa^2(1-\eta^2)+\lambda-\frac{m^2}{1-\eta^2}]Y=0. \qquad (1а)$$

Здесь κ^2 -заданный параметр, λ -собственное значение задачи Штурма-Лиувилля для уравнения (1а) на интервале $/-1,1/$[x].

Общие свойства функций $X(\xi)$ и $Y(\eta)$ получить довольно просто, так как к уравнениям (1) и (1а) применима общая теория дифференциальных уравнений второго порядка, которым, в частности, удовлетворяют все известные спецфункции. Однако, несмотря на такую "близость" к спецфункциям[xx], решения уравнений (1) и (1а) еще не попали в этот разряд. Причиной этому является бедность интегральных соотношений, содержащих функции $X(\xi)$ и $Y(\eta)$, а также отсутствие для них исчерпывающих таблиц. (Даже наличие больших по объему таблиц Фламмера[2], а также Чу, Стрэттона и др.[3] не решает эту задачу вполне).

Это, в свою очередь, связано с тем, что не существует единого выражения для λ через число нулей функции $Y(\eta)$ во всей области изменения κ^2.

---

x/ Иногда функции $X(\xi)$ и $Y(\eta)$ называют также "радиальной" и "угловой" частью решения уравнения Гельмгольца $\Delta\psi+k^2\psi=0$ (1б)
в сфероидальных координатах. В частности, уравнения (1) и (1а) записаны в вытянутых эллипсоидальных координатах:

$$\kappa^2=\frac{R^2}{4}k^2\ ;\quad \xi=\frac{r_1+r_2}{R}\ ;\quad \eta=\frac{r_1-r_2}{R}\ ;\quad \psi(r_1,r_2,\phi;R)=NX(\xi)Y(\eta)e^{im\phi}. \qquad (1в)$$

R -расстояние между фокусами координатного эллипсоида, r_1, r_2 -расстояния от фокусов до точки наблюдения.

xx/ Например, при $\kappa^2=0$ уравнение (1а) переходит в уравнение для присоединенных полиномов Лежандра.

В этих условиях особенно важно иметь различные приближенные формулы для функций $X(\xi)$, $Y(\eta)$ и собственного значения λ. Такие выражения приведены в книге [1] для предельных случаев $\kappa^2 \to 0$, $\kappa^2 \to \infty$, а также в работе [4], при $\kappa^2 \to 0$, $\lambda \to \infty$. В работе [5] приведены асимптотические формулы для функций $X(\xi)$ и $Y(\eta)$ с большим числом нулей n. Это приближение соответствует методу ВКБ [6] и приводит к следующему результату (в дальнейшем рассмотрим только уравнение (1а)):

$$Y(\eta) = \frac{C}{\sqrt{(1-\eta^2)Q(\eta)}} \cos\left(\int_{\mp a}^{\eta} Q(\eta)\,d\eta \mp \frac{\pi}{4}\right) \tag{2}$$

в области, где $Q^2(\eta) \geqslant 0$;

$$Y(\eta) = \frac{C}{2\sqrt{(1-\eta^2)\,Q(\eta)}} \exp\left\{\pm \int_{\mp a}^{\eta} |Q(\eta)|\,d\eta\right\} \tag{3}$$

в области, где $Q^2(\eta) < 0$.

$$Q^2(\eta) = \kappa^2 + \frac{\lambda}{1-\eta^2} - \frac{m^2}{(1-\eta^2)^2}. \tag{4}$$

Формулы (2)и (3) применимы вдали от "точек остановки" $\pm a$, т.е. корней уравнения $Q^2(\eta) = 0$, лежащих в интервале $[-1,1]$.

В данной заметке мы получим транцендентное уравнение, из которого можно определить приближенные значения $\lambda = \lambda_{n,n+m}(\kappa^2)$ (см. [2,3]) при $n \gg 1$, т.е. в той области значений, где составление таблиц весьма затруднительно. Эти "условия квантования", соответствующие методу ВКБ [6], имеют вид:

$$\int_{-a}^{a} Q(\eta)\,d\eta = \pi(n+½), \tag{5}$$

где n - число нулей функции $Y(\eta)$; a -меньший положительный корень уравнения

$$Q(\eta) = 0 \qquad (a<1).$$

Простое вычисление приводит к результату:

$$\frac{2\kappa}{b}\{b^2 \vec{E}(k) - (1-a^2)[\vec{K}(k) - (b^2-1)\vec{\Pi}(a^2,k)]\} = \pi(n+½). \tag{6}$$

Здесь $\vec{E}(k)$, $\vec{K}(k)$, $\vec{\Pi}(a^2,k)$ - полные эллиптические интегралы, определенные в [7]x/

$$a = \left[1 + \frac{1}{2\kappa^2}\left(\lambda - \sqrt{\lambda^2 + 4m^2\kappa^2}\right)\right]^{½},$$

$$b = \left[1 + \frac{1}{2\kappa^2}\left(\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 4m^2\kappa^2}\right)\right]^{½},$$

$$k = a/b.$$

---

x/ При пользовании справочником Рыжика и Градштейна [8] следует иметь в виду, что принятое там определение эллиптического интеграла 3-го рода $\Pi(\phi, n, k)$ не совпадает с определением Берда и Фридмена [7] для $\Pi(\phi, a^2, k)$. В частности, поэтому формулы 3.167, приведенные в [8], неверны: в них необходимо проделать замену $n \to -n = a^2$.

Нормировка функций вычисляется столь же просто. Для функции (2) находим:

$$C^2 = \frac{\kappa b}{\vec{K}(k)},$$

для функции (1в) при нормировке на $\delta(k-k')$:

$$N^2 = \frac{4\kappa}{\pi R}\cdot\frac{\kappa b}{\vec{K}(k)}\cdot\frac{1}{2\pi}.$$

Уравнение (6) применимо при любых κ^2. В предельных случаях $\kappa^2 \to 0$ и $\kappa^2 \to \infty$ из него легко получить выражения для λ. Например, в случае $m = 0$ x/, используя свойства эллиптических интегралов $\vec{E}(k)$, $\vec{K}(k)$ [9], получим:

при $\kappa^2 \to 0$

$$\lambda = (n+½)^2 - \frac{1}{2}\kappa^2 + \frac{1}{32}\frac{\kappa^4}{(n+½)^2}, \tag{7}$$

при $\kappa^2 \to \infty$

$$\lambda = -\kappa^2 + \kappa(2n+1) - \frac{1}{8}(2n+1)^2 - \frac{1}{64\kappa}(2n+1)^3. \tag{8}$$

Заметим, что хотя при выводе уравнения (6) предполагалось выполнение условия $n \gg 1$, однако полученные выражения (7) и (8) дают хорошее приближение для λ вплоть до $n = 1$ xx/. Это общее свойство метода ВКБ (см. также [10], где дано аналогичное решение уравнений (1) при $\kappa^2 < 0$).

Отметим также следующее: при численном решении уравнений (1) и (1а), например с помощью цепных дробей [2], уравнение (6) может служить источником хороших начальных приближений.

В заключение хочу выразить признательность С.С. Герштейну за постоянный стимулирующий интерес и обсуждения.

---

x/ Отметим, что в случае $m=0$ k^2 определяется по-разному в зависимости от знака λ. А именно, так как

$$a^2 = 1 + \frac{\lambda - |\lambda|}{2\kappa^2}, \quad b^2 = 1 + \frac{\lambda + |\lambda|}{2\kappa^2},$$

то при $\lambda > 0$:

$$k^2 = \frac{\kappa^2}{\kappa^2 + \lambda},$$

а при $\lambda < 0$:

$$k^2 = \frac{\kappa^2 + \lambda}{\kappa^2}.$$

xx/ Точные формулы для λ имеют вид [1]:

при $\kappa^2 \to 0$

$$\lambda = n(n+1) - \frac{\kappa^2}{2}\left[1 - \frac{1}{(2n-1)(2n+3)}\right] + \frac{\kappa^4}{2}\left[\frac{n^2(n-1)^2}{(2n-3)(2n-1)^3(2n+1)} - \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{(2n+1)(2n+3)^3(2n+5)}\right],$$

при $\kappa^2 \to \infty$ $\lambda = -\kappa^2 + \kappa(2n+1) - \frac{1}{8}[(2n+1)^2 + 5] - \frac{1}{64\kappa}[(2n+1)^2 + 11](2n+1)$.

Подчеркнем, однако, что в формулы (2) и (3) нужно подставлять не эти выражения, а "менее точные" (7) и (8), т.к. именно они обеспечивают правильное поведение асимптотических решений при $\eta \to \pm 1$ и $\eta \to 0$ (см. [5]).

Литература

1. J.Meixner, F.W.Schäfke. Mathieshe Funktionen und Sphäreid-functionen, Berlin, 1954.
2. К. Фламмер. Таблицы сфероидальных функций. Москва, 1962.
3. J.A.Stratton, L.J.Chu, P.M.Morse, I.D.C.Little, F.J.VCorbato Spheroidal wave function, London, 1956.
4. Л.Н. Кармазина. Вычислительная математика, Сб. 5, 72 (1959).
5. Л.И. Пономарев. ДАН, 162, 1023 (1965).
6. А. Зоммерфельд. Строение атома и спектры, т. II, Москва, 1956.
7. P.F.Byrd, M.D.Friedman. Handbook of Elliptic Integrals for Energies and Physicists, Berlin, 1954.
8. Н.С. Градштейн, И.М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Москва, 1962.
9. Е. Янке и Ф. Эмде. Таблицы функций, Москва, 1959.
10. С.С. Герштейн, Л.И. Пономарев, Т.П. Пузынина. ЖЭТФ, 48, 632 (1965).

Рукопись поступила в издательский отдел
1 февраля 1966 г.