ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р - 2562

В.Г. Кадышевский

О СИММЕТРИЯХ ЛЕПТОНОВ И АДРОНОВ В СЛАБЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯХ

I. ЛЕПТОНЫ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1966

Р - 2562

В.Г. Кадышевский

О СИММЕТРИЯХ ЛЕПТОНОВ И АДРОНОВ В СЛАБЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯХ

I. ЛЕПТОНЫ

§ 1. Введение

В последние годы в связи с успешным применением группы $SU(3)$ для описания сильно взаимодействующих частиц заметно возрос интерес к поискам симметрии, которая бы распространялась не только на адроны, но и на лептоны (см., например,[1]; там же имеется обширная библиография по этому вопросу). Характерным моментом для такого рода попыток является стремление приписать лептонам определенные значения "унитарного" спина, изотопического спина (I) и гиперзаряда (Y). Однако, принимая во внимание факт отсутствия сильных взаимодействий для лептонов, трудно понять, почему эти частицы должны обладать перечисленными квантовыми числами. Поэтому с самого начала даный подход не выглядит вполне логически обоснованным.

С другой стороны, существует взаимодействие, и именно слабое, в котором участвуют все частицы, как адроны, так и лептоны. При этом слабое взаимодействие проявляет замечательную универсальность, что находит свое выражение в записи соответствующего лагранжиана как произведении "ток × ток", где "ток" имеет определенную лоренцеву структуру ($V - A$ -вариант) и в известном смысле симметричен по отношению ко всем частицам. Следовательно, разумно предположить, что новая группа симметрии, дающая объединенное описание адронов и лептонов, должна быть фундаментальным образом связана со слабым взаимодействием всех частиц, как, например, группа изотопического спина $SU(2)$ связана с сильным взаимодействием адронов. Двигаясь в этом направлении дальше, мы должны, во-первых, отделить в лагранжиане слабого взаимодействия L_w те члены, которые известны наиболее точно, затем описать их симметрию и, наконец, попытаться распространить эту симметрию на оставшуюся часть L_w. Поскольку в настоящее время мы лучше знаем лептон-лептонную компоненту ($L_{\ell\ell}$) лагранжиана L_w, то, согласно сказанному выше, нашей задачей теперь являетси исследование свойств симметрии, проявляемых лептонами в слабых взаимодействиях. Это составляет содержание публикуемой I части настоящей работы. Вопросы, касающиеся симметрий адронов в рассматриваемом аспекте, обсуждаются во II части.

В математическом отношении даная работа близка к некоторым аналогичным исследованиям, цитированным в[1/xx].

---

x/ Она содержит члены, описывающие μ -распад.

xx/ К сожалению, об их существовании так же, как и о существовании самой работы[1], автор узнал лишь после того, как настоящая работа была доложена на семинаре.

§ 2. O(5) как возможная группа симметрии лептонов

Итак, рассмотрим лептон-лептонную часть лагранжиана слабых взаимодействий

$$L_{\ell\ell} = \frac{G}{\sqrt{2}}\, j^{+}_{\lambda}\, j_{\lambda} \quad . \qquad (2.1)$$

где эрмитовски сопряженные операторы токов j_λ и j^{+}_{λ} строятся стандартным образом из операторов полей μ -мезона, электрона и двух нейтрино:

$$j_\lambda = (\bar{\mu} O_\lambda \nu_\mu) + (\bar{e} O_\lambda \nu_e) \quad , \qquad (2.2)$$

$$j^{+}_{\lambda} = (\bar{\nu}_\mu\, O_\lambda \mu) + (\bar{\nu}_e\, O_\lambda e) \, , \qquad (2.3)$$

причем O_λ отвечает (V – A) –связи. Гюрсеем и Файнбергом было замечено [2] (см. также [3,4]), что токи (2.2)-(2.3) и электромагнитный ток

$$j^{em}_{\lambda} = \bar{\mu}\gamma_\lambda\, \mu + \bar{e}\gamma_\lambda\, e \qquad (2.4)$$

инвариантны относительно преобразований некоторой группы U(2) , определяемой следующим образом:

$$\binom{\mu}{e}' = U\binom{\mu}{e} \quad , \quad \binom{\nu_\mu}{\nu_e}' = U\binom{\nu_\mu}{\nu_e} \quad ; \qquad (2.5)$$

$$(\bar{\mu}\, , \bar{e})' = (\bar{\mu}\, , \bar{e})U^{+} \quad , \quad (\bar{\nu}_\mu , \bar{\nu}_e)' = (\bar{\nu}_\mu , \bar{\nu}_e)U^{+} \quad . \qquad (2.6)$$

Представляя U(2) в виде

$$U(2) = U(1) \times SU(2), \qquad (2.7)$$

можно рассматривать однопараметрическую группу U(1) как группу калибровочных преобразований, связанную с сохранением лептонного заряда ℓ . В дальнейшем предполагается [x/], что для μ^-, e^-, ν_μ и ν_e всегда $\ell = 1$, а для μ^+, e^+, $\bar{\nu}_\mu$, $\bar{\nu}_e$ соответственно $\ell = -1$.

---

x/ Если лептонам приписать такие значения ℓ , которые следуют из гипотезы Конопинского-Махмуда [5,6], то все построения данной работы по-прежнему оказываются возможными при некоторой их модификации. Автор благодарен М.А. Маркову за ценные указания по ряду относящихся сюда вопросов.

Группу SU(2) из (2.7) мы будем называть вслед за авторами [2] группой лептонного спина, а компоненты этого спина будем обозначать посредством t_1 , t_2 , t_3 . Выберем представление, в котором проекция t_3 диагональна и равна

$$t_3 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} . \qquad (2.8)$$

Эту величину естественно связывать с μ -мезонным зарядом κ [7], который, по определению, есть единица для μ^- и ν_μ , минус единица для μ^+ и $\bar{\nu}_\mu$ и нуль для остальных лептонов. Очевидно,

$$\kappa = t_3 + \frac{\ell}{2} \, . \qquad (2.9)$$

Поскольку κ и ℓ , согласно существующим экспериментальным данным, сохраняются точно, то это же относится и к t_3 . Сохранение же остальных компонент t -спина явно не имеет места из-за существования разности масс в дублете $\binom{\mu}{e}$ [x/]. Следовательно, с самого начала симметрия лептонов относительно группы SU(2) может рассматриваться лишь как приближенная. Последнее, однако, не означает, что из этой нарушенной симметрии нельзя извлечь полезных следствий (ср. с теорией унитарной симметрии). Не исключено также, что может оказаться плодотворным рассмотрение даже более высокой симметрии, чем данная, так как при этом могут обнаружиться более глубокие закономерности слабых взаимодействий лептонов (ср., например, с теорией SU(6)- симметрии). Конечно, переход от одной симметрии к другой не является актом произвола, а должен основываться на анализе структуры мультиплетов, отвечающих низшей симметрии.

В связи с этим рассмотрим подробнее лептонные дублеты

$$\ell = \binom{\mu^-}{e^-} \, , \qquad (2.10)$$

$$\nu = \binom{\nu_\mu}{\nu_e} \, . \qquad (2.11)$$

Мы видим, что в первый из них (ℓ) входят только заряженные частицы, причем заряд Q равен –1 для всего дублета. Для дублета ν имеем, очевидно, $Q = 0$.

С другой стороны, Q является сохраняющимся квантовым числом, отвечающим однопараметрической группе калибровочных преобразований $U_Q(1)$. Следовательно, полная группа симметрии, которой соответствуют мультиплеты (2.10) и (2.11), есть группа

$$U_\ell(1) \times U_Q(1) \times SU(2) \qquad (2.12)$$

---

x/ Разность масс ν_μ и ν_e пока неизвестна.

(здесь через $U_\ell(1)$ обозначена рассмотренная выше группа лептонного заряда).

Чтобы дублеты (2.10) и (2.11) выступали в теории более симметрично, введем вспомогательное квантовое число η, равное

$$\eta = Q + \frac{\ell}{2} . \qquad (2.13)$$

Очевидно, что для ℓ -частиц $\eta = -½$, а для ν -частиц $\eta = ½$. Соответственно, группа (2.12) теперь может быть записана как

$$U_\ell(1) \times U_\eta(1) \times SU(2) . \qquad (2.14)$$

Поскольку для всех четырех лептонов μ^-, e^-, ν_μ и ν_e $\ell = 1$, то ниже сомножитель $U_\ell(1)$ нами временно опускается. В результате (2.14) превращается в четырехпараметрическую группу

$$U_\eta(1) \times SU(2) = g . \qquad (2.15)$$

Вспоминая теперь аргументы, которые привели в свое время к переходу от схемы изотопических мультиплетов к "супермультиплетам" теории унитарной симметрии, заманчиво предположить, что и в данном случае мы имеем дело с некоторой нарушенной симметрией и что мультиплеты ℓ и ν есть "осколки" некого "супермультиплета", внутри которого число η уже изменяется, являясь вместе с компонентой t_3 диагональным генератором новой группы G [x/]. Поскольку нам известно только четыре лептона, желательно, чтобы этот "супермультиплет" содержал лишь четыре состояния и соответствовал низшему представлению G. Таким образом, требования к искомой группе G следующие: ее ранг должен равняться двум, а размерность низшего представления – четырем. Если предполагать по традиции, что группа G компактная и полупростая, то перечисленными условиями она определяется с точностью до локального изоморфизма. В частности, ее можно считать совпадающей с O(5) -десятипараметрической группой ортогональных преобразований в 5-мерном вещественном евклидовом пространстве [xx/]. Чтобы двигаться дальше, нам необходим ряд сведений математического характера о группе O(5). Они сообщаются в следующем параграфе.

[x/] Из нашего построения непосредственно ясно, что понижение G -симметрии до симметрии, отвечающей группе (2.15), происходит, в частности, при включении электромагнитного взаимодействия между ℓ -лептонами.

[xx/] Группой локально изоморфной O(5) является симплектическая группа Sp(4). В дальнейшем мы иногда будем пользоваться формализмом этой группы [8/]. Генераторы Sp(4) и перестановочные соотношения между ними выписаны в ПРИЛОЖЕНИИ.

§ 3. Некоторые сведения из теории группы O(5)

Пусть x_n $(n = 1,2,3,4,5)$ -векторы вещественного евклидового 5-пространства. Совокупность преобразований вида

$$x'_m = a_{mn} x_n \qquad (3.1)$$

при условии, что

$$\det a = 1 ,$$
$$\sum_{n=1}^{5} a_{mn} a_{kn} = \delta_{mk} , \qquad (3.2)$$

составляет группу O(5). Матрицы $\|a_{mn}\|$ образуют 5-мерное (векторное) представление группы. Матрицы S спинорного представления O(5) определяются из соотношения

$$S^{-1} \Gamma_m S = a_{mn} \Gamma_n , \qquad (3.3)$$

где Γ_m -пять эрмитовых матриц [x/], удовлетворяющих следующему правилу антикоммутации:

$$\Gamma_m \Gamma_n + \Gamma_n \Gamma_m = 2\delta_{mn} \; ; \; m,n = 1,2,\dots,5 . \qquad (3.4)$$

Поскольку наименьшая размерность пяти взаимно антикоммутирующих матриц равна четырем, то наименьшая размерность матриц S также равна четырем. Другими словами, спинор ψ^a, преобразующийся с помощью матриц S

$$\psi'^a = S^a_\beta \psi^\beta , \qquad (3.5)$$

имеет минимум четыре компоненты. Именно в этом случае (см. конец § 2) мы отождествляем его с лептонным "супермультиплетом", полагая

$$\psi^a = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \\ \psi^3 \\ \psi^4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu^- \\ e^- \\ \nu_\mu \\ \nu_e \end{pmatrix} . \qquad (3.6)$$

[x/] Эрмитовость Γ_m, очевидно, обеспечивает выполнение условия унитарности для матриц S.

В силу унитарности матриц S при преобразованиях (3.5) остается инвариантной форма

$$\psi^+\psi = \psi^*_\alpha \psi^\alpha . \qquad (3.7)$$

Поэтому дираковски сопряженные волновые функции $\bar{\mu}$, $\bar{e}$, $\bar{\nu}_\mu$ и $\bar{\nu}_e$ естественно поместить в состояние типа ψ^*_α. Обозначая это состояние символом $\bar{\psi}_\alpha$, будем иметь

$$\bar{\psi}_\alpha = (\bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \bar{\psi}_3, \bar{\psi}_4) = (\bar{\mu}, \bar{e}, \bar{\nu}_\mu, \bar{\nu}_e) . \qquad (3.8)$$

В итоге возникает квадратичная форма

$$\bar{\psi}\psi = \bar{\psi}_\alpha \psi^\alpha , \qquad (3.9)$$

инвариантная как относительно преобразований Лоренца[x/], так и относительно преобразований группы $O(5)$.

Матрицы Γ_m для дальнейшего будет удобно выбрать следующим образом:

$$\Gamma_i = \sigma_3 \times \sigma_i = \begin{pmatrix}\sigma_i & 0\\ 0 & -\sigma_i\end{pmatrix}, \quad i=1,2,3;$$

$$\Gamma_4 = \sigma_2 \times \sigma_0 = \begin{pmatrix}0 & -i\sigma_0\\ i\sigma_0 & 0\end{pmatrix}; \qquad (3.10)$$

$$\Gamma_5 = \sigma_1 \times \sigma_0 = \begin{pmatrix}0 & \sigma_0\\ \sigma_0 & 0\end{pmatrix};$$

где $\sigma_0 = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$, σ_i $(i=1,2,3)$ –матрицы Паули. Справедливость (3.4) легко проверяется непосредственно. Кроме того, с помощью (3.10) можно убедиться также в выполнении ряда соотношений, вытекающих из (3.4):

$$\Gamma_1^2 = \Gamma_2^2 = \ldots = \Gamma_5^2 = 1 ,$$
$$\mathrm{Sp}\,\Gamma_m\Gamma_n = 4\delta_{mn} , \qquad (3.11)$$
$$\mathrm{Sp}\,\Gamma_m = 0 .$$

Так как транспонированные матрицы Γ_m^T (и равные им комплексно сопряженные Γ_m^*) удовлетворяют прежним правилам антикоммутации (3.4), то, согласно "фундаментальной теореме" Паули, существует преобразование подобия

$$\Gamma_m^T = \Gamma_m^* = g\Gamma_m g^{-1} . \qquad (3.12)$$

[x/] В (3.9) лоренцевские индексы спиноров не выписаны.

Нетрудно установить, что

$$g = -g^{-1} = \Gamma_2\Gamma_4 = -i\sigma_1 \times \sigma_2 = \begin{pmatrix}0 & -i\sigma_2\\ -i\sigma_2 & 0\end{pmatrix} . \qquad (3.13)$$

Из соотношений (3.3) и (3.12) находим, что

$$(S^{-1})^T = g S g^{-1} . \qquad (3.14)$$

Следовательно, преобразования (3.5) оставляют инвариантной еще одну билинейную форму –

$$(\phi,\psi) = (\phi^T)_\alpha\, g^\alpha_\beta\, \psi^\beta = h_{\alpha\beta}\phi^\alpha\psi^\beta . \qquad (3.15)$$

Матрица $h_{\alpha\beta} = g^\alpha_\beta$ здесь играет роль метрического тензора. Ее структура (см. (3.13)) указывает на то, что рассматриваемое спинорное представление $O(5)$ фактически совпадает с низшим представлением $Sp(4)$ (см. ПРИЛОЖЕНИЕ).

С помощью матриц $h_{\alpha\beta}$ и $h^{\alpha\beta} = -h_{\alpha\beta}$ можно опускать и поднимать спинорные индексы:

$$\psi_\alpha = h_{\alpha\beta}\psi^\beta ,$$

$$\psi^\alpha = \psi_\beta h^{\beta\alpha} = -h^{\alpha\beta}\psi_\beta . \qquad (3.16)$$

При этом форма (3.15) будет менять свой вид:

$$(\phi,\psi) = h_{\alpha\beta}\phi^\alpha\psi^\beta = \phi^\alpha\psi_\alpha = -\phi_\alpha\psi^\alpha = h^{\alpha\beta}\phi_\alpha\psi_\beta . \qquad (3.17)$$

Теперь рассмотрим генераторы группы $O(5)$. Если $\theta_{k\ell} = -\theta_{\ell k}$ – параметры, определяющие пятимерные повороты в плоскостях $(k\ell)$, то при малых $|\theta|$ имеем:

$$a_{mn} = \delta_{mn} + i\sum_{k<\ell}\theta_{k\ell}\,\mathfrak{M}^{(mn)}_{k\ell} , \qquad (3.18)$$

$$S^\alpha_\beta = \delta^\alpha_\beta + i\sum_{k<\ell}\theta_{k\ell}(M_{k\ell})^\alpha_\beta . \qquad (3.19)$$

Антисимметрические пятимерные тензоры $\mathfrak{M}_{k\ell}$ и $M_{k\ell}$, каждый из которых содержит по 10 компонент, являются генераторами $O(5)$ в представлениях $\underline{5}$ и $\underline{4}$ соответственно. Их перестановочные соотношения хорошо известны:

$$[\mathfrak{M}_{k\ell}, \mathfrak{M}_{mn}] = i(\delta_{km}\mathfrak{M}_{\ell n} + \delta_{\ell n}\mathfrak{M}_{km} - \delta_{\ell m}\mathfrak{M}_{kn} - \delta_{kn}\mathfrak{M}_{\ell m}) \qquad (3.20)$$

(правила коммутации величин $M_{k\ell}$, очевидно, аналогичны). Обычными методами нетрудно установить, что

$$M_{k\ell} = \frac{1}{4i}(\Gamma_k \Gamma_\ell - \Gamma_\ell \Gamma_k), \qquad (3.21)$$

откуда, принимая во внимание (3.10), находим:

$$M_{ik} = \frac{1}{2}\epsilon_{ik\ell}\,(\sigma_0 \times \sigma_\ell), \quad i,k,\ell = 1,2,3; \qquad (3.22)$$

$$M_{45} = -\frac{1}{2}\sigma_3 \times \sigma_0; \qquad (3.23)$$

$$M_{4\ell} = \frac{1}{2}\sigma \times \sigma_\ell, \quad \ell = 1,2,3; \qquad (3.24)$$

$$M_{5\ell} = -\frac{1}{2}\sigma_2 \times \sigma_\ell, \quad \ell = 1,2,3. \qquad (3.25)$$

($\epsilon_{ik\ell}$ – антисимметрический единичный тензор).

Сравнивая теперь (3.22) и (3.23) с операторами t_i и η, рассматривавшимися в § 2, и учитывая структуру мультиплета (3.6), приходим к выводу, что

$$t_i = \epsilon_{ik\ell} M_{k\ell} = \frac{1}{2}(\sigma_0 \times \sigma_i) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sigma_i & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sigma_i \end{pmatrix}, \qquad (3.26)$$

$$\eta = M_{45} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sigma_0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sigma_0 \end{pmatrix}. \qquad (3.27)$$

Следовательно, группе лептонного спина SU(2) отвечает группа трехмерных вращений O(3), действующая на компоненты x_1, x_2, x_3 5-вектора x_m, а группа $U_\eta(1)$ совпадает с группой поворотов O(2) в плоскости (45). Очевидно, что в группу O(5) входят в виде прямого произведения выделенные нами подгруппы O(3) и O(2)

$$O(5) \supset O(3) \times O(2). \qquad (3.28)$$

В обозначениях § 2 этому соответствует

$$G \supset SU(2) \times U_\eta(1).$$

Хотя операторы (3.24) и (3.25) не генерируют групп SU(2), мы ради краткости будем называть их γ – и ρ –спинами соответственно:

$$M_{4\ell} = \gamma_\ell, \quad M_{5\ell} = \rho_\ell. \qquad (3.29)$$

Нетрудно проверить, что каждой из линейных комбинаций

$$\tfrac{1}{2}(\vec{t} + \vec{\gamma}), \quad \tfrac{1}{2}(\vec{t} - \vec{\gamma}), \quad \tfrac{1}{2}(\vec{t} + \vec{\rho}), \quad \tfrac{1}{2}(\vec{t} - \vec{\rho}) \qquad (3.30)$$

уже отвечает некоторая группа SU(2).

В дальнейшем окажется полезным рассматривать оператор $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, равный векторному произведению спинов $\vec{\gamma}$ и $\vec{\rho}$:

$$\vec{\xi} = [\vec{\gamma} \times \vec{\rho}]; \quad \xi_i = \epsilon_{ik\ell}\gamma_k \rho_\ell. \qquad (3.31)$$

С помощью соотношений коммутации (3.20) легко показать, что

$$[\xi_1, \eta] = 0, \quad [\vec{\xi}^2, t_1] = 0, \quad [\xi_3, t_3] = 0. \qquad (3.32)$$

Поскольку операторы t_3, $\vec{t}^2$ и η коммутируют между собой, то вместе с $\vec{\xi}^2$ и двумя операторами Казимира группы O(5) они образуют полный набор квантовых чисел, которые в общем случае определяют состояние в рассматриваемой схеме[x/].

Генераторы $\|\mathfrak{M}^{(mn)}_{k\ell}\|$ в представлении <u>5</u> можно выразить через генераторы $M_{k\ell}$, если подставить разложения (3.18) и (3.19) в (3.3) и учесть (3.11). В результате будем иметь:

$$\|\mathfrak{M}^{(mn)}_{k\ell}\| = i\,Sp(M_{k\ell} M_{mn}). \qquad (3.33)$$

В частности, генераторы t_3 и η выглядят так:

$$t_3 = \|\mathfrak{M}^{(mn)}_{45}\| = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (3.34)$$

$$\eta = \|\mathfrak{M}^{(mn)}_{45}\| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & -i & 0 \end{pmatrix}. \qquad (3.35)$$

[x/] Напомним, что число операторов в полном наборе равно $\frac{N+\ell}{2}$, где N – число параметров группы, а ℓ – ее ранг.

Мы видим, что в рассматривавшемся до сих пор базисе (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) пятимерного представления квантовые числа t_3 и η не являются диагональными и, следовательно, данный базис нельзя считать физическим. Физический базис, диагонализующий матрицы t_3 и η, образуют компоненты тензора

$$\hat{X} = x_n \Gamma_n = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - ix_2 & x_5 - ix_4 & 0 \\ x_1 + ix_2 & -x_3 & 0 & x_5 - ix_4 \\ x_5 + ix_4 & 0 & -x_3 & -x_1 + ix_2 \\ 0 & x_5 + ix_4 & -x_1 - ix_2 & x_3 \end{pmatrix} \qquad (3.36)$$

или, в "триплетной" форме,

$$\hat{X} = \begin{pmatrix} x_i \sigma_i & x_5 - ix_4 \\ x_5 + ix_4 & -x_i \sigma_i \end{pmatrix} . \qquad (3.37)$$

При этом содержание мультиплета (3.37) по t –спину, t_3 и η следующее (квантовое число $\vec{\xi}^{\,2}$ нам пока не понадобится):

Т а б л и ц а 1

С о с т о я н и я	$t(t+1)$	t_3	η
$x_1 - ix_2$	2	1	0
$x_1 + ix_2$	2	- 1	0
x_3	2	0	0
$x_5 - ix_4$	0	0	-1
$x_5 - ix_4$	0	0	1

Из (3.3) следует, что при пятимерных вращениях тензор (3.36) преобразуется по закону

$$\hat{X}' = S \hat{X} S^{-1} . \qquad (3.38)$$

Очевидно, что

$$\det \hat{X}'' = (x'^2_n)^2 = \det \hat{X} = (x^2_n)^2 . \qquad (3.39)$$

Скалярное произведение двух 5-векторов $\hat{X}$ и $\hat{Y}$, в силу (3.11), также может

быть записано в терминах $\hat{X}$ и $\hat{Y}$:

$$x_n y_n = \tfrac{1}{4} Sp(\hat{X}\hat{Y}) . \qquad (3.40)$$

Теперь перейдем к рассмотрению билинейных ковариантных величин, которые в данной схеме можно построить из спиноров ψ и ϕ^+. Нетрудно сообразить, что существует только три таких величины x/ :

1. скаляр $S = \tfrac{1}{4}\phi^+ \psi = \tfrac{1}{4}\phi^*_\alpha \psi^\alpha$,
2. 5-вектор $A_n = \tfrac{1}{4}\phi^+ \Gamma_n \psi$, (3.41)
3. антисимметричный 5-тензор $T_{mn} = \frac{1}{4i}\phi^+ [\Gamma_m, \Gamma_n] \psi$,

или, символически,

$$4 \times 4 = 1 + 5 + 10 . \qquad (3.42)$$

Если считать лептонный заряд ℓ (см. § 2) в состоянии ψ равным единице, то в случае $\phi^+ = \bar{\psi}$ (см. (3.8)) во всех состояниях (3.41) будет выполнено равенство $\ell = 0$, в результате чего соотношения (2.9) и (2.13) приобретут вид:

$$\kappa = t_3 , \qquad (3.43)$$

$$\eta = Q . \qquad (3.44)$$

Как и всякий 5-вектор, величину $A_n = \tfrac{1}{4}\phi^+ \Gamma_n \psi$ можно задавать в тензорной форме (3.36)-(3.37):

$$\| \hat{A}^{\alpha}_{\beta} \| = \begin{pmatrix} A_i \sigma_i & A_5 - iA_4 \\ A_5 + iA_4 & -A_i \sigma_i \end{pmatrix} =$$

$$= \| g^{\alpha}_{\gamma} [\phi^*_\rho \psi^\gamma - \phi^{*\gamma} \psi_\rho - \tfrac{1}{4}\delta^{\gamma}_{\rho} (\phi^+ \psi)] (g^{-1})^{\rho}_{\beta} \| = \| g^{\alpha}_{\gamma} A^{\gamma}_{\rho} (g^{-1})^{\rho}_{\beta} \| . \qquad (3.45)$$

Записывая A^{γ}_{ρ} в полностью контрвариантном виде (ср. с (3.16)), получаем антисимметричный неприводимый тензор

$$A^{\sigma\gamma} = \phi^{*\sigma} \psi^\gamma - \phi^{*\gamma} \psi^\sigma - \tfrac{1}{4} h^{\sigma\gamma} (\phi^+ \psi) , \qquad (3.46)$$

который характерен для формализма группы $Sp(4)$ /9/. Отметим полезное соотношение:

---

x/ Численные множители в (3.41) введены нами из соображений удобства.

$$A^2_n = \frac{1}{4}\,\mathrm{Sp}(\hat{A}\hat{A}) = \frac{1}{4}\,h_{\alpha\beta}\,h_{\rho\lambda}\,A^{\alpha\rho}\,A^{\beta\lambda}\,. \tag{3.47}$$

В заключение этого параграфа мы рассмотрим некоторые дискретные операции симметрии. Поскольку преобразования с $\det a = -1$ исключены с самого начала x/, то в 5-пространстве векторов x_n допустимы лишь инверсии четного числа осей, сводящиеся к произведениям поворотов на угол π в соответствующих плоскостях. Легко видеть, что при этом отражению осей с номерами m и n отвечает следующее преобразование спинора ψ :

$$\psi' = \eta\Gamma_m\Gamma_n\psi \tag{3,48}$$

(η - фазовый множитель). В частности, при одновременной инверсии $x_\alpha \to -x_\alpha$ $(\alpha = 1,2,3,4)$ имеем:

$$\psi' = \Gamma_1\Gamma_2\Gamma_3\Gamma_4\psi = \Gamma_5\psi\,. \tag{3.49}$$

Учитывая (3.10), легко показать, что для лептонов (3.6) преобразование (3.49) эквивалентно перестановке

$$\begin{aligned} \mu &\to \nu_\mu\,, \\ e &\to \nu_e\,, \end{aligned} \tag{3.50}$$

т.е. совпадает с D-преобразованием, рассмотренным Ли[4,5].

Если в пятимерном x-пространстве отражаются лишь оси x_1 и x_2, то

$$\psi' = i\Gamma_1\Gamma_2\psi\,, \tag{3.51}$$

что означает

$$\begin{aligned} \mu &\to -\mu\,, \\ e &\to e\,, \\ \nu_\mu &\to -\nu_\mu\,, \\ \nu_e &\to \nu_e\,. \end{aligned} \tag{3.52}$$

Инвариантность лагранжиана слабых взаимодействий лептонов относительно преобразования (3.52) и вытекающее из нее сохранение специфической "мюонной четности" обсуждались в работе[9].

---

x/ Этим преобразованиям, очевидно, нельзя сопоставить операторы S, так как существует лишь 5 антикоммутирующих четырехрядных матриц.

Необходимо ясно понимать (мы подчеркиваем это еще раз), что в нашей схеме симметрия относительно инверсий (3.49), (3.51) и т.п. является прямым следствием 0(5)-симметрии.

§ 4. Тензорная структура лептонных токов и лагранжиана слабого взаимодействия. Нарушенная 0(5) -симметрия

В § 2 было отмечено, что относительно группы SU(2) слабые лептонные токи (2.2)-(2.3) и электромагнитный ток (2.4) являются скалярами. Выясним теперь, каковы тензорные свойства этих величин относительно группы 0(5). С помощью (3.6), (3.8) и (3.10) находим без труда, что

$$j_\lambda = (\bar{\mu}O_\lambda\nu_\mu) + (\bar{e}O_\lambda\nu_e) = \frac{1}{2}\bar{\psi}(\Gamma_3 + i\Gamma_4)O_\lambda\psi\,, \tag{4.1}$$

$$j^+_\lambda = (\bar{\nu}_\mu O_\lambda\mu) + (\bar{\nu}_e O_\lambda e) = \frac{1}{2}\bar{\psi}(\Gamma_3 - i\Gamma_4)O_\lambda\psi\,, \tag{4.2}$$

$$j^{em}_\lambda = (\bar{\mu}\gamma_\lambda\mu) + (\bar{e}\gamma_\lambda e) = \frac{1}{2}\bar{\psi}\gamma_\lambda\psi - \frac{1}{2i}\bar{\psi}\Gamma_4\Gamma_5\psi\,. \tag{4.3}$$

Отсюда, принимая во внимание (3.41) и (3.45), приходим к выводу, что токи j_λ и j^+_λ принадлежат одному и тому же тензору группы 0(5), преобразующемуся по представлению $\underline{5}$, а электромагнитный ток j^{em}_λ есть суперпозиция скаляра $\underline{1}$ и (45)-компоненты антисимметричного тензора, преобразующегося по присоединенному представлению $\underline{10}$. Другими словами, в выражении (4.42) первое и третье слагаемые в правой части как бы отвечают электромагнитному взаимодействию лептонов, а второе слагаемое - слабому.

Теперь выпишем полностью тензор $\underline{5}$, компонентами которого являются токи (4.1) и (4.2) (ср. с (3.45)):

$$\hat{j} = \begin{pmatrix} j_k\sigma_k & j_5 - ij_4 \\ j_5 + ij_4 & -j_k\sigma_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_k\sigma_k & j^+ \\ j & -j_k\sigma_k \end{pmatrix}_{k=1,2,3}, \tag{4.4}$$

где

$$j_n = \frac{1}{2}\bar{\psi}\Gamma_n\psi\,, \tag{4.5}$$

причем x/

$$j^+_n = j_n\,. \tag{4.6}$$

---

x/ Матрица $O_\lambda = V_\lambda - A_\lambda$, чтобы не загромождать формул, здесь и далее опускается. Условие (4.6) выполняется благодаря тому, что $O^+_\lambda = \gamma_0 O_\lambda\gamma_0$ и $\Gamma^+_n = \Gamma_n$.

Для тензора (4.4) и вектора (4.5) мы введем общее название – квинтет слабых токов. Как видно из (2.1), в лагранжиане слабого взаимодействия лептонов, принятом в настоящее время, представлены только две компоненты квинтета:

$$L_{\ell\ell} = \frac{G}{\sqrt{2}}\, j^{+} j = \frac{G}{4\sqrt{2}}\, \mathrm{Sp}\begin{pmatrix} 0 & j_5 - ij_4 \\ j_5 + ij_4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & j_5 - ij_4 \\ j_5 + ij_4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{G}{\sqrt{2}} (j_5 - ij_4)(j_5 + ij_4) = \frac{G}{\sqrt{2}} (j_4^2 + j_5^2). \qquad (4.7)$$

Токи j и j^{+} из-за своей структуры (см. (4.1) (4.2)) в литературе именуются заряженными токами. В нашей схеме это название тем более оправдано, что в состояниях типа $j_5 + ij_4$ и $j_5 - ij_4$ заряд Q имеет определенное значение (см.таблицу 1 в § 3 и формулу (3.44)) независимо от того, строится ли ток как билинейная комбинация из ψ -полей или нет. Для компонент $j_k (k = 1,2,3)$, согласно (3.44) и той же таблице 1, $\eta = Q = 0$ и,следовательно, эти компоненты должны отвечать нейтральным токам. Действительно, в трехмерной части вектора (4.5) заряженные лептоны (ℓ) связываются только с заряженными, а нейтральные (ν) – с нейтральными:

$$j_k = \tfrac{1}{2}\bar{\psi}\Gamma_k \psi = \tfrac{1}{2}\bar{\psi}\begin{pmatrix} \sigma_k & 0 \\ 0 & -\sigma_k \end{pmatrix}\psi =$$

$$= \tfrac{1}{2}(\bar{\ell}\sigma_k \ell - \bar{\nu}\sigma_k \nu). \qquad (4.8)$$

Обратим внимание на то обстоятельство, что нейтральная часть квинтета слабых токов является одновременно трехмерным вектором относительно группы $SU(2)$ лептонного спина (см. (4.8)). Этот факт будет играть важную роль при рассмотрении вопроса об адронных нейтральных токах во II -ой части данной работы. Для дальнейшего нам будет необходимо иметь явный вид всех компонент квинтета j_n . Собирая вместе (4.8), (4.1) и (4.2) и учитывая (2.10)–(2.11), получаем:

$$\begin{aligned} j_1 &= \tfrac{1}{2}[(\bar{\mu}e) + (\bar{e}\mu) - (\bar{\nu}_\mu \nu_e) - (\bar{\nu}_e \nu_\mu)], \\ j_2 &= \frac{1}{2i}[(\bar{\mu}e) - (\bar{e}\mu) - (\bar{\nu}_\mu \nu_e) + (\bar{\nu}_e \nu_\mu)], \\ j_3 &= \tfrac{1}{2}[(\bar{\mu}\mu) - (\bar{e}e) - (\bar{\nu}_\mu \nu_\mu) + (\bar{\nu}_e \nu_e)], \\ j_4 &= \frac{1}{2i}[(\bar{\mu}\nu_\mu) + (\bar{e}\nu_e) - (\bar{\nu}_\mu \mu) - (\bar{\nu}_e e)], \\ j_5 &= \tfrac{1}{2}[(\bar{\mu}\nu_\mu) + (\bar{e}\nu_e) + (\bar{\nu}_\mu \mu) + (\bar{\nu}_e e)]. \end{aligned} \qquad (4.9)$$

В пределе точной $O(5)$ –симметрии четырехфермионный лагранжиан взаимодействия лептонов, построенный из компонент квинтета, очевидно, выглядит так:

$$L'_{\ell\ell} = \frac{G'}{\sqrt{2}}\, j_n^2 = \frac{G'}{4\sqrt{2}}\, \mathrm{Sp}\,\hat{j}\hat{j}\,. \qquad (4.10)$$

Подставляя сюда (4.9) и принимая во внимание соотношение Фирца x/, находим без труда:

$$\begin{aligned} L'_{\ell\ell} = \frac{G}{2\sqrt{2}} [& (\bar{\mu}\mu)(\bar{\nu}_\mu \nu_\mu) + (\bar{e}e)(\bar{\nu}_e \nu_e) + (\bar{\mu}\mu)(\bar{e}e) + (\bar{\nu}_\mu \nu_\mu)(\bar{\nu}_e \nu_e) + \\ & + (\bar{\mu}\mu)(\bar{\nu}_e \nu_e) + (\bar{e}e)(\bar{\nu}_\mu \nu_\mu) + \\ & + \tfrac{1}{2}(\bar{\mu}\mu)(\bar{\mu}\mu) + \tfrac{1}{2}(\bar{e}e)(\bar{e}e) + \tfrac{1}{2}(\bar{\nu}_\mu \nu_\mu)(\bar{\nu}_\mu \nu_\mu) + \tfrac{1}{2}(\bar{\nu}_e \nu_e)(\bar{\nu}_e \nu_e)]. \end{aligned} \qquad (4.12)$$

Мы видим, что в данном выражении нет членов, ответственных за μ – распад (эти члены сократились xx/ , благодаря тождествам (4.11)). Следовательно, четырехфермионный лагранжиан слабого взаимодействия лептонов в нашем подходе, помимо $O(5)$ – инвариантной части, обязательно должен содержать дополнительные слагаемые. Естественно интерпретировать эти слагаемые как возмущение, нарушающее симметрию относительно группы $O(5)$. Тогда их структура будет однозначно определяться принятой нами (см. § 2) схемой нарушения этой симметрии

$$O(5) \supset SU(2) \times U_\eta(1) \supset U_{t_3}(1) \times U_\eta(1) \qquad (4.14)$$

и требованием, чтобы все четырехфермионные взаимодействия строились из компонент квинтета (4.9). Так, например, переход к симметрии, соответствующей подгруппе $g = SU(2) \times U_\eta(1)$, обеспечивается за счет добавления к (4.10) членов вида $\Delta L = (j_4^2 + j_5^2)$, или, что эквивалентно, $\Delta L = (j_1^2 + j_2^2 + j_3^2)$. Полученный в результате g –инвариантный лагранжиан имеет вид:

$$L_{\ell\ell} = \frac{G'}{\sqrt{2}}\, j_n^2 + \frac{G}{\sqrt{2}}(j_4^2 + j_5^2)\,. \qquad (4.15)$$

Сравнивая (4.15) и (4.7), заключаем, что обычное слабое взаимодействие лептонов, описываемое лагранжианом (4.7) и приводящее, в частности, к распаду μ –мезона,

x/ Напомним, что в теории q –чисел соотношение Фирца для ($V - A$)–варианта четырехфермионного взаимодействия имеет вид:

$$(\bar{\psi}_1 \psi_2)(\bar{\psi}_3 \psi_4) = (\bar{\psi}_1 \psi_4)(\bar{\psi}_3 \psi_2) = (\bar{\psi}_3 \psi_2)(\bar{\psi}_1 \psi_4)\,. \qquad (4.11)$$

xx/ Заметим, что такого рода сокращения в лагранжиане (4.10) не приводят к потере $O(5)$ –инвариантности. Действительно, записывая (4.10) в виде,аналогичном (3.47), и учитывая антисимметрию матрицы h ,(4.11) и (3.16), будем иметь

$$L'_{\ell\ell} = \frac{G'}{4\sqrt{2}}(\bar{\psi}_\lambda \psi^\lambda)(\bar{\psi}_\sigma \psi^\sigma)\,, \qquad (4.13)$$

что совпадает с (4.12).

в лагранжиане четырехфермионного взаимодействия (4.15) играет роль возмущения, понижающего исходную $O(5)$ – симметрию до g –симметрии. Ясно также, что при $G'=0$ (4.15) совпадает с (4.7). В явном виде после приведения подобных членов лагранжиан (4.15) записывается следующим образом:

$$
\begin{aligned}
L_{\ell\ell} = {} & \frac{G}{\sqrt{2}}[(\bar{\mu}\nu_\mu)(\bar{\nu}_e e)+(\bar{e}\nu_e)(\bar{\nu}_\mu \mu)]+ \\
& +\frac{2G+G'}{2\sqrt{2}}[(\bar{\mu}\nu_\mu)(\bar{\nu}_\mu \mu)+(\bar{e}\nu_e)(\bar{\nu}_e e)]+ \\
& +\frac{G'}{2\sqrt{2}}[(\bar{\mu}\mu)(\bar{e}e)+(\bar{\nu}_\mu \nu_\mu)(\bar{\nu}_e \nu_e)+(\bar{\mu}\mu)(\bar{\nu}_e\nu_e)+ \\
& +(\bar{e}e)(\bar{\nu}_\mu \nu_\mu)+\tfrac{1}{2}(\bar{\mu}\mu)(\bar{\mu}\mu)+\tfrac{1}{2}(\bar{e}e)(\bar{e}e)+\tfrac{1}{2}(\bar{\nu}_\mu \nu_\mu)(\bar{\nu}_\mu \nu_\mu)+ \\
& +\tfrac{1}{2}(\bar{\nu}_e\nu_e)(\bar{\nu}_e\nu_e)].
\end{aligned}
\tag{4.16}
$$

Слагаемые в первой квадратной скобке, отвечающие за распады $\mu^{\pm}$ –мезонов и родственные им процессы рассеяния $\mu+\nu_e \to e+\nu_\mu$, $\mu+\bar{\nu}_\mu \to e+\bar{\nu}_e$ и т.п., перешли из обычной теории в данную схему без всякого изменения. Члены из второй квадратичной скобки (4.16) также содержатся в обычном лагранжиане (4.7), но входят в последний с константой $\frac{G}{\sqrt{2}}$. Соответствующие процессы (рассеяние $e\nu_e$, $e\bar{\nu}_e$, $\mu\nu_\mu$ и т.д.), непосредственно еще не наблюдались. На основании данных, полученных в известных экспериментах Коуэна и Райнеса, можно сделать вывод, что

$$
\left|\frac{G'}{G}\right| < 50. \tag{4.17}
$$

Остальные слагаемые в (4.16) описывают процессы "слабого" рассеяния лептонов, индуцированные нейтральными токами и, следовательно, не предсказываемые обычной теорией[x/]. Поэтому их обнаружение представляло бы особый интерес.

Поскольку добавление в лагранжиан взаимодействия членов $\sim(j_4^2+j_8^2)$ приводит к выделению из лептонного "супермультиплета" ψ^a дублетов ℓ и ν, то можно предполагать, что при этом возникает некоторое расщепление масс ℓ – и ν – лептонов. Чтобы полностью выяснить этот вопрос, необходимо специальное исследование, которое мы здесь проводить не будем, ограничившись чисто феноменологическим рассмотрением массового расщепления в следующем параграфе.

Изучение тензорных свойств оператора электромагнитного тока (4.3) указывает на то, что электромагнитные взаимодействия лептонов тоже понижают $O(5)$ –симмет-

---

[x/] Слово "слабое" мы здесь взяли в кавычки, чтобы подчеркнуть, что константы G и G', вообще говоря, не равны между собой.

рию, сводя ее к симметрии относительно группы g (ср. с примечанием на стр. 6). При этом в лептонном "супермультиплете" обязательно возникает расщепление масс ℓ – и ν –частиц.

Для перехода от g –симметрии к симметрии реальных лептонов, отвечающей группе $U_{t_3}(1) \times U_\eta(1)$ (см. (4.14)), в полный лагранжиан необходимо ввести дополнительное возмущение ΔL с подходящими тензорными свойствами. Если это слагаемое имеет четырехфермионную природу, то из компонент квинтета J_n оно строится однозначно:

$$
\begin{aligned}
\Delta L = {} & \frac{G''}{\sqrt{2}} j_8^2 = \frac{G''}{4\sqrt{2}}[(\bar{\mu}\mu)(\bar{\mu}\mu)+(\bar{e}e)(\bar{e}e)+(\bar{\nu}_\mu \nu_\mu)(\bar{\nu}_\mu \nu_\mu)+ \\
& +(\bar{\nu}_e \nu_e)(\bar{\nu}_e \nu_e)+2(\bar{\mu}\mu)(\bar{\nu}_e \nu_e)+2(\bar{e}e)(\bar{\nu}_\mu \nu_\mu)- \\
& -2(\bar{\mu}\mu)(\bar{\nu}_\mu \nu_\mu)-2(\bar{e}e)(\bar{\nu}_e \nu_e)-2(\bar{\mu}\mu)(\bar{e}e)- \\
& -2(\bar{\nu}_\mu \nu_\mu)(\bar{\nu}_e \nu_e)].
\end{aligned}
\tag{4.18}
$$

Можно ожидать, что взаимодействие (4.18), снимающее вырождение по t –спину, индуцирует наблюдаемое расщепление масс мюона и электрона. Заметим, кстати, что в ряде работ[6,10] лагранжианы типа $(\bar{\mu}\mu)(\bar{e}e)$, $(\bar{\mu}\mu)(\bar{\mu}\mu)$ и $(\bar{e}e)(\bar{e}e)$ рассматривались именно с целью объяснить различие в массах μ и e.

Однако в отличие от рассматриваемого выше механизма нарушения $O(5)$ –симметрии, когда требование четырехфермионной структуры возмущения было строго обязательным, поскольку иначе теория не предсказывала бы μ –распада, в данном случае в таком требовании необходимости нет. Поэтому вместо (4.18) целесообразно рассматривать взаимодействие более простой структуры. В частности, по аналогии с $SU(3)$ – схемой, можно просто предположить, что g –симметрия переходит в $U_{t_3}(1) \times U_\eta(1)$– симметрию при "включении" разности масс $\mu - e$ (ср. с[2]).

§ 5. Массовая формула

В данном параграфе мы получим приближенную массовую формулу для лептонов, исходя лишь из предположения, что первоначальная $O(5)$ –симметрия нарушена согласно редукции (4.14). При этом для нас будет несущественно, внесено ли массовое расщепление в полный лагранжиан с самого начала или оно индуцировано каким-то взаимодействием, нарушающим $O(5)$ –симметрию (ср. с рассуждениями в конце § 4).

В первом приближении массовый оператор M является билинейными выражением по лептонным полям ψ и поэтому должен строиться из компонент тензоров (3.41), содержащихся в правой части разложения (3.42). С другой стороны, учитывая (4.14), заключаем, что допустимы лишь те компоненты из (3.41), которые инвариантны относительно преобразований группы $U_{t_3}(1) \times U_{\eta}(1)$. В итоге, очевидно, будем иметь:

$$M = a\bar{\psi}\psi + \tfrac{1}{2} b\bar{\psi}\Gamma_3\psi + \frac{c}{2i}\bar{\psi}\Gamma_1\Gamma_2\psi + \frac{d}{2i}\bar{\psi}\Gamma_4\Gamma_5\psi\ , \tag{5.1}$$

где a, b, c, d – произвольные вещественные постоянные (численные множители введены для удобства). Опуская ψ -функции и принимая во внимание (3.21), (3.26) и (3.27), можно выразить массовый оператор (5.1) через диагональные генераторы группы $O(5)$ [x/]:

$$M = a + bt_3\eta + ct_3 + d\cdot\eta\ . \tag{5.2}$$

Ясно, что из этой формулы нельзя получить какого-либо соотношения между массами лептонов, поскольку число произвольных постоянных в (5.2) равно числу самих лептонов. Единственный вывод, который следует отсюда, состоит в том, что все четыре лептонные массы, вообще говоря, различны.

Заметим, что к тем же результатам приводит и другая редукция $O(5)$:

$$O(5) \supset U_{t_3}(1) \times SU_{\eta}(2) \supset U_{t_3} \times U_{\eta}(1), \tag{5.3}$$

где $SU_{\eta}(2)$ изоморфна группа трехмерных вращений в подпространстве (3,4,5). Относительно группы $U_{t_3}(1) \times SU_{\eta}(2)$ лептоны, очевидно, образуют дублеты, внутри которых $t_3 = const$, а η изменяется:

$$\psi^{(\mu)} = \begin{vmatrix} \mu \\ \nu_{\mu} \end{vmatrix}\ , \qquad \psi^{(e)} = \begin{vmatrix} e \\ \nu_e \end{vmatrix} \tag{5.4}$$

Такого рода дублеты неоднократно рассматривались в литературе[11,12,6].

Если проводить аналогию между $O(5)$ и $SU(3)$, то можно сказать, что редукция (4.14) соответствует редукции $SU(3)$ по U -спину, тогда как (5.3) напоминает редукцию $SU(3)$ по I -спину.

Хотя здесь нам не понадобится общая массовая формула, пригодная для описания расщепления масс любого $O(5)$ -мультиплета, мы приведем ее в расчете на будущие приложения:

[x/] Массовые формулы типа (5.2) для лептонов обсуждаются в работах[13,14], причем в[14] рассмотрение проводится в рамках группы $SU(4)$.

$$M = M_0 + M_1 t_3 + M_2\eta + M_3(\xi_3 - t_3\eta)\ , \tag{5.5}$$

где ξ_3 определяется в (3.31). Нетрудно убедиться, что в представлении 4

$$\xi_3 = -2t_3\eta\ , \tag{5.6}$$

и потому соотношения (5.6) и (5.2) эквивалентны.

Оператор (5.5) строится с помощью стандартной процедуры Окубо[15] из инвариантных относительно группы $U_{t_3}(1) \times U_{\eta}(1)$ компонент тензоров, возникающих в произведении матрицы генераторов A^{i}_{j} (см. (П.7)) на саму себя. При этом в упомянутом произведении, имеющем вид[8]

$$10 \times 10 = 1 + 5 + 10 + 14 + 35 + 35'\ , \tag{5.7}$$

принимаются во внимание лишь три первых члена в правой части.

§ 6. Квинтет слабых токов и промежуточный векторный бозон

Согласно §4, слабые лептонные токи преобразуются по представлению 5 группы $O(5)$, составляя вместе квинтет (4.4)-(4.5). Поскольку 5 не есть присоединенное представление группы (таковым является представление 10), то векторные токи, входящие в квинтет j^{λ}_{n} $(n = 1,2,\dots,5\ ;\ \lambda = 0,1,2,3)$, не обязаны быть сохраняющимися и соответственно пространственные интегралы от их временных компонент

$$Q_n = \int j^{0}_{V,n}\, d^3\vec{x} \tag{6.1}$$

не генерируют группу $O(5)$. Отсюда же следует, что в данной схеме нельзя, рассуждая в духе Янга-Миллса, получить взаимодействие тока $j^{\lambda}_{V,n}$ (и, в конечном итоге, тока j^{λ}_{n}) с некоторым векторным бозонным полем, преобразующимся по присоединенному представлению 10. Таким образом, гипотеза о существовании промежуточного W -мезона в слабых взаимодействиях, формулируемая в рамках калибровочной теории векторных полей, с точки зрения развиваемого подхода теряет свое содержание.

Наша схема, очевидно, не запрещает, взаимодействия j^{λ}_{n} с векторным полем, преобразующимся по представлению 5. Однако, если учесть, что все известные на сегодня векторные частицы отвечают присоединенным представлениям соответствующих групп симметрии и могут быть "получены" приемом Янга-Миллса, то выделенность в этом отношении квинтета W -мезонов порождает серьезные сомнения в его существовании.

Теперь выпишем некоторые соотношения, вытекающие из трансформационных свойств заряженных слабых токов и электромагнитного тока j_λ^{em}. При пятимерных вращениях (3.1) операторы j_n, очевидно, преобразуются по закону

$$U^{-1} j_n U = a_{nm} j_m , \tag{6.2}$$

где $U = e^{i\sum_{k\ell}\theta_{k\ell}\mathcal{M}_{k\ell}}$ – матрица, действующая в пространстве векторов состояний. Принимая во внимание тензорные свойства оператора электромагнитного тока j_λ^{em} (см. (4.3)), а также (2.13), (3.18), (3.21), (3.27) и (3.35), находим без труда:

$$\begin{aligned} &[\int j_0^{em} d^3x , j_5^\lambda] = i j_4^\lambda , \\ &[\int j_0^{em} d^3x , j_4^\lambda] = - i j_5^\lambda , \end{aligned} \tag{6.3}$$

или

$$\begin{aligned} &[\int j_0^{em} d^3x , j_\lambda] = j_\lambda , \\ &[\int j_0^{em} d^3x , j_\lambda^+] = - j_\lambda^+ . \end{aligned} \tag{6.4}$$

Смысл полученных формул настолько прозрачен, что не нуждается в пояснении. Мы хотим лишь подчеркнуть, что эти соотношения, подобно соотношениям коммутации в "алгебре токов" схем SU(3) и SU(6), могут быть использованы для получения определенных "правил сумм".

§ 7. Заключительные замечания

Наши построения показывают, что слабые и электромагнитные взаимодействия лептонов удовлетворительным образом описываются в схеме нарушенной O(5) – симметрии. Поэтому можно предположить, что группа O(5) играет для лептонов такую же важную роль, какую группа SU(3) играет для адронов[x]. И если лептоны нельзя включить в схему унитарной симметрии по причине отсутствия у них

---

[x] В этой связи представляет большой интерес работа /16/, в которой O(5)–симметрия лептонов возникает при интерпретации слабого взаимодействия между ними как эффекта искривления пространства-времени в малых областях. Заметим, что лагранжиан 4- фермионного взаимодействия (4.16) и соответствующий лагранжиан в /16/ содержат одни и те же члены, но с разными коэффициентами.

сильного взаимодействия, то имеет смысл, как это уже было отмечено в § 1, попытаться распространить лептонную O(5) –симметрию на адроны, поскольку последние участвуют в слабых взаимодействиях. При таком подходе идея "иерархии" взаимодействий ("чем слабее взаимодействие, тем ниже его симметрия"), очевидно, является неприемлемой.

Автор выражает глубокую благодарность Б.А. Арбузову, Н.Н. Ачасову, С.С.Герштейну, А.В. Ефремову, А.А. Логунову, М.А. Маркову, Р.М. Мурадяну, Л.Б. Окуню, В.В. Серебрякову, А.Н. Тавхелидзе, И.Т. Тодорову, А.Т. Филиппову и Д.В. Ширкову за плодотворные дискуссии.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Генераторы группы Sp (4)

Группа Sp(4) определяется как совокупность преобразований четырехмерного вещественного пространства, оставляющих инвариантной форму

$$(\phi , \psi) = h_{\alpha\beta}\, \phi^\alpha \psi^\beta = \phi^\alpha \psi_\alpha \;;\; \alpha,\beta = 1,2,3,4 , \tag{П.1}$$

где метрический тензор h удовлетворяет требованиям:

$$h_{\alpha\beta} = - h_{\beta\alpha} = - h^{\alpha\beta} = h^{\beta\alpha} \;;\; \det h = 1 \;;\; h^2 = -1 . \tag{П.2}$$

Конкретное представление для h мы выберем здесь то же, что и в § 3:

$$\| h_{\alpha\beta} \| = \begin{pmatrix} 0 & -i\sigma_2 \\ -i\sigma_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{П.3}$$

В формализме Sp(4) в силу условий (П.1) и (П.2) генераторы группы и ее параметры нумеруются парой симметричных индексов, пробегающих четыре значения, в то время как в O(5) для этой цели используется пара пятимерных антисимметричных индексов (см. (3.18)-(3.19)). Таким образом, инфинитезимальные преобразования имеют вид:

$$S = 1 + i \sum_{k,\ell} \theta_{k\ell}\, A^{k\ell} \;;\; k,\ell = 1,2,3,4 ,$$

причем

$$A^{k\ell} = A^{\ell k}, \qquad \theta_{k\ell} = \theta_{\ell k}. \tag{П.4}$$

Перестановочные соотношения для генераторов A выглядят так:

$$[A^{ij}, A^{k\ell}] = \frac{1}{i}(h^{ik}A^{j\ell} + h^{j\ell}A^{ik} + h^{i\ell}A^{jk} + h^{jk}A^{i\ell}). \tag{П.5}$$

Нетрудно установить, что в низшем представлении $\underline{4}$ справедлива формула:

$$(A^{ij})^{\alpha}_{\beta} = h^{\alpha i}\delta^{j}_{\beta} + h^{\alpha j}\delta^{i}_{\beta}. \tag{П.6}$$

Если с помощью тензора h опустить один индекс у тензора A^{ij}, то в результате получится смешанный тензор A^{i}_{j}, который полностью аналогичен матрицам генераторов в схемах $SU(2)$, $SU(3)$ и $SU(6)$ (см., например, /17/):

$$\| A^{i}_{j} \| = \begin{pmatrix} t_3 - \eta & t_- & \gamma_3 + i\rho_3 & \gamma_- + i\rho_- \\ t_+ & -t_3 - \eta & \gamma_+ + i\rho_+ & -\gamma_3 - i\rho_3 \\ \gamma_3 - i\rho_3 & \gamma_- - i\rho_- & t_3 + \eta & t_- \\ \gamma_+ + i\rho_+ & -\gamma_3 + i\rho_3 & t_+ & -t_3 + \eta \end{pmatrix} \tag{П.7}$$

(операторы $\vec{t}$, η, $\vec{\gamma}$ и $\vec{\rho}$ определены выше равенствами (3.26),(3.27) и (3.29) (3.29)).

Литература

1. C. Lovelace. A Theory of Elementary Particles, preprint ICTP (64) 66 (1964).
2. F. Gürsey. G.Feinberg. Phys. Rev., 128, 378 (1962).
3. T.D. Lee. Nuovo Cim., 35, 945 (1965).
4. T.D. Lee. Weak Interactions and Questions of C, P, T Noninvariances (the Lecture Given at the Oxford International Conference on Elementary Particles), September, 1965.

5. E. Konopinski, H.Mahmoud. Phys. Rev., 92, 1045 (1953).
6. M.A. Markov. Nucl. Phys., 55, 130 (1964); Нейтрино. Издательство "Наука". Москва (1964).
7. Б. Понтекорво. ЖЭТФ, 37, 1751 (1959); M.A. Markov. K-Mesonen und Hyperonen, Berlin, 1960.
8. R.E. Behrends, J.Dreitlein, C. Fronsdal, W. Lee. Rev. Mod. Phys., 34, 1 (1962).
9. G.Feinberg, S.Weinberg. Phys. Rev. Lett., 6, 381 (1961).
10. Ю.А. Гольфанд. ЖЭТФ, 37, 1493 (1959).
11. Я.Б. Зельдович. ЖЭТФ, 36, 964 (1958).
12. S.A. Bludman. Nuovo Cim., 9, 433 (1958).
13. H. Katsumari. Progr. Theor. Phys., 33, 755 (1965).
14. N.N. Achasov. Phenomenological Mass Formulas for Leptons and Group Symmetries, Препринт ТФ-16, Новосибирск (1965).
15. S. Okubo. Progr. Theor. Phys., 27, 949 (1962).
16. Б.А. Арбузов. ЖЭТФ, 48, 1285 (1964).
17. В.Г. Кадышевский, Р.М. Мурадян, Я.А. Смородинский. SU(6) -симметрия в сильных и электромагнитных взаимодействиях элементарных частиц. Препринт ОИЯИ, Р-2061, Дубна, 1965.

Рукопись поступила в издательский отдел
28 января 1965 г.

ЗАМЕЧАНИЕ ПРИ КОРРЕКТУРЕ

Возможные свойства симметрии лептонов изучаются в недавней работе Н.Н. Ачасова и Р.М. Мурадяна "О симметриях лептон-лептонных взаимодействий" (препринт ОИЯИ, Р-2523, Дубна, 1966).