ЯФ, 1966, т.4, в.4, с.853-861

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р-2559

В.И. Огиевецкий, И.В. Полубаринов

ВОСЬМИРИЧНЫЙ ФОРМАЛИЗМ В SU(3) И 10- И 27-ПЛЕТЫ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1966

P-2559

В.И. Огиевецкий, И.В. Полубаринов

ВОСЬМИРИЧНЫЙ ФОРМАЛИЗМ В SU(3) И 10- И 27-ПЛЕТЫ

Направлено в журнал "Ядерная физика"

1. Введение

В настоящее время при изучении следствий из SU(3) инвариантности широко используется кварковый формализм, в котором октет представляется тензором с двумя индексами, декаплет – тензором с тремя индексами, а для описания представления 27 требуется уже четыре индекса. Это очень удобно в случае низших представлений, однако, становится несколько громоздким из-за обилия индексов уже для мультиплетов 10 и 27. В группе вращений или в группе Лоренца для описания целого спина чаще используют не спинорный (соответствующий кварковому), а векторный формализм. Подобно этому, в группе SU(3) представления $D(p,q)$ с $p=q\,(\mathrm{mod}\,3)$, соответствующие целому заряду и гиперзаряду, можно описывать в "векторном", восьмиричном формализме. Тогда октеты представляются величинами с одним индексом, пробегающим 8 значений, а 10-плеты и 27-плеты – тензорами только с двумя индексами, что позволяет расставить их на шахматной доске, т.е. изобразить их плоскими матрицами 8×8, подобно тому, как октет в кварковом подходе изображают матрицей 3×3. В настоящей статье построена соответствующая система матриц размерности 8×8 и исследована их алгебра. Заодно установлен ряд соотношений (большинство из которых мы не встречали в литературе) для структурных констант SU(3). Развиваемая алгебра полезна при анализе структур амплитуд и взаимодействий, а также при вычислении сечений процессов с участием 10-и 27-плетов. В Приложении приведены формулы для произведений матриц, шпуры и связи между четырехоктетными амплитудами типа тождеств Фирца.

2. Матрицы f_a и d_a

В стандартном, кварковом подходе к группе SU(3) основой служат 3×3 матрицы λ_a, определяющие преобразования кварков и, тем самым, любого представления этой группы. Согласно Гелл-Манну [1], эти матрицы подчиняются перестановочным соотношениям

$$[\lambda_a, \lambda_b] = 2if_{abc}\lambda_c \qquad (1)$$

$$\{\lambda_a, \lambda_b\} = \frac{4}{3}\delta_{ab} + 2d_{abc}\lambda_c . \qquad (2)$$

Введем матрицы f_b и d_b размерности 8x8 следующим образом:

$$f_b = \| f_{abc} \|, \qquad d_b = \| d_{abc} \|, \qquad (3)$$

где a – номер строки, а c – номер столбца, на пересечении которых стоят элементы f_{abc} и d_{abc}. С помощью таблиц Гелл-Манна [1] для структурных констант f_{abc} и d_{abc}, легко воспроизвести эти матрицы в явном виде (см. Приложение 1). Коэффициенты f_{abc} абсолютно антисимметричны, а d_{abc} абсолютно симметричны относительно перестановок индексов. Отсюда в частности следует, что

$$\tilde{f}_a = -f_a, \qquad \tilde{d}_a = d_a, \qquad (4)$$

где ~ означает транспонирование. Далее, тождества Якоби для f_{abc} и d_{abc} [1] в матричной форме записываются

$$[f_a, f_b] = f_{abc} f_c \qquad (5)$$

$$[f_a, d_b] = [d_a, f_b] = f_{abc} d_c \qquad (6)$$

$$d_a f_b + d_b f_a = f_a d_b + f_b d_a = d_{abc} f_c . \qquad (6')$$

Важную роль для дальнейшего играют соотношения

$$(\{d_a, d_b\} + d_{abc} d_c)_{ij} = \frac{1}{3}(\delta_{ai}\delta_{bj} + \delta_{aj}\delta_{bi} + \delta_{ab}\delta_{ij}) \qquad (7)$$

$$(f_b f_a - d_a d_b + d_{abc} d_c + \frac{2}{3}\delta_{ab})_{ij} = \frac{2}{3}\delta_{bj}\delta_{ai} . \qquad (8)$$

Антисимметричная и симметричная части последнего имеют вид:

$$([f_a, f_b] + [d_a, d_b])_{ij} = -\frac{2}{3}(\delta_{ai}\delta_{bj} - \delta_{aj}\delta_{bi}) \qquad (8')$$

$$(\{f_a, f_b\} - \{d_a, d_b\} + \frac{4}{3}\delta_{ab} + 2d_{abc} d_c)_{ij} = \frac{2}{3}(\delta_{ai}\delta_{bj} + \delta_{aj}\delta_{bi}) . \qquad (8'')$$

Соотношение (7) эквивалентно тождеству [2] в кварковом формализме между унитарными инвариантами, построенными из четырех октетов. В матричной форме правая часть (8) есть матрица, у которой отличен от нуля только один элемент на пересечении a-й строки с b-м стобцом. Таким образом, формула (8) дает представление любой из полной системы 64-х таких 8x8 матриц через f_a, d_a и 1.

Именно в этой связи соотношение (8) послужит ниже основой для получения соотношения полноты. Далее, соотношения (8') и (8'') дают представление для антисимметричной и симметричной матриц, соответственно, у которых отличны от нуля лишь 2 элемента на пересечении a-й строки с b-м столбцом и b-й строки с a-м столбцом. Если в формуле (7) перенести член $\frac{1}{3}\delta_{ab}\delta_{ij}$ в левую часть равенства, то мы получим еще одно представление для такой симметричной матрицы. Исключая отсюда и из (8'') эту матрицу, находим соотношение:

$$3\{d_a, d_b\} - \{f_a, f_b\} = 2\delta_{ab} . \qquad (9)$$

Формулы (5), (6) и (9) составляют основу алгебры матриц f_a и d_a.

При вычислениях удобно пользоваться соотношениями

$$f_a f_a = -3 \qquad (10)$$

$$f_a d_a = d_a f_a = 0 \qquad (11)$$

$$d_a d_a = \frac{5}{3} . \qquad (12)$$

Первое из них можно вывести из (1), учитывая, что $\lambda_a\lambda_a = \frac{16}{3}$ и $\lambda_a\lambda_b\lambda_a = -\frac{2}{3}\lambda_b$. Второе есть следствие полной асимметрии и симметрии коэффициентов f_{abc} и d_{abc}. Соотношение (12) следует из (9) и (10). Кубичные соотношения для матриц f_a и d_a, а также шпуры произведений этих матриц приведены в Приложении.

3. Полная система матриц 8x8, основанная на матрицах f_a и d_a

Дополним матрицы 1, f_a и d_a до полной системы матриц 8x8, для чего введем матрицы c_{ab}, e_{ab} и e^+_{ab}, определение которых дается в таблице 1.

Таблица 1

		Число независимых матриц	
1.	1	1	
2.	f_a	8	
3.	d_a	8	
4.	$c_{ab} = ½\{f_a, f_b\} + \frac{3}{8}\delta_{ab} + \frac{9}{10} d_{abc} d_c$	27	(13)
5.	$e_{ab} = f_a d_b - d_a f_b + \frac{i}{6}(5[f_a, f_b] + 9[d_a, d_b])$	10	(14)
6.	$e^+_{ab} = -f_a d_b + d_a f_b + \frac{i}{6}(5[f_a, f_b] + 9[d_a, d_b])$	10	(15)

Матрицы 1 , d_a и c_{ab} эрмитовы, матрицы f_a антиэрмитовы, а матрицы e_{ab} и e^+_{ab} эрмитово сопряжены друг другу. При этом матрицы 1 , d_a и c_{ab} симметричны, и среди них 36 независимых. Матрицы f_a , e_{ab} и e^+_{ab} анти-симметричны, причем независимых 28. Число независимых матриц можно подсчитать путем анализа дополнительных условий. Так, матрицы c_{ab} удовлетворяют условиям:

$$c_{ba} = c_{ab}\ , \qquad c_{aa} = 0\ , \qquad d_{abc}\, c_{bc} = 0. \tag{16}$$

Здесь всего 28 + 1 + 8 = 37 условий, свидетельствующих, что только 27 матриц c_{ab} линейно независимы. Матрицы e_{ab} и e^+_{ab} удовлетворяют дополнительным условиям:

$$\text{a)}\ e_{ba} = -e_{ab}\ , \qquad \text{b)}\ f_{abc}\, e_{bc} = 0\ , \qquad \text{c)}\ (u_{ab})_{cd}\, e_{cd} = -2i\, e_{ab} \tag{17}$$

$$\text{a)}\ e^+_{ba} = -e^+_{ab}\ , \qquad \text{b)}\ f_{abc}\, e^+_{bc} = 0\ , \qquad \text{c)}\ (u_{ab})_{cd}\, e^+_{cd} = 2i\, e^+_{ab}\ , \tag{18}$$

где $(u_{ab})_{cd}$ - элемент матрицы:

$$u_{ab} = f_a d_b - d_a f_b \tag{19}$$

со свойствами

$$u_{ab} = -u_{ba}\ , \quad (u_{ab})_{cd} = -(u_{cd})_{ab}\ , \quad (u_{ab})_{cd}(u_{cd})_{ef}\, u_{ef} = -4u_{ab}\ . \tag{20}$$

Матрицы e_{ab} и e^+_{ab} можно выразить через u_{ab}

$$e_{ab} = u_{ab} + \frac{i}{2}(u_{ab})_{cd}\, u_{cd}\ , \qquad e^+_{ab} = -u_{ab} + \frac{i}{2}(u_{ab})_{cd}\, u_{cd}\ . \tag{21}$$

Соотношения (20) и (21) позволяют без труда проверить (17c) и (18c). Ввиду дополнительных условий (17) и (18) среди матриц e_{ab} и e^+_{ab} имеется только по 10 линейно независимых.

Разбиение 64 матриц (8x8) на 1 , f_a , d_a , c_{ab} , e_{ab} и e^+_{eb} аналогично разбиению 16 матриц (4x4) на дираковские матрицы 1 , γ_μ , $\gamma_\mu\gamma_5$, $\sigma_{\mu\nu}$ и γ_5 . Эти пять семейств дираковских матриц взаимно-ортогональны, т.е. шпуры произведений матриц из разных семейств обращаются в нуль. В точности так же взаимно-ортогональны семейства 1 , f_a , d_a , c_{ab} , e_{ab} и e^+_{ab} , что видно из таблицы 2. При этом ввиду неэрмитовости матриц e_{ab} и e^+_{ab} скалярное произведение матриц A и B определено как

$$(A, B) = Sp\,(A^+ B\ ). \tag{22}$$

Таблица 2 $Sp(A^+B)$.

1	8					
f_a	0	$3\delta_{ac}$				
d_a	0	0	$\frac{5}{3}\delta_{ac}$			
c_{ab}	0	0	0	$(c_{ab})_{cd}$		
e_{ab}	0	0	0	0	$4i(e_{ab})_{cd}$	
e^+_{eb}	0	0	0	0	0	$4i(e^+_{ab})_{cd}$
B / A	1	f_c	d_c	c_{cd}	e_{cd}	e^+_{cd}

Отметим, что

$$(c_{ab})_{cd} = (c_{cd})_{ab}\ , \qquad (e_{ab})_{cd} = (e^+_{cd})_{ab}\ . \tag{23}$$

Различные произведения матриц разложимы по полученной полной системе. Например,

$$f_a f_b = -\frac{3}{8}\delta_{ab} + \frac{1}{2} f_{abc} f_c - \frac{9}{10} d_{abc} d_c + c_{ab} \tag{24}$$

$$f_a d_b = \frac{1}{2} d_{abc} f_c + \frac{1}{2} f_{abc} d_c + \frac{1}{4}(e_{ab} - e^+_{ab})\ . \tag{25}$$

$$d_a d_b = \frac{5}{24}\delta_{ab} - \frac{5}{18} f_{abc} f_c - \frac{3}{10} d_{abc} d_c + \frac{1}{3} c_{ab} + \frac{1}{12}(u_{ab})_{cd}(e_{cd} - e^+_{cd})\ . \tag{26}$$

Разложения симметричных и антисимметричных матриц с двумя отличными от нуля элементами записываются

$$\delta_{ai}\ \delta_{bj} + \delta_{aj}\ \delta_{bi} = \left(\frac{1}{4}\delta_{ab} + \frac{6}{5}\ d_{abc}\ d_c + 2\,c_{ab}\right)_{ij}\ , \qquad (27)$$

$$\delta_{ai}\ \delta_{bj} - \delta_{aj}\ \delta_{bi} = \left[-\frac{2}{3} f_{abc}\ f_c - \frac{1}{4}(u_{ab})_{cd}\,(e_{cd} - e^+_{cd})\right]_{ij}\ . \qquad (28)$$

Отметим также, что

$$d_{abc}\ f_b\ f_c = -f_{abc}\ d_b\ f_c = -f_{abc}\ f_b\ d_c = -\frac{3}{2} d_a\ , \qquad (29)$$

$$f_{abc}\ f_b\ f_c = 3/2\ f_a\ . \qquad (29')$$

Тот факт, что матрицы

$1,\ f_a\ ,\ d_a\ ,\ c_{ab}\ ,\ e_{ab}$ и e^+_{ab}

образуют полную систему, выражается соотношением полноты

$$\delta_{ij}\ \delta_{k\ell} - \frac{8}{3}(f_a)_{ij}\ (f_a)_{k\ell} + \frac{24}{5}(d_a)_{ij}\ (d_a)_{k\ell}\ + \qquad (30)$$

$$+\,8\,(c_{a\ell})_{ij}\ (c_{ab})_{k\ell} + \frac{1}{2}(e_{ab})_{k\ell}\ (e_{ab})_{k\ell} + \frac{1}{2}(e^+_{ab})_{ij}\ (e_{ab})_{k\ell} = 8\,\delta_{i\ell}\ \delta_{jk}$$

или, только через вещественные матрицы

$$\delta_{ij}\ \delta_{k\ell} - \frac{8}{3}(f_a)_{ij}\,(f_a)_{k\ell} + \frac{24}{5}(d_a)_{ij}\,(d_a)_{k\ell}\ + \qquad (30')$$

$$+\ 8\,(c_{ab})_{ij}\,(c_{ab})_{k\ell} - 2\,(u_{ab})_{ij}\,(u_{ab})_{k\ell} = 8\delta_{i\ell}\,\delta_{jk}\ .$$

Соотношение полноты следует из (8) с использованием (26) и (27)[x]. С его помощью можно найти тождества для четырехоктетных амплитуд типа тождеств Фирца (см. Приложение 2).

---

x) При этом удобно расписать (8) в индексах, представить в левой части члены, содержащие d , в виде $[d_a, d_j]_{ib}$, а член с символами Кронекера - в виде $\delta_{ab}\,\delta_{ij} + \delta_{ai}\,\delta_{bj} - \delta_{ai}\,\delta_{bj}$, и далее заменить коммутатор с помощью (26), а $\delta_{ab}\,\delta_{ij} + \delta_{ai}\,\delta_{bj}$ - с помощью (27).

4. Разложение прямого произведения двух октетов

С помощью найденных матриц можно произвести разложение прямого произведения двух октетов $8 \otimes 8 = 1 \oplus 8 \oplus 8 \oplus 27 \oplus 10 \oplus 10^*$. Пусть два столбца (1×8) ϕ и η - суть волновые функции двух октетов SU(3) , преобразующиеся по закону

$$\delta\phi = \omega_b\, f_b\,\phi \qquad \text{т.е.}\quad \delta\phi_a = \omega_b\, f_{abc}\ \phi_c\ . \qquad (31)$$

Искомое разложение получается, если образовать из η и ϕ билинейные комбинации с матрицами 1 , f_a , d_a , c_{ab} , e_{ab} и e^+_{ab} :

$\tilde{\eta}\, 1\phi = \tilde{\eta}\,\phi$ - синглет (D(0,0)

$\tilde{\eta}\, f_a\phi$ и $\tilde{\eta}\, d_a\phi$ - октеты D(1,1)

$\tilde{\eta}\, c_{ab}\,\phi$ 27-плет D(2,2)

$\tilde{\eta}\ e_{ab}\ \phi$ 10-плет D(3,0)

$\tilde{\eta}\, e^+_{ab}\ \phi$ 10*-плет D(0,3) .

Действительно, из (31) сразу же следует, что билинейная комбинация $\tilde{\eta}\phi$ - инвариант, а с учетом структурных соотношений (5) и (6), что $\tilde{\eta}\, f_a\,\phi$ и $\tilde{\eta}\ d_a\,\phi$ преобразуется снова по закону октета (31). Остальные билинейные комбинации преобразуются как восьмиричный тензор второго ранга

$$\delta\, V_{ab} = \omega_c\,(f_{acd}\ \ V_{db} + f_{bcd}\,V_{ad})\ . \qquad (32)$$

Они отличаются между собой дополнительными условиями, следующими из (16), (17) и (18).

5. Мультиплеты 27, 10 и 10 в восьмиричном формализме

Восьмиричный формализм удобен тем, что в нем 27-, 10- и 10-плеты описываются тензорами второго ранга V_{ab} , и поэтому они представимы в виде плоских матриц 8 х 8. Эти тензоры, обладая одним и тем же законом преобразования (32), отличаются дополнительными условиями[x]:

---

x) В кварковом формализме 27-плет, как известно, описывается тензором четвертого ранга $\phi^{ij}_{k\ell}$ с дополнительными условиями

$$\phi^{ji}_{k\ell} = \phi^{ij}_{\ell k} = \phi^{ij}_{k\ell}\ , \qquad \phi^{i\ell}_{k\ell} = 0\ ,$$

а 10- и 10*-плеты - тензорами 3-го ранга ϕ^{ijk} и ϕ_{ijk} с дополнительными условием полной симметрии по ijk .

27 - плет определяется дополнительными условиями

$$V_{ab} = V_{ba}\,,\; V_{aa} = 0\,, \qquad d_{abc}\, V_{bc} = 0\,, \tag{33}$$

10-плет - условиями

$$V_{ab} = -V_{ba}\,,\; f_{abc}\, V_{bc} = 0\,, \qquad (u_{ab})_{cd}\, V_{cd} = -2i\, V_{ab}\,, \tag{34}$$

а 10^* - плет - аналогичными условиями вида

$$V_{ab} = -V_{ba}\,,\; f_{abc}\, V_{bc} = 0\,, \quad (u_{ab})_{cd}\, V_{cd} = 2i\, V_{ab}\,. \tag{35}$$

Эти дополнительные условия непосредственно получаются (на основе (16), (17), (18)) при редукции прямого произведения, обсужденного в предыдущем разделе, а, следовательно, они справедливы и вообще.

Теперь нужно классифицировать компоненты этих тензоров V_{ab} по изотопическому спину I, его третьей проекции I_z и гиперзаряду Y, и выразить в явном виде компоненты V_{ab} в терминах соотвествующих операторов поля для частиц, входящих в мультиплеты. Поскольку частиц много, то нам представляет неудобным приписывать каждой свою букву. Поэтому мы введем символ $(I I_z Y)$ для обозначения оператора поля, уничтожающего частицу с квантовыми числами I, I_z, Y и рождающего частицу в состоянии I, $-I_z$, $-Y$. Подчеркнем, что если Ψ_o - вакуум, то $(I I_z Y)\Psi_o$ есть вектор состояния с квантовыми числами I, $-I_z$, $-Y$.

Для классификации компонент тензора достаточно построить матрицу, соответствующую данному мультиплету. С этой целью следует перевести матрицы c_{ab}, e_{ab} ... в циклический базис $c_{I I_z Y}$, $e_{I I_z Y}$, в котором они нумеруются при помощи I, I_z, Y. Для матриц 8 x 8 операторами I_z, I^2 и Y служат:

$$\begin{aligned} \hat I_z A_{I I_z Y} &= i\,[f_3, A_{I I_z Y}] = I_z A_{I I_z Y}\,, \\ \hat I^2 A_{I I_z Y} &= -\sum_{i=1}^{3} [f_i\,[f_i, A_{I I_z Y}]] = I(I+1)\, A_{I I_z Y} \\ \hat Y A_{I I_z Y} &= \frac{2i}{\sqrt 3}\,[f_8, A_{I I_z Y}] = Y A_{I I_z Y}\,. \end{aligned} \tag{36}$$

Фазы матриц внутри одного мультиплета выбираются по обычным правилам (см. [3]). Матрицу, соответствующую данному мультиплету, можно построить путем редукции прямого произведения $(I I_z Y) \times A_{I' I'_z Y'}$ до "матрицы-синглета"

$$\sqrt N \sum \langle I I_z ; I' I'_z \mid 00 \rangle \left(\begin{matrix} \mu & \mu' \\ IY & I'Y' \end{matrix} \Big| \begin{matrix} 1 \\ 00 \end{matrix} \right) (I I_z Y)\, A_{I' I'_z Y'} = \tag{37}$$

$$= \sum_{\text{по мультиплету}} (-1)^{2I - I_Z + I_H + \frac12 (Y + Y_H)}\; (I_Z I\, Y)\, A_{I - I_Z - Y}\,,$$

где первая угловая скобка означает обычный коэффициент Клебша-Гордона, а остальные обозначения те же, что и у де Сворта [3]. Этим путем получены матрицы C, E и E*, соответствующие 27-, 10- и 10^* -плетами группы SU(3).

Отметим, что матрицы $c_{I I_z Y}$, $e_{I I_z Y}$ и $e^+_{I I_z Y}$ с заданными I, I_z и Y получаются из C, E и E*, соответственно, если заменить в последних оператор поля $(I - I_z - Y)$ на единицу, а операторы с другими значениями квантовых чисел - на нули. С учетом свойства

$$(I I_z Y)^* = (-1)^{I_z + \frac12 Y}\, (I - I_z - Y) \tag{38}$$

(см. [3], формула (8.2)) матрица C эрмитова, а матрицы E и E* эрмитово сопряжены друг другу.

Что касается октета, то он в восьмиричном формализме представляется столбцом

$$\frac{1}{\sqrt 2} \left(\left(\begin{matrix} (110) - (1-10) \\ -i\,(110) - i\,(1-10) \\ -\sqrt2 (100) \\ (\frac12\, \frac12\, 1) - (\frac12 - \frac12 - 1) \\ -i(\frac12\, \frac12\, 1) - i(\frac12 - \frac12 - 1) \\ (\frac12 - \frac12\, 1) + (\frac12\, \frac12 - 1) \\ -i(\frac12 - \frac12\, 1) + i(\frac12\, \frac12 - 1) \\ -\sqrt2 (000) \end{matrix} \right)\right)$$

Однако октет можно представить также и матрицами 8 x 8, причем двояким образом, поскольку прямое произведение двух октетов содержит октет дважды:

$$F=\frac{1}{\sqrt6}\{(110)(f_1-if_2)-\sqrt2(100)f_3-(1-10)(f_1+if_2)-\sqrt2(000)f_8+$$

$$+(\frac12\,\frac12\,1)(f_4-if_5)+(\frac12-\frac12\,1)(f_6-if_7)+(\frac12\,\frac12-1)(f_6+if_7)-(\frac12-\frac12-1)(f_4+if_5)\}$$

$$D=\frac{\sqrt3}{\sqrt{10}}\{(110)(d_1-id_2)-\sqrt2(100)d_3-(1-10)(d_1+id_2)-\sqrt2(000)d_8+$$

$$+(\frac12\,\frac12\,1)(d_4-id_5)+(\frac12-\frac12\,1)(d_6-id_7)+(\frac12\,\frac12-1)(d_6+id_7)-(\frac12-\frac12-1)(d_4+id_5)\}.$$

И наконец, синглету SU(3) соответствует единичная 8 x 8 матрица $\frac{1}{\sqrt8}(000)\ 1.$

Отметим, что матрицы C , E и E* можно значительно упростить путем преобразования подобия, диагонализующего матрицы f_3 и f_8 и, тем самым, операторы гиперзаряда Y и проекции изоспина I_z .

Для описании более высоких представлений SU(3) с целыми электрическим и гиперзарядами требуются восьмиричные тензоры третьего и более высоких рангов. Однако и здесь достигается экономия в числе индексов. Например, для представления D(3,3) достаточно трех индексов, вместо шести в кварковом формализме.

$-\frac12(2\;-2\;0)+\frac{1}{\sqrt6}(2\;0\;0)-\frac12(2\;2\;0)-\frac{1}{\sqrt{120}}(0\;0\;0)$	$-\frac{i}{2}(2\;-2\;0)+\frac{i}{2}(2\;2\;0)$	$-\frac12(2\;-1\;0)+\frac12(2\;1\;0)$	$\frac{1}{\sqrt8}(\tfrac32\;-\tfrac32\;-1)-\frac{1}{\sqrt{24}}(\tfrac32\;\tfrac12\;-1)-\frac{1}{\sqrt{120}}(\tfrac12\;-\tfrac12\;1)-\frac{1}{\sqrt{120}}(\tfrac12\;\tfrac12\;-1)-\frac{1}{\sqrt{24}}(\tfrac32\;-\tfrac12\;1)+\frac{1}{\sqrt8}(\tfrac32\;\tfrac32\;1)$	$\frac{i}{\sqrt8}(\tfrac32\;-\tfrac32\;-1)-\frac{i}{\sqrt{24}}(\tfrac32\;\tfrac12\;-1)+\frac{i}{\sqrt{120}}(\tfrac12\;-\tfrac12\;1)-\frac{i}{\sqrt{120}}(\tfrac12\;\tfrac12\;-1)+\frac{i}{\sqrt{24}}(\tfrac32\;-\tfrac12\;1)-\frac{i}{\sqrt8}(\tfrac32\;\tfrac32\;1)$	$-\frac{1}{\sqrt{24}}(\tfrac32\;-\tfrac12\;-1)+\frac{1}{\sqrt8}(\tfrac32\;\tfrac32\;-1)-\frac{1}{\sqrt{120}}(\tfrac12\;\tfrac12\;1)+\frac{1}{\sqrt{120}}(\tfrac12\;-\tfrac12\;-1)-\frac{1}{\sqrt8}(\tfrac32\;-\tfrac32\;1)+\frac{1}{\sqrt{24}}(\tfrac32\;\tfrac12\;1)$	$-\frac{i}{\sqrt{24}}(\tfrac32\;-\tfrac12\;-1)+\frac{i}{\sqrt8}(\tfrac32\;\tfrac32\;-1)+\frac{i}{\sqrt{120}}(\tfrac12\;\tfrac12\;1)+\frac{i}{\sqrt{120}}(\tfrac12\;-\tfrac12\;-1)+\frac{i}{\sqrt8}(\tfrac32\;-\tfrac32\;1)-\frac{i}{\sqrt{24}}(\tfrac32\;\tfrac12\;1)$	$-\sqrt{\frac{3}{20}}(1\;-1\;0)+\sqrt{\frac{3}{20}}(1\;1\;0)$
$-\frac{i}{2}(2\;-2\;0)+\frac{i}{2}(2\;2\;0)$	$\frac12(2\;-2\;0)+\frac{1}{\sqrt6}(2\;0\;0)+\frac12(2\;2\;0)-\frac{1}{\sqrt{120}}(0\;0\;0)$	$-\frac{i}{2}(2\;-1\;0)-\frac{i}{2}(2\;1\;0)$	$\frac{i}{\sqrt8}(\tfrac32\;-\tfrac32\;-1)+\frac{i}{\sqrt{24}}(\tfrac32\;\tfrac12\;-1)-\frac{i}{\sqrt{120}}(\tfrac12\;-\tfrac12\;1)+\frac{i}{\sqrt{120}}(\tfrac12\;\tfrac12\;-1)-\frac{i}{\sqrt{24}}(\tfrac32\;-\tfrac12\;1)-\frac{i}{\sqrt8}(\tfrac32\;\tfrac32\;1)$	$-\frac{1}{\sqrt8}(\tfrac32\;-\tfrac32\;-1)-\frac{1}{\sqrt{24}}(\tfrac32\;\tfrac12\;-1)-\frac{1}{\sqrt{120}}(\tfrac12\;-\tfrac12\;1)-\frac{1}{\sqrt{120}}(\tfrac12\;\tfrac12\;-1)-\frac{1}{\sqrt{24}}(\tfrac32\;-\tfrac12\;1)-\frac{1}{\sqrt8}(\tfrac32\;\tfrac32\;1)$	$-\frac{i}{\sqrt{24}}(\tfrac32\;-\tfrac12\;-1)-\frac{i}{\sqrt8}(\tfrac32\;\tfrac32\;-1)+\frac{i}{\sqrt{120}}(\tfrac12\;\tfrac12\;1)+\frac{i}{\sqrt{120}}(\tfrac12\;-\tfrac12\;-1)-\frac{i}{\sqrt8}(\tfrac32\;-\tfrac32\;1)-\frac{i}{\sqrt{24}}(\tfrac32\;\tfrac12\;1)$	$\frac{1}{\sqrt{24}}(\tfrac32\;-\tfrac12\;-1)+\frac{1}{\sqrt8}(\tfrac32\;\tfrac32\;-1)+\frac{1}{\sqrt{120}}(\tfrac12\;\tfrac12\;1)-\frac{1}{\sqrt{120}}(\tfrac12\;-\tfrac12\;-1)-\frac{1}{\sqrt8}(\tfrac32\;-\tfrac32\;1)-\frac{1}{\sqrt{24}}(\tfrac32\;\tfrac12\;1)$	$-i\sqrt{\frac{3}{20}}(1\;-1\;0)-i\sqrt{\frac{3}{20}}(1\;1\;0)$
$-\frac12(2\;-1\;0)+\frac12(2\;1\;0)$	$-\frac{i}{2}(2\;-1\;0)-\frac{i}{2}(2\;1\;0)$	$\sqrt{\frac23}(2\;0\;0)-\frac{1}{\sqrt{120}}(0\;0\;0)$	$\frac{1}{\sqrt6}(\tfrac32\;-\tfrac12\;-1)-\frac{1}{\sqrt{120}}(\tfrac12\;\tfrac12\;1)+\frac{1}{\sqrt{120}}(\tfrac12\;-\tfrac12\;-1)-\frac{1}{\sqrt6}(\tfrac32\;\tfrac12\;1)$	$\frac{i}{\sqrt6}(\tfrac32\;-\tfrac12\;-1)+\frac{i}{\sqrt{120}}(\tfrac12\;\tfrac12\;1)+\frac{i}{\sqrt{120}}(\tfrac12\;-\tfrac12\;-1)+\frac{i}{\sqrt6}(\tfrac32\;\tfrac12\;1)$	$-\frac{1}{\sqrt6}(\tfrac32\;\tfrac12\;-1)+\frac{1}{\sqrt{120}}(\tfrac12\;-\tfrac12\;1)+\frac{1}{\sqrt{120}}(\tfrac12\;\tfrac12\;-1)-\frac{1}{\sqrt6}(\tfrac32\;-\tfrac12\;1)$	$-\frac{i}{\sqrt6}(\tfrac32\;\tfrac12\;-1)-\frac{i}{\sqrt{120}}(\tfrac12\;-\tfrac12\;1)+\frac{i}{\sqrt{120}}(\tfrac12\;\tfrac12\;-1)+\frac{i}{\sqrt6}(\tfrac32\;-\tfrac12\;1)$	$-\sqrt{\frac{3}{10}}(1\;0\;0)$
$\frac{1}{\sqrt8}(\tfrac32\;-\tfrac32\;-1)-\frac{1}{\sqrt{24}}(\tfrac32\;\tfrac12\;-1)-\frac{1}{\sqrt{120}}(\tfrac12\;-\tfrac12\;1)-\frac{1}{\sqrt{120}}(\tfrac12\;\tfrac12\;-1)-\frac{1}{\sqrt{24}}(\tfrac32\;-\tfrac12\;1)+\frac{1}{\sqrt8}(\tfrac32\;\tfrac32\;1)$	$\frac{i}{\sqrt8}(\tfrac32\;-\tfrac32\;-1)+\frac{i}{\sqrt{24}}(\tfrac32\;\tfrac12\;-1)-\frac{i}{\sqrt{120}}(\tfrac12\;-\tfrac12\;1)+\frac{i}{\sqrt{120}}(\tfrac12\;\tfrac12\;-1)-\frac{i}{\sqrt{24}}(\tfrac32\;-\tfrac12\;1)-\frac{i}{\sqrt8}(\tfrac32\;\tfrac32\;1)$	$\frac{1}{\sqrt6}(\tfrac32\;-\tfrac12\;-1)-\frac{1}{\sqrt{120}}(\tfrac12\;\tfrac12\;1)+\frac{1}{\sqrt{120}}(\tfrac12\;-\tfrac12\;-1)-\frac{1}{\sqrt6}(\tfrac32\;\tfrac12\;1)$	$-\frac12(1\;-1\;-2)+\frac{1}{\sqrt{10}}(1\;0\;0)+\sqrt{\frac{3}{40}}(0\;0\;0)-\frac12(1\;1\;2)$	$\frac{i}{2}(1\;-1\;-2)+\frac{i}{2}(1\;1\;2)$	$\frac{1}{\sqrt8}(1\;0\;-2)+\frac{1}{\sqrt{20}}(1\;-1\;0)-\frac{1}{\sqrt{20}}(1\;1\;0)-\frac{1}{\sqrt8}(1\;0\;2)$	$\frac{i}{\sqrt8}(1\;0\;-2)-\frac{i}{\sqrt{20}}(1\;-1\;0)-\frac{i}{\sqrt{20}}(1\;1\;0)+\frac{i}{\sqrt8}(1\;0\;2)$	$-\frac{3}{\sqrt{40}}(\tfrac12\;\tfrac12\;1)+\frac{3}{\sqrt{40}}(\tfrac12\;-\tfrac12\;-1)$
$\frac{i}{\sqrt8}(\tfrac32\;-\tfrac32\;-1)-\frac{i}{\sqrt{24}}(\tfrac32\;\tfrac12\;-1)+\frac{i}{\sqrt{120}}(\tfrac12\;-\tfrac12\;1)-\frac{i}{\sqrt{120}}(\tfrac12\;\tfrac12\;-1)+\frac{i}{\sqrt{24}}(\tfrac32\;-\tfrac12\;1)-\frac{i}{\sqrt8}(\tfrac32\;\tfrac32\;1)$	$-\frac{1}{\sqrt8}(\tfrac32\;-\tfrac32\;-1)-\frac{1}{\sqrt{24}}(\tfrac32\;\tfrac12\;-1)-\frac{1}{\sqrt{120}}(\tfrac12\;-\tfrac12\;1)-\frac{1}{\sqrt{120}}(\tfrac12\;\tfrac12\;-1)-\frac{1}{\sqrt{24}}(\tfrac32\;-\tfrac12\;1)-\frac{1}{\sqrt8}(\tfrac32\;\tfrac32\;1)$	$\frac{i}{\sqrt6}(\tfrac32\;-\tfrac12\;-1)+\frac{i}{\sqrt{120}}(\tfrac12\;\tfrac12\;1)+\frac{i}{\sqrt{120}}(\tfrac12\;-\tfrac12\;-1)+\frac{i}{\sqrt6}(\tfrac32\;\tfrac12\;1)$	$-\frac{i}{2}(1\;-1\;-2)+\frac{i}{2}(1\;1\;2)$	$\frac12(1\;-1\;-2)+\frac{1}{\sqrt{10}}(1\;0\;0)+\sqrt{\frac{3}{40}}(0\;0\;0)+\frac12(1\;1\;2)$	$\frac{i}{\sqrt8}(1\;0\;-2)+\frac{i}{\sqrt{20}}(1\;-1\;0)+\frac{i}{\sqrt{20}}(1\;1\;0)+\frac{i}{\sqrt8}(1\;0\;2)$	$-\frac{1}{\sqrt8}(1\;0\;-2)+\frac{1}{\sqrt{20}}(1\;-1\;0)-\frac{1}{\sqrt{20}}(1\;1\;0)+\frac{1}{\sqrt8}(1\;0\;2)$	$\frac{3i}{\sqrt{40}}(\tfrac12\;\tfrac12\;1)+\frac{3i}{\sqrt{40}}(\tfrac12\;-\tfrac12\;-1)$
$-\frac{1}{\sqrt{24}}(\tfrac32\;-\tfrac12\;-1)+\frac{1}{\sqrt8}(\tfrac32\;\tfrac32\;-1)-\frac{1}{\sqrt{120}}(\tfrac12\;\tfrac12\;1)+\frac{1}{\sqrt{120}}(\tfrac12\;-\tfrac12\;-1)-\frac{1}{\sqrt8}(\tfrac32\;-\tfrac32\;1)+\frac{1}{\sqrt{24}}(\tfrac32\;\tfrac12\;1)$	$-\frac{i}{\sqrt{24}}(\tfrac32\;-\tfrac12\;-1)-\frac{i}{\sqrt8}(\tfrac32\;\tfrac32\;-1)+\frac{i}{\sqrt{120}}(\tfrac12\;\tfrac12\;1)+\frac{i}{\sqrt{120}}(\tfrac12\;-\tfrac12\;-1)-\frac{i}{\sqrt8}(\tfrac32\;-\tfrac32\;1)-\frac{i}{\sqrt{24}}(\tfrac32\;\tfrac12\;1)$	$-\frac{1}{\sqrt6}(\tfrac32\;\tfrac12\;-1)+\frac{1}{\sqrt{120}}(\tfrac12\;-\tfrac12\;1)+\frac{1}{\sqrt{120}}(\tfrac12\;\tfrac12\;-1)-\frac{1}{\sqrt6}(\tfrac32\;-\tfrac12\;1)$	$\frac{1}{\sqrt8}(1\;0\;-2)+\frac{1}{\sqrt{20}}(1\;-1\;0)-\frac{1}{\sqrt{20}}(1\;1\;0)-\frac{1}{\sqrt8}(1\;0\;2)$	$\frac{i}{\sqrt8}(1\;0\;-2)+\frac{i}{\sqrt{20}}(1\;-1\;0)+\frac{i}{\sqrt{20}}(1\;1\;0)+\frac{i}{\sqrt8}(1\;0\;2)$	$-\frac12(1\;1\;-2)-\frac{1}{\sqrt{10}}(1\;0\;0)+\sqrt{\frac{3}{40}}(0\;0\;0)-\frac12(1\;-1\;2)$	$-\frac{i}{2}(1\;1\;-2)+\frac{i}{2}(1\;-1\;2)$	$-\frac{3}{\sqrt{40}}(\tfrac12\;-\tfrac12\;1)-\frac{3}{\sqrt{40}}(\tfrac12\;\tfrac12\;-1)$
$-\frac{i}{\sqrt{24}}(\tfrac32\;-\tfrac12\;-1)+\frac{i}{\sqrt8}(\tfrac32\;\tfrac32\;-1)+\frac{i}{\sqrt{120}}(\tfrac12\;\tfrac12\;1)+\frac{i}{\sqrt{120}}(\tfrac12\;-\tfrac12\;-1)+\frac{i}{\sqrt8}(\tfrac32\;-\tfrac32\;1)-\frac{i}{\sqrt{24}}(\tfrac32\;\tfrac12\;1)$	$\frac{1}{\sqrt{24}}(\tfrac32\;-\tfrac12\;-1)+\frac{1}{\sqrt8}(\tfrac32\;\tfrac32\;-1)+\frac{1}{\sqrt{120}}(\tfrac12\;\tfrac12\;1)-\frac{1}{\sqrt{120}}(\tfrac12\;-\tfrac12\;-1)-\frac{1}{\sqrt8}(\tfrac32\;-\tfrac32\;1)-\frac{1}{\sqrt{24}}(\tfrac32\;\tfrac12\;1)$	$-\frac{i}{6}(\tfrac32\;\tfrac12\;-1)-\frac{i}{\sqrt{120}}(\tfrac12\;-\tfrac12\;1)+\frac{i}{\sqrt{120}}(\tfrac12\;\tfrac12\;-1)+\frac{i}{\sqrt6}(\tfrac32\;-\tfrac12\;1)$	$\frac{i}{\sqrt8}(1\;0\;-2)-\frac{i}{\sqrt{20}}(1\;-1\;0)-\frac{i}{\sqrt{20}}(1\;1\;0)+\frac{i}{\sqrt8}(1\;0\;2)$	$-\frac{1}{\sqrt8}(1\;0\;-2)+\frac{1}{\sqrt{20}}(1\;-1\;0)-\frac{1}{\sqrt{20}}(1\;1\;0)+\frac{1}{\sqrt8}(1\;0\;2)$	$-\frac{i}{2}(1\;1\;-2)+\frac{i}{2}(1\;-1\;2)$	$\frac12(1\;1\;-2)-\frac{1}{\sqrt{10}}(1\;0\;0)+\sqrt{\frac{3}{40}}(0\;0\;0)+\frac12(1\;-1\;2)$	$\frac{3i}{\sqrt{40}}(\tfrac12\;-\tfrac12\;1)-\frac{3i}{\sqrt{40}}(\tfrac12\;\tfrac12\;-1)$
$-\sqrt{\frac{3}{20}}(1\;-1\;0)+\sqrt{\frac{3}{20}}(1\;1\;0)$	$-i\sqrt{\frac{3}{20}}(1\;-1\;0)-i\sqrt{\frac{3}{20}}(1\;1\;0)$	$-\sqrt{\frac{3}{10}}(1\;0\;0)$	$-\frac{3}{\sqrt{40}}(\tfrac12\;\tfrac12\;1)+\frac{3}{\sqrt{40}}(\tfrac12\;-\tfrac12\;-1)$	$\frac{3i}{\sqrt{40}}(\tfrac12\;\tfrac12\;1)+\frac{3i}{\sqrt{40}}(\tfrac12\;-\tfrac12\;-1)$	$-\frac{3}{\sqrt{40}}(\tfrac12\;-\tfrac12\;1)-\frac{3}{\sqrt{40}}(\tfrac12\;\tfrac12\;-1)$	$\frac{3i}{\sqrt{40}}(\tfrac12\;-\tfrac12\;1)-\frac{3i}{\sqrt{40}}(\tfrac12\;\tfrac12\;-1)$	$\sqrt{\frac{27}{40}}(0\;0\;0)$

Матрица C , соответствующая 27-плету

0	$\frac{i}{\sqrt{12}}(1\,0\,0)$	$\frac{1}{\sqrt{24}}(1\,1\,0)+\frac{1}{\sqrt{24}}(1\,{-1}\,0)$	$\frac{1}{\sqrt{24}}(\tfrac32\,\tfrac12\,{-1})-\frac{1}{\sqrt{8}}(\tfrac32\,{-\tfrac32}\,{-1})+$ $+\frac{1}{\sqrt{24}}(\tfrac12\,{-\tfrac12}\,1)$	$\frac{i}{\sqrt{24}}(\tfrac32\,\tfrac12\,{-1})-\frac{i}{\sqrt{8}}(\tfrac32\,{-\tfrac32}\,{-1})-$ $-\frac{i}{\sqrt{24}}(\tfrac12\,{-\tfrac12}\,1)$	$-\frac{1}{\sqrt{8}}(\tfrac32\,\tfrac32\,{-1})+\frac{1}{\sqrt{24}}(\tfrac32\,{-\tfrac12}\,{-1})+$ $+\frac{1}{\sqrt{24}}(\tfrac12\,\tfrac12\,1)$	$-\frac{i}{\sqrt{8}}(\tfrac32\,\tfrac32\,{-1})+\frac{i}{\sqrt{24}}(\tfrac32\,{-\tfrac12}\,{-1})-$ $-\frac{i}{\sqrt{24}}(\tfrac12\,\tfrac12\,1)$	$-\frac{1}{\sqrt{8}}(1\,1\,0)+\frac{1}{\sqrt{8}}(1\,{-1}\,0)$
$-\frac{i}{\sqrt{12}}(1\,0\,0)$	0	$-\frac{i}{\sqrt{24}}(1\,1\,0)+\frac{i}{\sqrt{24}}(1\,{-1}\,0)$	$-\frac{i}{\sqrt{24}}(\tfrac32\,\tfrac12\,{-1})-\frac{i}{\sqrt{8}}(\tfrac32\,{-\tfrac32}\,{-1})+$ $+\frac{i}{\sqrt{24}}(\tfrac12\,{-\tfrac12}\,1)$	$\frac{1}{\sqrt{24}}(\tfrac32\,\tfrac12\,{-1})+\frac{1}{\sqrt{8}}(\tfrac32\,{-\tfrac32}\,{-1})+$ $+\frac{1}{\sqrt{24}}(\tfrac12\,{-\tfrac12}\,1)$	$\frac{i}{\sqrt{8}}(\tfrac32\,\tfrac32\,{-1})+\frac{i}{\sqrt{24}}(\tfrac32\,{-\tfrac12}\,{-1})-$ $-\frac{i}{\sqrt{24}}(\tfrac12\,\tfrac12\,1)$	$-\frac{1}{\sqrt{8}}(\tfrac32\,\tfrac32\,{-1})-\frac{1}{\sqrt{24}}(\tfrac32\,{-\tfrac12}\,{-1})+$ $+\frac{1}{\sqrt{24}}(\tfrac12\,\tfrac12\,1)$	$\frac{i}{\sqrt{8}}(1\,1\,0)+\frac{i}{\sqrt{8}}(1\,{-1}\,0)$
$-\frac{1}{\sqrt{24}}(1\,1\,0)-\frac{1}{\sqrt{24}}(1\,{-1}\,0)$	$\frac{i}{\sqrt{24}}(1\,1\,0)-\frac{i}{\sqrt{24}}(1\,{-1}\,0)$	0	$-\frac{1}{\sqrt{6}}(\tfrac32\,{-\tfrac12}\,{-1})+\frac{1}{\sqrt{24}}(\tfrac12\,\tfrac12\,1)$	$-\frac{i}{\sqrt{6}}(\tfrac32\,{-\tfrac12}\,{-1})-\frac{i}{\sqrt{24}}(\tfrac12\,\tfrac12\,1)$	$\frac{1}{\sqrt{6}}(\tfrac32\,\tfrac12\,{-1})-\frac{1}{\sqrt{24}}(\tfrac12\,{-\tfrac12}\,1)$	$\frac{i}{\sqrt{6}}(\tfrac32\,\tfrac12\,{-1})+\frac{i}{\sqrt{24}}(\tfrac12\,{-\tfrac12}\,1)$	$\frac{1}{2}(1\,0\,0)$
$-\frac{1}{\sqrt{24}}(\tfrac32\,\tfrac12\,{-1})+\frac{1}{\sqrt{8}}(\tfrac32\,{-\tfrac32}\,{-1})-$ $-\frac{1}{\sqrt{24}}(\tfrac12\,{-\tfrac12}\,1)$	$\frac{i}{\sqrt{24}}(\tfrac32\,\tfrac12\,{-1})+\frac{i}{\sqrt{8}}(\tfrac32\,{-\tfrac32}\,{-1})-$ $-\frac{i}{\sqrt{24}}(\tfrac12\,{-\tfrac12}\,1)$	$\frac{1}{\sqrt{6}}(\tfrac32\,{-\tfrac12}\,{-1})-\frac{1}{\sqrt{24}}(\tfrac12\,\tfrac12\,1)$	0	$-\frac{i}{\sqrt{12}}(1\,0\,0)$	$\frac{1}{\sqrt{24}}(1\,1\,0)+\frac{1}{\sqrt{24}}(1\,{-1}\,0)-$ $-\frac{1}{\sqrt{8}}(0\,0\,2)$	$\frac{i}{\sqrt{24}}(1\,1\,0)-\frac{i}{\sqrt{24}}(1\,{-1}\,0)+$ $+\frac{i}{\sqrt{8}}(0\,0\,2)$	$\frac{1}{\sqrt{8}}(\tfrac12\,\tfrac12\,1)$
$-\frac{i}{\sqrt{24}}(\tfrac32\,\tfrac12\,{-1})+\frac{i}{\sqrt{8}}(\tfrac32\,{-\tfrac32}\,{-1})+$ $+\frac{i}{\sqrt{24}}(\tfrac12\,{-\tfrac12}\,1)$	$-\frac{1}{\sqrt{24}}(\tfrac32\,\tfrac12\,{-1})-\frac{1}{\sqrt{8}}(\tfrac32\,{-\tfrac32}\,{-1})-$ $-\frac{1}{\sqrt{24}}(\tfrac12\,{-\tfrac12}\,1)$	$\frac{i}{\sqrt{6}}(\tfrac32\,{-\tfrac12}\,{-1})+\frac{i}{\sqrt{24}}(\tfrac12\,\tfrac12\,1)$	$\frac{i}{\sqrt{12}}(1\,0\,0)$	0	$-\frac{i}{\sqrt{24}}(1\,1\,0)+\frac{i}{\sqrt{24}}(1\,{-1}\,0)+$ $+\frac{i}{\sqrt{8}}(0\,0\,2)$	$\frac{1}{\sqrt{24}}(1\,1\,0)+\frac{1}{\sqrt{24}}(1\,{-1}\,0)+$ $+\frac{1}{\sqrt{8}}(0\,0\,2)$	$-\frac{i}{\sqrt{8}}(\tfrac12\,\tfrac12\,1)$
$\frac{1}{\sqrt{8}}(\tfrac32\,\tfrac32\,{-1})-\frac{1}{\sqrt{24}}(\tfrac32\,{-\tfrac12}\,{-1})-$ $-\frac{1}{\sqrt{24}}(\tfrac12\,\tfrac12\,1)$	$-\frac{i}{\sqrt{8}}(\tfrac32\,\tfrac32\,{-1})-\frac{i}{\sqrt{24}}(\tfrac32\,{-\tfrac12}\,{-1})+$ $+\frac{i}{\sqrt{24}}(\tfrac12\,\tfrac12\,1)$	$-\frac{1}{\sqrt{6}}(\tfrac32\,\tfrac12\,{-1})+\frac{1}{\sqrt{24}}(\tfrac12\,{-\tfrac12}\,1)$	$-\frac{1}{\sqrt{24}}(1\,1\,0)-\frac{1}{\sqrt{24}}(1\,{-1}\,0)+$ $+\frac{1}{\sqrt{8}}(0\,0\,2)$	$\frac{i}{\sqrt{24}}(1\,1\,0)-\frac{i}{\sqrt{24}}(1\,{-1}\,0)-$ $-\frac{i}{\sqrt{8}}(0\,0\,2)$	0	$\frac{i}{\sqrt{12}}(1\,0\,0)$	$\frac{1}{\sqrt{8}}(\tfrac12\,{-\tfrac12}\,1)$
$\frac{i}{\sqrt{8}}(\tfrac32\,\tfrac32\,{-1})-\frac{i}{\sqrt{24}}(\tfrac32\,{-\tfrac12}\,{-1})+$ $+\frac{i}{\sqrt{24}}(\tfrac12\,\tfrac12\,1)$	$\frac{1}{\sqrt{8}}(\tfrac32\,\tfrac32\,{-1})+\frac{1}{\sqrt{24}}(\tfrac32\,{-\tfrac12}\,{-1})-$ $-\frac{1}{\sqrt{24}}(\tfrac12\,\tfrac12\,1)$	$-\frac{i}{\sqrt{6}}(\tfrac32\,\tfrac12\,{-1})-\frac{i}{\sqrt{24}}(\tfrac12\,{-\tfrac12}\,1)$	$-\frac{i}{\sqrt{24}}(1\,1\,0)+\frac{i}{\sqrt{24}}(1\,{-1}\,0)-$ $-\frac{i}{\sqrt{8}}(0\,0\,2)$	$-\frac{1}{\sqrt{24}}(1\,1\,0)-\frac{1}{\sqrt{24}}(1\,{-1}\,0)-$ $-\frac{1}{\sqrt{8}}(0\,0\,2)$	$-\frac{i}{\sqrt{12}}(1\,0\,0)$	0	$-\frac{i}{\sqrt{8}}(\tfrac12\,{-\tfrac12}\,1)$
$\frac{1}{\sqrt{8}}(1\,1\,0)-\frac{1}{\sqrt{8}}(1\,{-1}\,0)$	$-\frac{i}{\sqrt{8}}(1\,1\,0)-\frac{i}{\sqrt{8}}(1\,{-1}\,0)$	$-\frac{1}{2}(1\,0\,0)$	$-\frac{1}{\sqrt{8}}(\tfrac12\,\tfrac12\,1)$	$\frac{i}{\sqrt{8}}(\tfrac12\,\tfrac12\,1)$	$-\frac{1}{\sqrt{8}}(\tfrac12\,{-\tfrac12}\,1)$	$\frac{i}{\sqrt{8}}(\tfrac12\,{-\tfrac12}\,1)$	0

Матрица E , соответствующая 10–плету

0	$\frac{i}{\sqrt{12}}(1\,0\,0)$	$\frac{1}{\sqrt{24}}(1\,1\,0)+\frac{1}{\sqrt{24}}(1\,{-1}\,0)$	$\frac{1}{\sqrt{8}}(\tfrac32\,\tfrac32\,1)-\frac{1}{\sqrt{24}}(\tfrac32\,{-\tfrac12}\,1)-$ $-\frac{1}{\sqrt{24}}(\tfrac12\,\tfrac12\,{-1})$	$-\frac{i}{\sqrt{8}}(\tfrac32\,\tfrac32\,1)+\frac{i}{\sqrt{24}}(\tfrac32\,{-\tfrac12}\,1)-$ $-\frac{i}{\sqrt{24}}(\tfrac12\,\tfrac12\,{-1})$	$\frac{1}{\sqrt{24}}(\tfrac32\,\tfrac12\,1)-\frac{1}{\sqrt{8}}(\tfrac32\,{-\tfrac32}\,1)+$ $+\frac{1}{\sqrt{24}}(\tfrac12\,{-\tfrac12}\,{-1})$	$-\frac{i}{\sqrt{24}}(\tfrac32\,\tfrac12\,1)+\frac{i}{\sqrt{8}}(\tfrac32\,{-\tfrac32}\,1)+$ $+\frac{i}{\sqrt{24}}(\tfrac12\,{-\tfrac12}\,{-1})$	$\frac{1}{\sqrt{8}}(1\,1\,0)-\frac{1}{\sqrt{8}}(1\,{-1}\,0)$
$-\frac{i}{\sqrt{12}}(1\,0\,0)$	0	$-\frac{i}{\sqrt{24}}(1\,1\,0)+\frac{i}{\sqrt{24}}(1\,{-1}\,0)$	$-\frac{i}{\sqrt{8}}(\tfrac32\,\tfrac32\,1)-\frac{i}{\sqrt{24}}(\tfrac32\,{-\tfrac12}\,1)+$ $+\frac{i}{\sqrt{24}}(\tfrac12\,\tfrac12\,{-1})$	$-\frac{1}{\sqrt{8}}(\tfrac32\,\tfrac32\,1)-\frac{1}{\sqrt{24}}(\tfrac32\,{-\tfrac12}\,1)-$ $-\frac{1}{\sqrt{24}}(\tfrac12\,\tfrac12\,{-1})$	$-\frac{i}{\sqrt{24}}(\tfrac32\,\tfrac12\,1)-\frac{i}{\sqrt{8}}(\tfrac32\,{-\tfrac32}\,1)+$ $+\frac{i}{\sqrt{24}}(\tfrac12\,{-\tfrac12}\,{-1})$	$-\frac{1}{\sqrt{24}}(\tfrac32\,\tfrac12\,1)-\frac{1}{\sqrt{8}}(\tfrac32\,{-\tfrac32}\,1)+$ $+\frac{1}{\sqrt{24}}(\tfrac12\,{-\tfrac12}\,{-1})$	$-\frac{i}{\sqrt{8}}(1\,1\,0)-\frac{i}{\sqrt{8}}(1\,{-1}\,0)$
$-\frac{1}{\sqrt{24}}(1\,1\,0)-\frac{1}{\sqrt{24}}(1\,{-1}\,0)$	$\frac{i}{\sqrt{24}}(1\,1\,0)-\frac{i}{\sqrt{24}}(1\,{-1}\,0)$	0	$-\frac{1}{\sqrt{6}}(\tfrac32\,\tfrac12\,1)+\frac{1}{\sqrt{24}}(\tfrac12\,{-\tfrac12}\,{-1})$	$\frac{i}{\sqrt{6}}(\tfrac32\,\tfrac12\,1)+\frac{i}{\sqrt{24}}(\tfrac12\,{-\tfrac12}\,{-1})$	$-\frac{1}{\sqrt{6}}(\tfrac32\,{-\tfrac12}\,1)+\frac{1}{\sqrt{24}}(\tfrac12\,\tfrac12\,{-1})$	$\frac{i}{\sqrt{6}}(\tfrac32\,{-\tfrac12}\,1)+\frac{i}{\sqrt{24}}(\tfrac12\,\tfrac12\,{-1})$	$-\frac{1}{2}(1\,0\,0)$
$-\frac{1}{\sqrt{8}}(\tfrac32\,\tfrac32\,1)+\frac{1}{\sqrt{24}}(\tfrac32\,{-\tfrac12}\,1)+$ $+\frac{1}{\sqrt{24}}(\tfrac12\,\tfrac12\,{-1})$	$\frac{i}{\sqrt{8}}(\tfrac32\,\tfrac32\,1)+\frac{i}{\sqrt{24}}(\tfrac32\,{-\tfrac12}\,1)-$ $-\frac{i}{\sqrt{24}}(\tfrac12\,\tfrac12\,{-1})$	$\frac{1}{\sqrt{6}}(\tfrac32\,\tfrac12\,1)-\frac{1}{\sqrt{24}}(\tfrac12\,{-\tfrac12}\,{-1})$	0	$-\frac{i}{\sqrt{12}}(1\,0\,0)$	$\frac{1}{\sqrt{24}}(1\,1\,0)+\frac{1}{\sqrt{24}}(1\,{-1}\,0)-$ $-\frac{1}{\sqrt{8}}(0\,0\,{-2})$	$\frac{i}{\sqrt{24}}(1\,1\,0)-\frac{i}{\sqrt{24}}(1\,{-1}\,0)-$ $-\frac{i}{\sqrt{8}}(0\,0\,{-2})$	$\frac{1}{\sqrt{8}}(\tfrac12\,{-\tfrac12}\,{-1})$
$\frac{i}{\sqrt{8}}(\tfrac32\,\tfrac32\,1)-\frac{i}{\sqrt{24}}(\tfrac32\,{-\tfrac12}\,1)+$ $+\frac{i}{\sqrt{24}}(\tfrac12\,\tfrac12\,{-1})$	$\frac{1}{\sqrt{8}}(\tfrac32\,\tfrac32\,1)+\frac{1}{\sqrt{24}}(\tfrac32\,{-\tfrac12}\,1)+$ $+\frac{1}{\sqrt{24}}(\tfrac12\,\tfrac12\,{-1})$	$-\frac{i}{\sqrt{6}}(\tfrac32\,\tfrac12\,1)-\frac{i}{\sqrt{24}}(\tfrac12\,{-\tfrac12}\,{-1})$	$\frac{i}{\sqrt{12}}(1\,0\,0)$	0	$-\frac{i}{\sqrt{24}}(1\,1\,0)+\frac{i}{\sqrt{24}}(1\,{-1}\,0)-$ $-\frac{i}{\sqrt{8}}(0\,0\,{-2})$	$\frac{1}{\sqrt{24}}(1\,1\,0)+\frac{1}{\sqrt{24}}(1\,{-1}\,0)+$ $+\frac{1}{\sqrt{8}}(0\,0\,{-2})$	$\frac{i}{\sqrt{8}}(\tfrac12\,{-\tfrac12}\,{-1})$
$-\frac{1}{\sqrt{24}}(\tfrac32\,\tfrac12\,1)+\frac{1}{\sqrt{8}}(\tfrac32\,{-\tfrac32}\,1)-$ $-\frac{1}{\sqrt{24}}(\tfrac12\,{-\tfrac12}\,{-1})$	$\frac{i}{\sqrt{24}}(\tfrac32\,\tfrac12\,1)+\frac{i}{\sqrt{8}}(\tfrac32\,{-\tfrac32}\,1)-$ $-\frac{i}{\sqrt{24}}(\tfrac12\,{-\tfrac12}\,{-1})$	$\frac{1}{\sqrt{6}}(\tfrac32\,{-\tfrac12}\,1)-\frac{1}{\sqrt{24}}(\tfrac12\,\tfrac12\,{-1})$	$-\frac{1}{\sqrt{24}}(1\,1\,0)-\frac{1}{\sqrt{24}}(1\,{-1}\,0)+$ $+\frac{1}{\sqrt{8}}(0\,0\,{-2})$	$\frac{i}{\sqrt{24}}(1\,1\,0)-\frac{i}{\sqrt{24}}(1\,{-1}\,0)+$ $+\frac{i}{\sqrt{8}}(0\,0\,{-2})$	0	$\frac{i}{\sqrt{12}}(1\,0\,0)$	$-\frac{1}{\sqrt{8}}(\tfrac12\,\tfrac12\,{-1})$
$\frac{i}{\sqrt{24}}(\tfrac32\,\tfrac12\,1)-\frac{i}{\sqrt{8}}(\tfrac32\,{-\tfrac32}\,1)-$ $-\frac{i}{\sqrt{24}}(\tfrac12\,{-\tfrac12}\,{-1})$	$\frac{1}{\sqrt{24}}(\tfrac32\,\tfrac12\,1)+\frac{1}{\sqrt{8}}(\tfrac32\,{-\tfrac32}\,1)-$ $-\frac{1}{\sqrt{24}}(\tfrac12\,{-\tfrac12}\,{-1})$	$-\frac{i}{\sqrt{6}}(\tfrac32\,{-\tfrac12}\,1)-\frac{i}{\sqrt{24}}(\tfrac12\,\tfrac12\,{-1})$	$-\frac{i}{\sqrt{24}}(1\,1\,0)+\frac{i}{\sqrt{24}}(1\,{-1}\,0)+$ $+\frac{i}{\sqrt{8}}(0\,0\,{-2})$	$-\frac{1}{\sqrt{24}}(1\,1\,0)-\frac{1}{\sqrt{24}}(1\,{-1}\,0)-$ $-\frac{1}{\sqrt{8}}(0\,0\,{-2})$	$-\frac{i}{\sqrt{12}}(1\,0\,0)$	0	$-\frac{i}{\sqrt{8}}(\tfrac12\,\tfrac12\,{-1})$
$-\frac{1}{\sqrt{8}}(1\,1\,0)+\frac{1}{\sqrt{8}}(1\,{-1}\,0)$	$\frac{i}{\sqrt{8}}(1\,1\,0)+\frac{i}{\sqrt{8}}(1\,{-1}\,0)$	$\frac{1}{2}(1\,0\,0)$	$-\frac{1}{\sqrt{8}}(\tfrac12\,{-\tfrac12}\,{-1})$	$-\frac{i}{\sqrt{8}}(\tfrac12\,{-\tfrac12}\,{-1})$	$\frac{1}{\sqrt{8}}(\tfrac12\,\tfrac12\,{-1})$	$\frac{i}{\sqrt{8}}(\tfrac12\,\tfrac12\,{-1})$	0

Матрица E* , соответствующая 10^{*} –плету.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Матрицы f_a и d_a

Матрицы f_a и d_a записываются в виде:

$$f_1=\begin{Vmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&-1&0&0&0&0&0\\ 0&1&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&-\frac12\\ 0&0&0&0&0&0&\frac12&0\\ 0&0&0&0&0&-\frac12&0&0\\ 0&0&0&\frac12&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{Vmatrix}\quad f_2=\begin{Vmatrix} 0&0&1&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ -1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&-\frac12&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&-\frac12&0\\ 0&0&0&\frac12&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&\frac12&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{Vmatrix}$$

$$f_3=\begin{Vmatrix} 0&-1&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&-\frac12&0&0&0\\ 0&0&0&\frac12&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&\frac12&0\\ 0&0&0&0&0&-\frac12&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{Vmatrix}\quad f_4=\begin{Vmatrix} 0&0&0&0&0&0&\frac12&0\\ 0&0&0&0&0&\frac12&0&0\\ 0&0&0&0&\frac12&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&-\frac12&0&0&0&0&-\sqrt{\frac34}\\ 0&-\frac12&0&0&0&0&0&0\\ -\frac12&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&\sqrt{\frac34}&0&0&0 \end{Vmatrix}$$

$$f_5=\begin{Vmatrix} 0&0&0&0&0&-\frac12&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&\frac12&0\\ 0&0&0&-\frac12&0&0&0&0\\ 0&0&\frac12&0&0&0&0&\sqrt{\frac34}\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ \frac12&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&-\frac12&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&-\sqrt{\frac34}&0&0&0&0 \end{Vmatrix}\quad f_6=\begin{Vmatrix} 0&0&0&0&\frac12&0&0&0\\ 0&0&0&-\frac12&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&-\frac12&0\\ 0&\frac12&0&0&0&0&0&0\\ -\frac12&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&\frac12&0&0&0&0&-\sqrt{\frac34}\\ 0&0&0&0&0&0&\sqrt{\frac34}&0 \end{Vmatrix}$$

$$f_7=\begin{Vmatrix} 0&0&0&-\frac12&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&-\frac12&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&\frac12&0&0\\ \frac12&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&\frac12&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&-\frac12&0&0&0&0&\sqrt{\frac34}\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&-\sqrt{\frac34}&0&0 \end{Vmatrix}\quad f_8=\begin{Vmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&-\sqrt{\frac34}&0&0&0\\ 0&0&0&\sqrt{\frac34}&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&-\sqrt{\frac34}&0\\ 0&0&0&0&0&\sqrt{\frac34}&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \end{Vmatrix}$$

$$d_1=\begin{Vmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&\frac{1}{\sqrt3}\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&\frac12&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&\frac12&0\\ 0&0&0&\frac12&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&\frac12&0&0&0\\ \frac{1}{\sqrt3}&0&0&0&0&0&0&0 \end{Vmatrix}\quad d_2=\begin{Vmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&\frac{1}{\sqrt3}\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&-\frac12&0\\ 0&0&0&0&0&\frac12&0&0\\ 0&0&0&0&\frac12&0&0&0\\ 0&0&0&-\frac12&0&0&0&0\\ 0&\frac{1}{\sqrt3}&0&0&0&0&0&0 \end{Vmatrix}$$

$$d_3=\begin{Vmatrix} 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&\frac{1}{\sqrt3}\\ 0&0&0&\frac12&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&\frac12&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&-\frac12&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&-\frac12&0\\ 0&0&\frac{1}{\sqrt3}&0&0&0&0&0 \end{Vmatrix}\quad d_4=\begin{Vmatrix} 0&0&0&0&0&\frac12&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&-\frac12&0\\ 0&0&0&\frac12&0&0&0&0\\ 0&0&\frac12&0&0&0&0&\frac{-1}{\sqrt{12}}\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ \frac12&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&-\frac12&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&\frac{-1}{\sqrt{12}}&0&0&0&0 \end{Vmatrix}$$

$$d_5=\begin{Vmatrix} 0&0&0&0&0&0&\frac12&0\\ 0&0&0&0&0&\frac12&0&0\\ 0&0&0&0&\frac12&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&\frac12&0&0&0&0&\frac{-1}{\sqrt{12}}\\ 0&\frac12&0&0&0&0&0&0\\ \frac12&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&\frac{-1}{\sqrt{12}}&0&0&0 \end{Vmatrix}\quad d_6=\begin{Vmatrix} 0&0&0&\frac12&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&\frac12&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&-\frac12&0&0\\ \frac12&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&\frac12&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&-\frac12&0&0&0&0&\frac{-1}{\sqrt{12}}\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&\frac{-1}{\sqrt{12}}&0&0 \end{Vmatrix}$$

$$d_7=\begin{Vmatrix} 0&0&0&0&\frac12&0&0&0\\ 0&0&0&\frac12&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&-\frac12&0\\ 0&\frac12&0&0&0&0&0&0\\ \frac12&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&-\frac12&0&0&0&0&\frac{-1}{\sqrt{12}}\\ 0&0&0&0&0&0&\frac{-1}{\sqrt{12}}&0 \end{Vmatrix}\quad d_8=\begin{Vmatrix} \frac{1}{\sqrt3}&0&0&0&0&0&0&0\\ 0&\frac{1}{\sqrt3}&0&0&0&0&0&0\\ 0&0&\frac{1}{\sqrt3}&0&0&0&0&0\\ 0&0&0&\frac{-1}{\sqrt{12}}&0&0&0&0\\ 0&0&0&0&\frac{-1}{\sqrt{12}}&0&0&0\\ 0&0&0&0&0&\frac{-1}{\sqrt{12}}&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&\frac{-1}{\sqrt{12}}&0\\ 0&0&0&0&0&0&0&\frac{-1}{\sqrt3} \end{Vmatrix}$$

Все эти матрицы имеют равные нулю шпуры. При расчетах важно знать шпуры их произведений. Они имеют вид:

$$Sp\,(f_a f_b) = -3\delta_{ab}\ ; \qquad Sp\,(f_a f_b f_c) = -\frac32 f_{abc}\ ;$$

$$Sp\,(f_a f_b f_c f_d) = \frac34(\delta_{ab}\delta_{cd}+\delta_{ac}\delta_{bd}+\delta_{ad}\delta_{bc}) - \frac12 f_{ace}f_{ebd}+f_{ade}f_{ebc}\ ;$$

$$Sp\,(d_a d_b) = \frac53\delta_{ab}\ ; \qquad Sp\,(d_a d_b d_c) = -\frac12 d_{abc}\ ;$$

$$Sp\,(d_a d_b d_c d_d) = \frac{13}{36}(\delta_{ab}\delta_{cd}+\delta_{ad}\delta_{bc}) - \frac{7}{36}\delta_{ac}\delta_{bd} - \frac16 d_{ace}d_{ebd}\ ;$$

$$Sp\,(f_a d_b) = 0\ ; \qquad Sp\,(f_a f_b d_c) = -\frac32 d_{abc}\ ;$$

$$Sp\,(f_a f_b f_c d_d) = -\frac34(f_{abe}d_{ecd}+d_{abe}f_{ecd})\ ;$$

$$Sp\,(f_a d_b d_c) = \frac56 f_{abc}\ ;$$

$$Sp\,(f_a f_b d_c d_d) = -\frac23\delta_{ab}\delta_{cd}+\frac16(\delta_{ac}\delta_{bd}+\delta_{ad}\delta_{bc})+\frac{5}{12}f_{abe}f_{ecd}+\frac14 d_{abe}d_{ecd}\ ;$$

$$Sp\,(f_a d_b f_c d_d) = -\frac14(\delta_{ab}\delta_{cd}+\delta_{ac}\delta_{bd}+\delta_{ad}\delta_{bc})+\frac32 d_{ace}d_{ebd}\ ;$$

$$Sp\,(f_a d_b d_c d_d) = \frac{1}{12}(f_{abe}d_{ecd}+d_{abe}f_{ecd})-\frac23 d_{ace}f_{ebd}\,.$$

При вычислениях шпуров существенно используются свойства симметрии матричных элементов $(f_a)_{mn} = f_{man}$ и $(d_a)_{mn} = d_{man}$ по всем трем индексам и формулы гл. 2 и Приложения 2. Например,

$$Sp\,(f_a f_b f_c) = \frac12 Sp\,([f_a, f_b]\, f_c) = \frac12 f_{abe}\, Sp\,(f_e f_c) = -\frac32 f_{abc}\ ;$$

$$Sp(d_a d_b d_c) = \frac{1}{2} Sp(\{d_a, d_b\} d_c) =$$

$$= \frac{1}{2}\{-d_{abe}(d_e)_{mn} + \frac{1}{3}(\delta_{am}\delta_{bn} + \delta_{an}\delta_{bm} + \delta_{ab}\delta_{mn})\}(d_c)_{nm} = -\frac{1}{2} d_{abc},$$

где применены формулы (5) и (7).

ПРИЛОЖЕНИЕ II

Тождества для четырехоктетных амплитуд типа тождеств Фирца

Можно составить 8 четырехоктетных комбинаций

$$J = (\tilde{\eta}_1 \eta_2)(\tilde{\eta}_3 \eta_4), \quad F = (\tilde{\eta}_1 f_a \eta_2)(\tilde{\eta}_3 f_a \eta_4), \quad D = (\tilde{\eta}_1 d_a \eta_2)(\tilde{\eta}_3 d_a \eta_4),$$

$$(FD) = (\tilde{\eta}_1 f_a \eta_2)(\tilde{\eta}_3 d_a \eta_4), \qquad (DF) = (\tilde{\eta}_1 d_a \eta_2)(\tilde{\eta}_3 f_a \eta_4),$$

$$\mathcal{C} = (\tilde{\eta}_1 c_{ab} \eta_2)(\tilde{\eta}_3 c_{ab} \eta_4);; \quad \mathcal{E} = (\tilde{\eta}_1 e_{ab} \eta_2)(\tilde{\eta}_3 e^+_{ab} \eta_4), \quad \check{\mathcal{E}} = (\tilde{\eta}_1 e^+_{ab} \eta_2)(\tilde{\eta}_3 e_{ab} \eta_4).$$

Пусть теперь J', F', D', $(DF)'$, c', $\mathcal{C}'$, $\mathcal{E}'$ и $\check{\mathcal{E}}'$ суть такие же четырехоктетные комбинации с переставленными η_2 и η_4. Тогда из соотношения полноты (30) следуют тождества типа тождеств Фирца, связывающие штрихованные варианты с исходными:

$$\pm 8J = J' - \frac{8}{3}F' + \frac{24}{5}D' + 8\mathcal{C}' + \frac{1}{2}\mathcal{E}' + \frac{1}{2}\check{\mathcal{E}}'$$

$$\pm 8F = -3J' + 4F' - \frac{36}{5}D' + 8\mathcal{C}'$$

$$\pm 8D = \frac{5}{3}J' - \frac{20}{9}F' - \frac{12}{5}D' + \frac{8}{3}\mathcal{C}' - \frac{1}{3}\mathcal{E}' - \frac{1}{3}\check{\mathcal{E}}'$$

$$\pm 8(FD) = -4(DF)' - 4(FD)' + \frac{i}{2}(\mathcal{E}' - \check{\mathcal{E}}')$$

$$\pm 8(DF) = -4(DF)' - 4(FD)' - \frac{i}{2}(\mathcal{E}' - \check{\mathcal{E}}')$$

Таблица 3. Кубичные комбинации матриц, содержащие свертки.

$f_a f_a = -3$	$f_c f_a f_c = -\frac{3}{2} f_a$	$f_c d_a f_c = -\frac{3}{2} d_a$	$f_c c_{ab} f_c = c_{ab}$	$f_c e_{ab} f_c = 0$	$f_c e^+_{ab} f_c = 0$
$d_a d_a = \frac{5}{3}$	$d_c f_a d_c = \frac{5}{6} f_a$	$d_c d_a d_c = -\frac{1}{2} d_a$	$d_c c_{ab} d_c = \frac{1}{3} c_{ab}$	$d_c e_{ab} d_c = -\frac{2}{3} e_{ab}$	$d_c e^+_{ab} d_c = -\frac{2}{3} e^+_{ab}$
$f_c d_c = 0$	$f_c f_a d_c = \frac{3}{2} d_a$	$f_c d_a d_c = -\frac{5}{6} f_a$	$f_c c_{ab} d_c = 0$	$f_c e_{ab} d_c = i e_{ab}$	$f_c e^+_{ab} d_c = -i e^+_{ab}$
$d_c f_c = 0$	$d_c f_a f_c = \frac{3}{2} d_a$	$d_c d_a f_c = -\frac{5}{6} f_a$	$d_c c_{ab} f_c = 0$	$d_c e_{ab} f_c = -i e_{ab}$	$d_c e^+_{ab} f_c = i e^+_{ab}$
$c_{cd} c_{cd} = \frac{27}{8}$	$c_{cd} f_a c_{cd} = -\frac{9}{8} f_a$	$c_{cd} d_a c_{cd} = \frac{27}{40} d_a$	$c_{cd} c_{ab} c_{cd} = \frac{7}{40} c_{ab}$	$c_{cd} e_{ab} c_{cd} = -\frac{9}{40} e_{ab}$	$c_{cd} e^+_{ab} c_{cd} = -\frac{9}{40} e^+_{ab}$
$e_{cd} e^+_{cd} = 20$	$e_{cd} f_a e^+_{cd} = -12 i d_a$	$e_{cd} d_a e^+_{cd} = -8 d_a - \frac{20}{3} i f_a$	$e_{cd} c_{ab} e^+_{cd} = -\frac{4}{3} c_{ab}$	$e_{cd} e_{ab} e^+_{cd} = 4 e_{ab}$	$e_{cd} e^+_{ab} e^+_{cd} = 4 e^+_{ab}$
$e^+_{cd} e_{cd} = 20$	$e^+_{cd} f_a e_{cd} = 12 i d_a$	$e^+_{cd} d_a e_{cd} = -8 d_a + \frac{20}{3} i f_a$	$e^+_{cd} c_{ab} e_{cd} = -\frac{4}{3} c_{ab}$	$e^+_{cd} e_{ab} e_{cd} = 4 e_{ab}$	$e^+_{cd} e^+_{ab} e_{cd} = 4 e^+_{ab}$

Для любой матрицы A $\quad e_{ab} A e_{ab} = 0, \quad e^+_{ab} A e^+_{ab} = 0, \quad c_{ab} A e_{ab} = 0, \quad c_{ab} A e^+_{ab} = 0, \quad e_{ab} A c_{ab} = 0, \quad e^+_{ab} A c_{ab} = 0$

Иногда полезны следующие соотношения для матриц u_{ab}

$u_{cd} u_{cd} = -10 \quad u_{cd} f_a u_{cd} = 0 \quad u_{cd} d_a u_{cd} = 4 d_a \quad u_{cd} c_{ab} u_{cd} = \frac{2}{3} c_{ab} \quad u_{cd} u_{ab} u_{cd} = -2 u_{ab}$

$$\pm 8\mathcal{C} = \frac{27}{8}J' + 3F' + \frac{81}{25}D' + \frac{7}{5}\mathcal{C}' - \frac{9}{80}\mathcal{E}' - \frac{9}{80}\check{\mathcal{E}}'$$

$$\pm 8\mathcal{E} = 20J' + 32i[(DF)' - (FD)'] - \frac{192}{5}D' - \frac{32}{3}\mathcal{C}' + 2\mathcal{E}' + 2\check{\mathcal{E}}'$$

$$\pm 8\mathcal{E} = 20J' - 32i[(DF)' - (FD)'] - \frac{192}{5}D' - \frac{32}{3}\mathcal{C}' + 2\mathcal{E}' + 2\check{\mathcal{E}}',$$

где плюс в левой части стоит для статистики Бозе-Эйнштейна, а минус - для статистики Ферми-Дирака.

При получении этих тождеств, при вычислении шпуров и в других случаях полезны соотношения, приведенные в таблице 3.

Литература

1. M.Gell-Mann. Phys. Rev., 125, 1067 (1962).
2. S.Okubo. Phys. Lett., 8, 362 (1964).
   В.И.Огиевецкий. ЖЭТФ 47, 966 (1964).
   R.U.Dalitz. Properties of the Weak Interactions, Oxford (1964).
3. J.J.De Swart. Rev. Mod. Phys., 35, 916 (1963).

Рукопись поступила в издательский отдел
26 января 1966 г.