ЯФ, 1967, т. 6, вып. 1,
с. 194-204

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р-2554

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

И. Амирханов, В.Ф. Демин,
Б.Н. Захарьев, И.И. Кузьмин

РАССЕЯНИЕ ПОТОКА ЧАСТИЦ НА СИСТЕМЕ ЗАКРЕПЛЕННЫХ ЦЕНТРОВ

1966

P - 2554

И. Амирханов, В.Ф. Демин,
Б.Н. Захарьев, И.И. Кузьмин

РАССЕЯНИЕ ПОТОКА ЧАСТИЦ НА СИСТЕМЕ ЗАКРЕПЛЕННЫХ ЦЕНТРОВ

1. Введение

Рассмотрим рассеяние волны системой n частиц с жестко фиксированным положением в пространстве. Пусть взаимодействие каждой из частиц с налетающей волной характеризуется некоторым сферически-симметричным потенциалом $V_i(|\bar{r}-\bar{r}_i|)$. Задача об описании такого рассеяния сводится к решению уравнения Шредингера:

$$[-\frac{1}{2\mu}\nabla^2 + \sum_{i=1}^{n} V_i(|\bar{r}-\bar{r}_i|)]\Psi(\vec{r}) = E\Psi(\vec{r}) \qquad (1)$$

с соответствующими граничными условиями.

В общем случае решить (1) очень трудно, так как система потенциалов $\sum_i V_i$ не обладает сферической симметрией и переменные в (1) не разделяются.

Можно, однако, ожидать, что задача сильно упростится, если области, в которых отдельные потенциалы отличны от нуля, не пересекаются. Рассеяние на каждом из потенциалов в отдельности легко получить, используя их сферическую симметрию. А рассеяние на системе в этом случае сведется к последовательному многократному рассеянию на отдельных потенциалах.

В частном случае, когда нужно учитывать только s -рассеяние на каждом из центров, Бракнер[/1/] свел задачу к решению системы алгебраических уравнений для амплитуд рассеяния.

В данной работе формализм Бракнера[/1/] обобщается на случай учета произвольного числа парциальных ℓ -волн. При этом оказалось удобным воспользоваться теорией рассеяния Фаддеева[/2/]. Этому посвящен второй раздел статьи.

В работе[/3/] рассмотрен случай, когда рассеивающие частицы являются сложными и могут возбуждаться. Более простая картина получается, если сложной (способной возбуждаться) является падающая частица. Этот случай рассмотрен в разделе 3.

2. Рассеяние простой частицы на системе закрепленных центров

Ограничимся для простоты записи случаем двух рассеивающих центров. Обобщение на случай n центров не представляет особой сложности.

При использовании функций Грина

$$g_i = (h_0 + v_i - E - i\gamma)^{-1} \qquad (i = 1, 2 \dots n)$$

уравнение Шредингера (1) в интегральной форме записывается так:

$$\Psi(\vec r) = \Psi_i(\vec r) - \int g_i(\vec r, \vec r\,')\Big[\sum_{j \neq i} v_j(\vec r\,')\Big]\Psi(\vec r\,')d\vec r\,', \tag{1a}$$

где $\Psi_i(\vec r)$ описывает рассеяние частицы на одиночном центре с энергией $E = k_0^2/2\mu$.

Как и в задаче трех тел (см. работу Фаддеева[2]), здесь удобно перейти к t матрице, определяемой матричным элементом

$$t = (\Psi_0, \sum_{i=1}^{n} v_i \Psi),$$

где $\Psi_0 = (2\pi)^{-3/2} e^{i\vec k\vec r}$. Запишем t в виде суммы

$$t = \sum_{i=1}^{n} t^{(i)}, \qquad t^{(i)} = (\Psi_0, v_i \Psi).$$

"Умножим" слева уравнение (1a) для $i = 1,2 \dots n$ на $(\Psi_0, v_i|$. Получаем систему уравнений для $t^{(i)}$:

$$t^{(1)}(\bar k';\bar k)e^{i\bar q\bar r_1} = t_1(\bar k';\bar k)e^{i\bar q\bar r_1} - 2\mu\int d\bar k''\,\frac{t_1(\bar k';\bar k'')e^{-i(\bar k'-\bar k'')\bar r_1}\,t^{(2)}(\bar k'';\bar k)e^{-i(\bar k''-\bar k)\bar r_2}}{k''^2 - k^2 - i\gamma};$$

$$t^{(2)}(\bar k';\bar k)e^{i\bar q\bar r_2} = t_2(\bar k';\bar k)e^{i\bar q\bar r_2} - 2\mu\int d\bar k''\,\frac{t_2(\bar k';\bar k'')e^{-i(\bar k'-\bar k'')\bar r_2}\,t^{(1)}(\bar k'';\bar k)e^{-i(\bar k''-\bar k)\bar r_1}}{k''^2 - k^2 - i\gamma}; \tag{2}$$

$$t = t^{(1)}e^{i\bar q\bar r_1} + t^{(2)}e^{i\bar q\bar r_2}, \qquad \bar q = \bar k - \bar k'. \tag{3}$$

Здесь $\bar r_i$ –координата i –того центра, t_i – амплитуда рассеяния на отдельно взятом i – том потенциале в системе координат с центром в центре потенциала. Фазовые множители типа $e^{i\bar q\bar r_i}$ возникают из-за сдвига центра соответствующего потенциала относительно начала координат (см. Приложение 1).

Рассмотрим первое из уравнений (2). Для удобства поместим начало координат в точку r_1, т.е. $\bar r_1 = 0$; $\bar r_2 - \bar r_1 = \bar r_{21} = -\bar r_{12} = \vec r_2$. Имеем:

$$t^{(1)}(\bar k';\bar k) = t(\bar k';\bar k) - 2\mu\int\frac{t_1(\bar k';\bar k'')\,t^{(2)}(\bar k'';\bar k)e^{i(\bar k''-\bar k)\vec r_{12}}\,d\bar k''}{k''^2 - k^2 - i\gamma}. \tag{4}$$

Воспользуемся следующими разложениями:

$$t^{(1)}(\bar k',\bar k) = \sum_{J_1'M_1'} t^{(1)}_{J_1'M_1'}(\vec k)\,Y_{J_1'M_1'}\Big(\frac{\bar k'}{k'}\Big),$$

$$t_1(\bar{k}',k)=\sum_{JM} t_{1J}\, Y^*_{JM}\left(\frac{\bar{k}}{k}\right) Y_{JM}\left(\frac{\bar{k}'}{k'}\right),$$

$$t^{(2)}(\bar{k}'',\bar{k}) = \sum_{J_2 M_2} t^{(2)}_{J_2 M_2}(\vec{k})\, Y_{J_2 M_2}\left(\frac{\bar{k}''}{k''}\right), \tag{5}$$

$$e^{i\bar{k}''\bar{r}_{12}} = 4\pi \sum_{\ell m} (i)^{\ell}\, j_{\ell}(k'' r_{12})\, Y_{\ell m}\left(\frac{\bar{k}''}{k''}\right) Y^*_{\ell m}\left(\frac{\bar{r}_{12}}{r_{12}}\right).$$

Следует подчеркнуть, что амплитуда рассеяния на одном центре $t_1(\bar{k};\bar{k}')$ зависит лишь от угла между $\bar{k}$ и $\bar{k}'$, в то время как более сложная амплитуда $t^{(1)}(\bar{k}';\bar{k})$, учитывающая наличие другого центра, зависит от азимутальных углов $\bar{k}$ и $\bar{k}'$.

Подставим (5) в (4) и проинтегрируем по $d\bar{k}''$ (см. Приложение 2, а также А.С. Давыдов „Теория атомного ядра", формула (E,4)):

$$\sum_{J_1' M_1'} t^{(1)}_{J_1' M_1'}(\bar{k})\, Y_{J_1' M_1'}\left(\frac{\bar{k}'}{k'}\right) = \sum_{JM} t_{1J}\, Y^*_{JM}\left(\frac{\bar{k}'}{k'}\right) Y_{JM}\left(\frac{\bar{k}'}{k'}\right) -$$

$$-2\mu\cdot\frac{\pi i}{2}\cdot 4\pi \sum_{JMJ_2M_2\ell m} (i)^{\ell}\, A_{JM}(J_2 M_2 \ell m)\, t_{1J}(k)\, t_{J_2M_2}(\vec{k})\, Y^*_{\ell m}\left(\frac{\bar{r}_{12}}{r_{12}}\right) e^{-i\bar{k}\bar{r}_{12}}\cdot \tag{6}$$

$$\cdot\, Y_{JM}\left(\frac{\bar{k}'}{k'}\right) h^{(1)}_{\ell}(kr_{12}).$$

Умножим (6) на $Y^*_{J_1M_1}\left(\frac{\bar{k}'}{k'}\right)$ и проинтегрируем по углам вектора $\bar{k}'$:

$$t^{(1)}_{J_1M_1}(\bar{k}) = t_{1J_1}\, Y^*_{J_1M_1}\left(\frac{\bar{k}}{k}\right) - 4\mu\pi^2 i \sum_{J_2M_2\ell m} (i)^{\ell}\, A_{J_1M_1}(J_2M_2\ell m)\, t_{1J_1}\cdot \tag{7}$$

$$\cdot\, t^{(2)}_{J_2M_2}(\bar{k})\, Y^*_{\ell m}\left(\frac{\bar{r}_{12}}{r_{12}}\right) e^{-i\bar{k}\bar{r}_{12}}\, h^{(1)}_{\ell}(kr_{12}).$$

Аналогично получаем для второго уравнения в (2):

$$t^{(2)}_{J_2M_2}(\bar{k}) = t_{2J_2}\, Y^*_{J_2M_2}\left(\frac{\bar{k}}{k}\right) - 4\mu\pi^2 i \sum_{J_1M_1\ell m} (i)^{\ell}\, A_{J_2M_2}(J_1M_1,\ell m)\, t_{2J_2}\cdot \tag{8}$$

$$\cdot\, t^{(1)}_{J_1M_1}(k)\, Y^*_{\ell m}\left(\frac{\bar{r}_{21}}{r_{21}}\right) e^{i\bar{k}\bar{r}_{21}}\, h^{(1)}_{\ell}(kr_{21}).$$

Система уравнений (7),(8) полностью описывает рассеяние на двух центрах, если известны амплитуды рассеяния t_1 на отдельных потенциалах.

В частном случае, если рассеянием с моментом $\ell > 1$ на каждом центре можно пренебречь ($t_{1J} = 0$ при $J \geq 2$), система (7), (8) сведется к системе четырех связанных уравнений для $t^{(1)}_{1M_1}$; $t^{(1)}_{00}$; $t^{(2)}_{1M_2}$; $t^{(2)}_{00}$. Для n центров получаем n-уравнений типа (7).

Полная t -матрица в произвольной системе координат имеет вид:

$$t(\bar{k}';\bar{k}) = \sum_i t^{(i)}(\bar{k}';\bar{k})e^{-i(\bar{k}'-\bar{k})\bar{r}_i}. \qquad (9)$$

Сечение рассеяния на системе n -закрепленных центров определяется выражением:

$$d\sigma = |A|^2 d\Omega_{\bar{k}'}, \qquad (10)$$

где $A = -4\pi^2 \mu t$.

3. Рассеяние сложной частицы

Если рассеиваемые частицы способны возбуждаться и кинетическая энергия налетающих сложных частиц достаточна для их реального возбуждения, то рассеяние на отдельном потенциале будет характеризоваться не одной амплитудой A , а матрицей A_{ik} , учитывающей все возможные внутренние переходы в сложной частице.

Ограничимся частным случаем, когда нужно учитывать только два внутренних состояния сложной частицы, причем существенно лишь s-рассеяние на каждом центре и рассеивающая система состоит из двух потенциалов.

По аналогии с работой /1/ представим полную волновую функцию в случае, если падающие частицы находятся в основном состоянии, в виде:

$$\Psi_0 = e^{ik_0\bar{r}} + F_A^{00}\frac{e^{ik_0|\bar{r}-\bar{r}_A|}}{|\bar{r}-\bar{r}_A|} + F_B^{00}\frac{e^{ik_0|\bar{r}-\bar{r}_B|}}{|\bar{r}-\bar{r}_B|} + \qquad (9)$$
$$+ F_A^{10}\frac{e^{ik_1|\bar{r}-\bar{r}_A|}}{|\bar{r}-\bar{r}_A|} + F_B^{10}\frac{e^{ik_1|\bar{r}-\bar{r}_B|}}{|\bar{r}-\bar{r}_B|},$$

а в случае, если падающие частицы находятся в возбужденном состоянии, в виде:

$$\Psi_1 = e^{ik_1\bar{r}} + F_A^{11}\frac{e^{ik_1|\bar{r}-\bar{r}_A|}}{|\bar{r}-\bar{r}_A|} + F_B^{11}\frac{e^{ik_1|\bar{r}-\bar{r}_B|}}{|\bar{r}-\bar{r}_B|} + \qquad (10)$$
$$+ F_A^{10}\frac{e^{ik_0|\bar{r}-\bar{r}_A|}}{|\bar{r}-\bar{r}_A|} + F_B^{10}\frac{e^{ik_0|\bar{r}-\bar{r}_B|}}{|\bar{r}-\bar{r}_B|}.$$

Амплитуды $F_{A,B}^{\alpha,\beta}$ выражаются через амплитуды $f_{\alpha\beta}$ рассеяния на отдельных центрах с помощью системы уравнений:

$$F_A^{00} = f_{00}\left(e^{i\bar{k}_0\bar{r}_A} + F_B^{00}\frac{e^{ik_0|\bar{r}_B-\bar{r}_A|}}{|\bar{r}_B-\bar{r}_A|}\right) + f_{10}F_B^{01}\frac{e^{ik_1|\bar{r}_A-\bar{r}_B|}}{|\bar{r}_B-\bar{r}_A|},$$

$$F_A^{01} = f_{01}\left(e^{i\bar{k}_0\bar{r}_A} + F_B^{00}\frac{e^{ik_0|\bar{r}_B-\bar{r}_A|}}{|\bar{r}_B-\bar{r}_A|}\right) + f_{11}F_B^{01}\frac{e^{ik_1|\bar{r}_B-\bar{r}_A|}}{|\bar{r}_B-\bar{r}_A|},$$

$$F_A^{10} = f_{10}\left(e^{i\bar{k}_1\bar{r}_A} + F_B^{11}\frac{e^{ik_1|\bar{r}_B-\bar{r}_A|}}{|\bar{r}_B-\bar{r}_A|} + f_{00}F_B^{10}\frac{e^{ik_0|\bar{r}_B-\bar{r}_A|}}{|\bar{r}_B-\bar{r}_A|}\right), \qquad (11)$$

$$F_A^{11} = f_{11}\left(e^{i\bar{k}_1\bar{r}_A} + F_B^{11}\frac{e^{ik_1|\bar{r}_B-\bar{r}_A|}}{|\bar{r}_B-\bar{r}_A|}\right) + f_{01}F_B^{10}\frac{e^{ik_0|\bar{r}_B-\bar{r}_A|}}{|\bar{r}_B-\bar{r}_A|}.$$

Аналогичные уравнения получаются для центра В. Обобщение на случай большего числа рассеивателей тривиально.

Рассеянные волны будут интерферировать между собой и, если система рассеивателей имеет правильную структуру (например, как в кристалле), то можно ожидать, что в некоторых направлениях будут лететь частицы преимущественно в основном состоянии, в других направлениях, наоборот, – в возбужденном (брегговское рассеяние).

В заключение выражаем благодарность Л.Г. Заставенко, А.И. Базю, М.И. Подгорецкому и В.Г. Барышевскому за полезное обсуждение результатов.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Покажем, как меняется амплитуда рассеяния на отдельном потенциале при сдвиге потенциала из точки $\vec{r} = 0$ в точку $\vec{r}_1$.

Пусть центр потенциала находится в точке $\vec{r}_1$: $v(\vec{r}) = V(|\bar{r}-\bar{r}_1|)$. Тогда уравнение для амплитуды рассеяния $\hat{t}(\bar{r},\bar{r}')$ будет иметь вид (см. Давыдов, "Квантовая механика", 107.16):

$$\hat{t}(\bar{r},\bar{r}') = V(|\bar{r}-\bar{r}_1|)\delta(\bar{r}-\bar{r}') + V(|\bar{r}-\bar{r}_1|)\int g_0(\bar{r},\bar{r}'')\hat{t}(\bar{r}'',\bar{r}')d\bar{r}''. \qquad (П.\ 1)$$

В импульсном представлении:

$$\hat{t}(\bar{k};\bar{k}') = \frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{-i\bar{k}\bar{r}}\hat{t}(\bar{r},\bar{r}')e^{i\bar{k}'\bar{r}'}d\bar{r}'d\bar{r} \qquad (П.2)$$

уравнение для $\hat{t}(\bar{k},\bar{k}')$ имеет вид:

$$\hat{t}(k,k') = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d\vec{r}\, V(|\bar{r}-\bar{r}_1|)\, e^{-i(\bar{k}-\bar{k}')\bar{r}} +$$

$$+\frac{2\mu}{(2\pi)^6}\int d\vec{r}\, e^{-i\bar{k}\bar{r}}\, V(|\bar{r}-\bar{r}_1|)\int \frac{e^{i\bar{k}''\bar{r}}\, t(\bar{k}''\bar{k}')}{k^2-k''^2+i\gamma}\, d\bar{k}''. \qquad (П.3)$$

Введем для удобства записи следующие обозначения:

$$\bar{r}-\bar{r}_1 \equiv \vec{\rho} \quad ; \quad q = \bar{k}-\bar{k}' \quad ; \quad q'' = \bar{k}''-\bar{k}'.$$

Перепишем (П.3) в виде:

$$\hat{t}(\bar{k};\bar{k}')e^{i\bar{q}\bar{r}_1} = V(\bar{k},\bar{k}') + 2\mu\int \frac{V(\bar{k},\bar{k}'')e^{i\bar{q}''\bar{r}_1}\hat{t}(k'',k')}{k^2-k''^2+i\gamma}\, d\bar{k}''. \qquad (П.4)$$

Для амплитуды $t(\bar{k},\bar{k}')$ рассеяния на потенциале с центром в начале координат уравнение имеет вид:

$$t(\bar{k},\bar{k}') = V(\bar{k},\bar{k}') + 2\mu\int \frac{V(\bar{k},\bar{k}'')\, t(\bar{k}'',\bar{k}')\, d\bar{k}''}{k^2-k''^2+i\gamma}. \qquad (П.5)$$

Сравнивая (П.4) и (П.5), получаем

$$\hat{t}(\bar{k},\bar{k}') = t(\bar{k},\bar{k}')e^{-i\bar{q}\bar{r}_1}. \qquad (П.6)$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Рассмотрим интеграл:

$$I = A_{JM}(J_2M_2;\ell m)\int_0^\infty \frac{k''^2 dk''\, t_{1J}(k',k'')\, j_\ell(k''r_{12})\, t^{(2)}_{J_2M_2}(k'',\vec{k})}{k''^2-k^2-i\gamma}. \qquad (П.7)$$

Коэффициент $A_{JM}(J_2M_2;\ell m)$ x/ отличен от нуля только в том случае, если сумма $J+\ell+J_2$ –четное число. Тогда подынтегральная функция в (П.7) является четной относительно изменения знака k''. Действительно, согласно формулам

$$t_{1J}(k'k'')Y_{JM}(\bar{k}'') = i^J(2J+1)\int t_1(r'r'')e^{-i\bar{k}'\bar{r}'}\, j_J(k''r'')Y_{JM}\left(\frac{\bar{r}''}{r''}\right)d\bar{r}'d\bar{r}'' \qquad (П.8)$$

---

x/

$$A_{JM}(J_2M_2;\ell m) \equiv \left\{\frac{(2J_2+1)(2\ell+1)}{4\pi(2J+1)}\right\}^{1/2}(J_2\ell 00|J0)(J_2\ell M_2 m|JM).$$

$$t^{(2)}_{J_2M_2}(k''\bar{k}) = (-i)^{J_2}(2J_2+1)\int t^{(2)}(r''r)e^{i\bar{k}\bar{r}}\, j_{J_2}(k''r')Y^{*}_{J_2M_2}\left(\frac{\bar{r}''}{r''}\right)d\bar{r}d\bar{r}'' \qquad (\text{П.9})$$

четность $t_{1J}(k')$ равна $(-1)^{J}$, а четность $t^{(2)}_{J_2M_2}$ равна $(-1)^{J_2}$.

Воспользуемся четностью подынтегрального выражения и распространим интегрирование на всю вещественную ось. После этого заменим под интегралом $j_\ell(k''r_{12})$ на $h^{(1)}_\ell(k''r_{12})$. Поскольку $h^{(1)}_\ell = j + in$, а n_ℓ имеет четность, противоположную j_ℓ, такая замена величины интеграла не меняет. Теперь можно замкнуть путь интегрирования в верхней полуплоскости дугой бесконечного радиуса. Дело в том, что согласно уравнению для t в координатном представлении $t = v - vgv$ матрица t -обращается в нуль вне области взаимодействия v_1 с радиусом R_1, а следовательно, ее фурье-образ $t(k, k')$ не может возрастать в верхней полуплоскости быстрее, чем $e^{\text{Im}\, kR_1}$. Поскольку в рассматриваемом случае выполняется условие $r_{12} > R_1 + R_2$ (области взаимодействия с центрами 1 и 2 не пересекаются), то $h^{(1)}(k''r)$ обеспечит экспоненциальное спадание подынтегральной функции в верхней полуплоскости и интеграл по дуге будет равен нулю.

Интеграл по замкнутому контуру просто берется:

$$I = A_{JM}(J_2M_2\ell m)\frac{\pi i}{2}t_{1J}(k)h^{(1)}_\ell(kr_{12})t^{(2)}_{J_2M_2}(\bar{k}) , \qquad (\text{П.10})$$

Л и т е р а т у р а

1. K.A.Brueckner. Phys. Rev., 89, 834 (1953).
2. Л.Д. Фаддеев. Теория рассеяния для системы из трех частиц. ЖЭТФ, 39, 1459(1960).
3. В.Г. Барышевский, В.Л. Любошиц, М.И. Подгорецкий. Препринт ОИЯИ, Р-2111, Дубна, 1965.

Рукопись поступила в издательский отдел
25 января 1966 г.