ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р - 2546

ЛАБОРАТОРИЯ НЕЙТРОННОЙ ФИЗИКИ

В.Н. Ефимов

ОБ ОДНОМ ПРИБЛИЖЕННОМ МЕТОДЕ В ЗАДАЧЕ ДВУХ НУКЛОНОВ

1966

Р - 2546

В.Н. Ефимов

ОБ ОДНОМ ПРИБЛИЖЕННОМ МЕТОДЕ В ЗАДАЧЕ ДВУХ НУКЛОНОВ

§ 1. Введение

В работе[1] было указано, что для решения задач двух и трех нуклонов при малых энергиях удобно использовать хорошо известный метод решения интегральных уравнений-метод Бубнова-Галеркина[2]. Это обстоятельство связано с тем, что при малых энергиях поведение волновой функции в области действия ядерных сил определяется в основном наличием двухчастичного уровня (реального или виртуального) с небольшой энергией. В этом случае волновая функция в пределах потенциала меняется достаточно плавно (по крайней мере сильно не осциллирует) и может быть хорошо аппроксимирована степенным рядом с небольшим числом членов.

Ниже будет рассмотрено применение метода Бубнова-Галеркина к задаче двух нуклонов, взаимодействие которых описывается некоторым феноменологическим центральным потенциалом. В данном случае метод заключается в разложении волновой функции в области действия потенциала по полной системе ортогональных функций, радиальные части которых выбираются в виде полиномов, ортогональных с весом, определяемым радиальной зависимостью потенциала. Такой выбор базисных функций позволяет получить для волновой функции дейтрона и амплитуды рассеяния приближенные выражения, учитывающие малость радиуса взаимодействия относительно характеристических размеров системы. В частности, нулевое приближение соответствует замене волновой функции в области действия потенциала ее средним значением по этой области, причем решение в нулевом приближении метода Бубнова-Галеркина тождественно совпадает с точным решением уравнения Шредингера с нелокальным факторизующимся потенциалом Ямагучи[3]. В общем случае применение метода Бубнова-Галеркина в задаче двух нуклонов дает для парной t -матрицы вне энергетической поверхности приближенное факторизованное выражение, удовлетворяющее необходимым условиям симметрии и унитарности.

§ 2. Приближенное выражение для t -матрицы

1. Волновая функция, описывающая рассеяние двух нуклонов, взаимодействие которых характеризуется центральным потенциалом, удовлетворяет следующему интегральному уравнению:

$$\Psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = e^{i\vec{k}\vec{r}} + \frac{V}{(2\pi)^3}\int d\vec{p}\,d\vec{r}\,' \frac{e^{i\vec{p}(\vec{r}-\vec{r}\,')}}{p^2 - Z} f(r')\Psi_{\vec{k}}(\vec{r}\,') , \qquad (1)$$

где $- Vf(r)$ -потенциал взаимодействия, $\vec{k}$ - начальный импульс сталкивающихся нуклонов в с.ц.м., $Z = E + i0$, E - энергия в с.ц.м.[x/]

Предположим, что функция $f(r)$, определяющая радиальную зависимость потенциала, знакопостоянна и что существует интеграл $\int d\vec{r}\, f(r)$. В этом случае всегда можно построить полную систему ортонормированных функций $\phi_\mu(\vec{r})$, удовлетворяющих условиям ортогональности:

$$\int d\vec{r} f(r)\phi_\mu(\vec{r})\phi^*_{\mu'}(\vec{r}) = \delta_{\mu\mu'} , \qquad (2)$$

если $\phi_\mu(\vec{r})$ определить следующим образом:

$$\phi_\mu(\vec{r}) \equiv \phi_{\ell m\lambda}(\vec{r}) = r^\ell L_{\ell\lambda}(r) Y_{\ell m}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) , \qquad (3)$$

где $Y_{\ell m}$ -сферические функции, $L_{\ell\lambda}(r)$ -ортогональные полиномы порядка $\lambda\ (\lambda = 0,1,2,\ldots)$, для которых имеют место соотношения ортонормированности:

$$\int_0^\infty r^2 dr f(r) r^{2\ell} L_{\ell\lambda}(r) L_{\ell\lambda'}(r) = \delta_{\lambda\lambda'} \qquad (4)$$

Следуя методу Бубнова-Галеркина /2/, будем искать волновую функцию в виде ряда по ϕ_μ:

$$\Psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = \sum_\mu c_\mu \phi_\mu(\vec{r}), \qquad (5)$$

коэффициенты которого определяются, согласно (2), следующим образом:

$$c_\mu = \int d\vec{r} f(r)\phi^*_\mu(\vec{r})\Psi_{\vec{k}}(\vec{r}) . \qquad (6)$$

---

x/ Используется система единиц, в которой $\hbar = M = 1$, M - масса нуклона.

Если в (6) подставить $\Psi_{\vec{k}}(\vec{r})$ в виде правой части уравнения (1), то легко получить для коэффициентов c_μ систему линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{\mu'}[\delta_{\mu\mu'} - B_{\mu\mu'}(Z)]c_{\mu'}(\vec{k}, Z) = M_\mu(\vec{k}), \tag{7}$$

где

$$M_\mu(\vec{k}) = \int d\vec{r} f(r)\, \phi^*_\mu(\vec{r}) e^{i\vec{k}\vec{r}}, \tag{8}$$

$$B_{\mu\mu'}(Z) = \frac{V}{(2\pi)^3}\int d\vec{p}\, \frac{M_\mu(\vec{p}) M^*_{\mu'}(\vec{p})}{p^2 - Z}. \tag{9}$$

Легко видеть, что при определении c_μ разложение (5) используется только в области действия потенциала. Это обстоятельство оправдывает выбор базисных функций в виде (3), так как при не очень больших энергиях волновая функция в пределах потенциала меняется достаточно плавно и может быть хорошо аппроксимирована небольшим числом полиномов. Вне области действия потенциала волновая функция должна определяться с помощью уравнения (1). В частности, из этого уравнения следует, что в импульсном представлении волновую функцию можно записать в следующем виде:

$$\Psi_{\vec{k}}(\vec{p}) = (2\pi)^3 \delta(\vec{p} - \vec{k}) + \frac{4\pi\, t(\vec{p}, \vec{k}, Z)}{p^2 - Z},$$

где

$$t(\vec{p}, \vec{k}, Z) = \frac{V}{4\pi}\int d\vec{r}\, e^{-i\vec{p}\vec{r}} f(r) \Psi_{\vec{k}}(\vec{r}). \tag{10}$$

С точностью до константы $t(\vec{p}, \vec{k}, Z)$ совпадает с обычным определением парной t-матрицы и удовлетворяет известному интегральному уравнению:

$$t(\vec{p}, \vec{k}, Z) = \frac{V}{4\pi} f(\vec{p} - \vec{k}) + \frac{V}{(2\pi)^3}\int d\vec{p}\,' \frac{f(\vec{p} - \vec{p}\,') t(\vec{p}\,', \vec{k}, Z)}{p'^2 - Z}, \tag{11}$$

где

$$f(p) = \int d\vec{r} e^{-i\vec{p}\vec{r}} f(r).$$

В выражении (10) можно воспользоваться для $\Psi_{\vec{k}}(\vec{r})$ разложением (5) и получить для t-матрицы следующее приближенное факторизованное выражение:

$$t(\vec{p}, \vec{k}, Z) = \frac{V}{4\pi}\sum_\mu M^*_\mu(\vec{p}) c_\mu(\vec{k}, Z), \tag{12}$$

которое можно распространить на произвольные значения комплексного параметра, входящего в уравнение (11). Если в качестве базисных функций выбраны функции (3), то согласно соотношениям (6)-(9) выражение (12) легко преобразуется к виду:

$$t(\vec{p},\vec{k},Z) = \sum_{\ell}(2\ell+1)t_{\ell}(p,k,Z)P_{\ell}\left(\frac{\vec{p}\vec{k}}{pk}\right), \tag{13}$$

где

$$t_{\ell}(p,k,Z) = V\sum_{\lambda} M_{\ell\lambda}(p)c_{\ell\lambda}(k,Z), \tag{14}$$

$$M_{\ell\lambda}(p) = \int_0^{\infty} r^2\,dr\,f(r)r^{\ell}L_{\ell\lambda}(r)j_{\ell}(pr), \tag{15}$$

$j_{\ell}(pr)$ – сферическая функция Бесселя. Коэффициенты $c_{\ell\lambda}(k,Z)$ в (14) удовлетворяют следующим системам линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{\lambda'}[\delta_{\lambda\lambda'} - B_{\ell,\lambda\lambda'}(Z)]c_{\ell\lambda'}(k,Z) = M_{\ell\lambda}(k), \tag{16}$$

где

$$B_{\ell,\lambda\lambda'}(Z) = \frac{2V}{\pi}\int_0^{\infty} p^2\,dp\,\frac{M_{\ell\lambda}(p)M_{\ell\lambda'}(p)}{p^2 - Z}. \tag{17}$$

Амплитуда рассеяния $F(\vec{k}',\vec{k})$ связана с t-матрицей (10) следующим образом:

$$F(\vec{k}',\vec{k}) = t(\vec{k}',\vec{k},E+i0)\big|_{k'^2=k^2=E},$$

откуда для парциальной амплитуды $F_{\ell}(k)$, согласно (13) и (14), следует:

$$F_{\ell}(k) = V\sum_{\lambda} M_{\ell\lambda}(k)c_{\ell\lambda}(k,k^2+i0). \tag{18}$$

2. Известно, что t-матрица, являющаяся решением уравнения (11), удовлетворяет условиям симметрии и унитарности [4], которые для парциальных компонент имеют следующий вид:

$$t_{\ell}(p,k,Z) = t_{\ell}^{*}(k,p,Z^{*}), \tag{19}$$

$$t_{\ell}(p,k,s+i0) - t_{\ell}(p,k,s-i0) =$$

$$= 2i\sqrt{s}\, t_\ell(p,\sqrt{s}, s+i0)\, t_\ell(\sqrt{s}, k, s-i0). \qquad (20)$$

Легко показать, что приближенное выражение (14) для $t_\ell(p,k,z)$ удовлетворяет соотношениям (19) и (20). Действительно, условие (19) совместно с (14) приводит к следующему равенству:

$$\sum_\lambda M_{\ell\lambda}(p)c_{\ell\lambda}(k,Z) = \sum_\lambda M_{\ell\lambda}(k)c^*_{\ell\lambda}(p,Z^*),$$

которое можно получить непосредственно из системы уравнений (16), если учесть, что согласно (17) $B_{\ell,\lambda\lambda'}$ удовлетворяет условиям:

$$B_{\ell,\lambda\lambda'}(Z) = B^*_{\ell,\lambda\lambda'}(Z^*) = B_{\ell,\lambda'\lambda}(Z).$$

Чтобы показать справедливость соотношения (20) для приближенной t-матрицы, воспользуемся известным представлением сингулярных функций:

$$\frac{1}{p^2 - s \pm i0} = P\frac{1}{p^2 - s} \mp i\pi\delta(p^2 - s),$$

где P означает главное значение, и, кроме того, запишем $c_{\ell\lambda}(p,s \pm i0)$ в виде:

$$c_{\ell\lambda}(p,s\pm i0) = a_\lambda(p,s) \pm ib_\lambda(p,s). \qquad (21)$$

Тогда из (16) и (21) следует, что

$$\sum_{\lambda'}[\Delta_{\lambda\lambda'}(s)a_{\lambda'}(p,s) + V\sqrt{s}\, M_{\ell\lambda}(\sqrt{s})M_{\ell\lambda'}(\sqrt{s})b_{\lambda'}(p,s)] = M_{\ell\lambda}(p),$$

$$\sum_{\lambda'}[\Delta_{\lambda\lambda'}(s)b_{\lambda'}(p,s) - V\sqrt{s}\, M_{\ell\lambda}(\sqrt{s})M_{\ell\lambda'}(\sqrt{s})a_{\lambda'}(p,s)] = 0, \qquad (22)$$

где

$$\Delta_{\lambda\lambda'}(s) = \delta_{\lambda\lambda'} - \frac{2V}{\pi}P\int_0^\infty p^2\,dp\,\frac{M_{\ell\lambda}(p)M_{\ell\lambda'}(p)}{p^2 - s}.$$

Из условия (20) и выражений (14) и (21) вытекает следующее равенство:

$$\sum_\lambda M_{\ell\lambda}(p)b_\lambda(k,s) = V\sqrt{s}\sum_{\lambda\lambda'} M_{\ell\lambda}(\sqrt{s})M_{\ell\lambda'}(\sqrt{s})\{a_\lambda(p,s)a_{\lambda'}(p,s) +$$

$$+ b_\lambda(p,s)\,b_{\lambda'}(k,s) - i[a_\lambda(p,s)b_{\lambda'}(k,s) - a_{\lambda'}(k,s)b_\lambda(p,s)]\},$$

справедливость которого легко установить с помощью уравнений (22).

3. Волновая функция $\Psi_d(r)$ связанного S-состояния двух нуклонов удовлетворяет однородному интегральному уравнению:

$$\Psi_d(r) = \frac{V}{(2\pi)^3}\int d\vec{p}\, d\vec{r}'\, \frac{e^{i\vec{p}(\vec{r}-\vec{r}')}}{p^2+\alpha^2}\, f(r')\Psi_d(r') \ , \tag{23}$$

где α^2 - энергия связи дейтрона. Если разложить $\Psi_d(r)$ по базисным функциям (3) с $\ell = 0$, то для определения коэффициентов разложения $c_{0\lambda}$ вместо (16) получится однородная система линейных алгебраических уравнений:

$$\sum_{\lambda'} [\delta_{\lambda\lambda'} - B_{0,\lambda\lambda'}(-\alpha^2)] c_{0\lambda}(-\alpha^2) = 0 \ . \tag{24}$$

Эта система уравнений имеет нетривиальное решение, если ее определитель равен нулю:

$$|\delta_{\lambda\lambda'} - B_{0,\lambda\lambda'}(-\alpha^2)| = 0 \ . \tag{25}$$

Условие (25) можно рассматривать как уравнение для собственного значения α^2. Это условие приводит также к появлению полюса при $Z = -\alpha^2$ в S -компоненте t - матрицы (14). Из уравнения (23) легко получить, по аналогии с выводом выражения (12) волновую функцию дейтрона в импульсном представлении:

$$\Psi_d(p) = \frac{N}{p^2+\alpha^2}\sum_{\lambda} c_{0\lambda}(-\alpha^2) M_{0\lambda}(p) \ , \tag{26}$$

где N - нормировочная константа. Выражение (26) фактически представляет собой приближение по степеням αr_0, где r_0 - радиус взаимодействия, так как из определения (15) $M_{\ell\lambda}(p)$ и из свойств ортогональных полиномов $L_{\ell\lambda}(r)$ следует, что в разложении $M_{0\lambda}(p)$ по степеням p наинизшая степень будет не меньше, чем λ, а в волновой функции дейтрона существенны импульсы порядка α. Аналогично при $k \gtrsim \alpha$ выражение (18) для амплитуды рассеяния справедливо с точностью до $(kr_0)^n$, где n -максимальный порядок используемых полиномов. При $k < \alpha$ поведение волновой функции определяется в основном наличием близкого уровня, и в этом случае, как и для связанного состояния, параметром разложения будет αr_0.

4. Рассмотрим более подробно решение задачи двух нуклонов в S -состоянии в нулевом приближении метода Бубнова-Галеркина. В этом случае в разложении (5) используется только одна базисная функция (3) с $\ell = \lambda = 0$. Это означает, что в области действия потенциала волновая функция аппроксимируется константой - средним значением функции по области потенциала. Согласно выражениям (14), (16) и (26), S - компонента t -матрицы и волновая функция дейтрона в нулевом приближении имеют соответственно следующий вид (индекс $\ell = 0$ ниже указываться не будет):

$$t(p,k,Z) = V\frac{M_0(p)M_0(k)}{1-B_{00}(Z)} , \qquad (27)$$

$$\Psi_d(p) = N\frac{M_0(p)}{p^2+\alpha^2} , \qquad (28)$$

где

$$B_{00}(Z) = \frac{2V}{\pi}\int_0^\infty p^2 dp \frac{M_0^2(p)}{p^2-Z} , \qquad (29)$$

$$\frac{1}{N^2} = \frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty p^2 dp \frac{M_0^2(p)}{(p^2+\alpha^2)^2} , \qquad (30)$$

а из условия (25) следует соотношение:

$$1 = \frac{2V}{\pi}\int_0^\infty p^2 dp \frac{M_0^2(p)}{p^2+\alpha^2} . \qquad (31)$$

Решение в нулевом приближении метода Бубнова-Галеркина (27)-(31) совпадает с точным решением задачи двух нуклонов, взаимодействие которых описывается нелокальным факторизующимся потенциалом Ямагучи, имеющим в импульсном представлении вид $g(p)g(p')$ /3/. Такое совпадение объясняется тем, что введение потенциала Ямагучи формально можно рассматривать как приближенное решение уравнения Шредингера в импульсном представлении путем замены локального потенциала $f(|\vec{p}-\vec{p}'|)$ приближенным факторизованным выражением $g(p)g(p')$. В то же время из теории интегральных уравнений известно, что при соответствующем выборе базисных функций метод Бубнова-Галеркина и метод приближенной факторизации ядра приводят к одному и тому же приближенному решению /5/. Решение в нулевом приближении справедливо с точностью включительно до членов, линейных по радиусу взаимодействия r_0 , так как в выражениях (14) и (26) вклад членов с $\lambda \geq 1$ при $pr_0 < 1$ будет порядка $(pr_0)^2$ и меньше. Поэтому из выражений (27)-(31) можно легко получить известные разложения для t -матрицы и волновой функции дейтрона в линейном приближении по r_0 /6/. Для этого заметим, что с точностью до членов порядка r_0^2 имеем:

$$M_0(p) = 1/L_0 . \qquad (32)$$

Далее подставим в выражения (29)-(31) в явном виде $M_0(p)$ согласно определению (15) и проинтегрируем по p . После этого легко получить следующие разложения:

$$B_{00}(E+i0)=\frac{VL_0^2}{2}\left(I_1+\frac{i}{2}\sqrt{E}\,I_2-\frac{1}{6}EI_3+\dots\right), \tag{33}$$

$$\frac{1}{N^2}=\frac{L_0^2}{16\pi a}\left(\tfrac{1}{2}I_2-\frac{a}{3}I_3+\dots\right), \tag{34}$$

$$1=\frac{VL_0^2}{2}\left(I_1-\frac{a}{2}I_2+\frac{a^2}{6}I_3-\dots\right), \tag{35}$$

где

$$I_n=\int_0^\infty r dr f(r)\int_0^\infty r'dr' f(r')\left[(r+r')^n-|r-r'|^n\right].$$

Если теперь воспользоваться выражениями (32) - (35) и разложением для S -фазы рассеяния

$$k\,\mathrm{ctg}\,\delta=t^{-1}(k,k,k^2+i0)+ik=-\frac{1}{a}+\tfrac{1}{2}r_0k^2-\dots,$$

где a - длина рассеяния, то для триплетной t -матрицы и волновой функции дейтрона можно получить следующие выражения, справедливые в линейном приближении по r_0

$$t(p,k,E+i0)=\frac{1}{-(a+i\sqrt{E})+\tfrac{1}{2}r_0(a^2+E)}, \tag{36}$$

$$\Psi_d(p)=2\sqrt{2\pi a}\,\left(1+\tfrac{1}{2}ar_0\right)\frac{1}{p^2+a^2}. \tag{37}$$

5. Существенным моментом в применении метода Бубнова-Галеркина является вопрос о его сходимости. В /2/ доказывается, что этот метод применительно к интегральным уравнениям является сходящимся процессом, если ядра интегральных уравнений квадратично интегрируемы и определены в пространстве квадратично интегрируемых функций. Простая замена функции $\sqrt{f}\;\Psi=\Psi'$ в уравнении (1) и соответствующее переопределение $\sqrt{f}\;\phi_\mu=\phi'_\mu$ базисных функций не изменят полученных выше решений, причем в этом случае условие квадратичной интегрируемости ядра $K(\vec r,\vec r\,')$, определяемого выражением

$$K(\vec r,\vec r\,')=[f(r)f(r')]^{1/2}\int d\vec p\,\frac{e^{i\vec p(\vec r-\vec r\,')}}{p^2-Z},$$

будет выполнено, если будет ограничен следующий интеграл:

$$J=\int d\vec p\,d\vec p\,'\,\frac{|f(\vec p-\vec p\,')|^2}{(p^2-Z)(p'^2-Z^*)}.$$

Этот интеграл может быть оценен с помощью неравенства Коши-Буняковского следующим образом:

$$J \le \int d\vec{p}\,|f(p)|^2 \cdot \int \frac{d\vec{p}\,'}{|p'^2 - Z|^2} ,$$

т.е. J ограничено, если при $\mathrm{Re}\,Z>0$ $\mathrm{Im}\,Z \neq 0$, а потенциал $f(r)$ удовлетворяет условию:

$$\int d\vec{r} f^2(r) = \mathrm{const} . \tag{38}$$

В этом случае приближенное решение $\Psi^{(n)}_{\vec{k}}$ уравнения (1) сходится при увеличении порядка приближения n к точному решению $\Psi_{\vec{k}}$ в среднем:

$$\int d\vec{r} f(r) \,|\, \Psi_{\vec{k}}(\vec{r}) - \Psi^{(n)}_{\vec{k}}(\vec{r})|^2 \to 0 , \quad n \to \infty .$$

Для t -матрицы согласно (10) на основании неравенства Коши-Буняковского можно написать:

$$|t(\vec{p},\vec{k},Z) - t^{(n)}(\vec{p},\vec{k},Z)|^2 \le M ,$$

где

$$M = \left(\frac{V}{4\pi}\right)^2 \int d\vec{r} f(r) \cdot \int d\vec{r}\,' f(r') \,|\Psi_{\vec{k}}(\vec{r}\,') - \Psi^{(n)}_{\vec{k}}(\vec{r}\,')|^2 ,$$

причем $M \to 0$ при $n \to \infty$, если конечен интеграл $\int d\vec{r} f(r)$ и если при $\mathrm{Re}\,Z > 0$ $\mathrm{Im}\,Z \neq 0$. Это условие сходимости имеет место и в предельном случае $\mathrm{Im}\,Z \to 0$, так как t - матрица, удовлетворяющая уравнению (11), является непрерывной функцией параметра Z /4/.

§ 3. Конкретный пример: потенциал Юкавы

Основной целью решения задачи двух нуклонов, взаимодействие которых описывается некоторым феноменологическим потенциалом $U(r)$, является установление связи между параметрами потенциала и такими величинами, как энергия связанного состояния a^2, длина рассеяния a, эффективный радиус взаимодействия r_0 и т.д. /7/. В качестве примера применения метода Бубнова-Галеркина рассмотрим потенциал Юкавы:

$$U(r) = - V \frac{e^{-\beta r}}{\beta r} , \tag{39}$$

причем ограничимся только S -состоянием и будем использовать систему единиц, в которой $\beta = 1$. Для удобства будем также опускать индекс $\ell = 0$.
В этом случае $f(r) = e^{-r}/r$ и из условия (4) ортогональности полиномов $L_\lambda(r)$ следует, что они с точностью до константы совпадают с полиномами Лаггера $\mathcal{L}^1_\lambda(r)$ /8/:

$$L_\lambda(r) = [\lambda!(\lambda+1)!]^{-1/2} \mathfrak{L}^1_\lambda(r) . \qquad (40)$$

Согласно (14) $M_\lambda(p)$ выражаются следующим образом:

$$M_\lambda(p) = \frac{1}{p}[\lambda!(\lambda+1)!]^{-1/2} \int_0^\infty dr\, e^{-r} \mathfrak{L}^1_\lambda(r) \sin pr .$$

В частности, для первых двух приближений $\lambda = 0,1$ имеем:

$$M_0(p) = \frac{1}{1+p^2} , \quad M_1(p) = \sqrt{2}\,\frac{p^2}{(1+p^2)^2} , \qquad (41)$$

соответсвенно из выражения (17) следует:

$$B_{00}(k^2+i0) = \frac{V}{2(1-ik)^2} ,$$

$$B_{01}(k^2+i0) = B_{10}(k^2+i0) = \frac{V(1-3ik)}{4\sqrt{2}(1-ik)^3} , \qquad (42)$$

$$B_{11}(k^2+i0) = \frac{V(1-4ik-5k^2)}{8(1-ik)^4} ,$$

$$B_{\lambda\lambda'}(-\alpha^2) = B_{\lambda\lambda'}(k^2+i0)|_{k=i\alpha} .$$

Связь величин, характеризующих рассеяние, с параметрами потенциала можно получить, если сопоставить разложение амплитуды рассеяния (18) по степеням k с известным разложением S -фазы:

$$k \operatorname{ctg}\delta = F^{-1}(k) + ik = -\frac{1}{a} + \frac{1}{2} r_0 k^2 - \dots$$

Тогда, используя выражения (41) и (42), легко получить для первых двух приближений следующие выражения для длины рассеяния a и эффективного радиуса r_0: нулевое приближение $(\lambda = 0)$

$$\frac{1}{a} = \frac{V-2}{2V} , \quad r_0 = \frac{4+V}{V} ; \qquad (43)$$

первое приближение $(\lambda = 0,1)$

$$\frac{1}{a} = -\frac{32-20V+V^2}{4V(8-V)} ,$$

$$r_0 = \frac{1}{V(8-V)}\left[64-18V-3V^2+\frac{2V}{a}(16+V)\right] . \qquad (44)$$

Соответственно из (24)-(26) вытекают следующие выражения для волновой функции дейтрона и уравнения для α.

Нулевое приближение:

$$\Psi_d(p) = \frac{N_0}{(p^2+\alpha^2)(p^2+1)}, \qquad (45)$$

$$V - 2(1+\alpha)^2 = 0;$$

первое приближение:

$$\Psi_d(p) = \frac{N_0}{N_1(p^2+\alpha^2)(p^2+1)}\left[1 + \epsilon\frac{p^2}{p^2+1}\,\frac{4(1+\alpha)}{1+3\alpha}\right],$$

$$V^2 - 4V(5+12\alpha+9\alpha^2) + 32(1+\alpha)^4 = 0, \qquad (46)$$

где

$$N_0 = [8\pi\alpha(1+\alpha)^3]^{1/2},$$

$$N_1 = \left[1 + \frac{6\alpha\epsilon}{1+3\alpha} + \frac{2\alpha(1+5\alpha)\epsilon^2}{(1+3\alpha)^2}\right]^{1/2},$$

$$\epsilon = \frac{2(1+\alpha)^2 - V}{V}.$$

Для потенциала (39) были вычислены энергия связи двух нуклонов α^2, длина рассеяния a и эффективный радиус r_0 для ряда приближений метода Бубнова-Галеркина. Результаты иллюстрируются рис. 1-3. На рис. 1 изображены графики зависимости глубины потенциала V от α (в единицах энергии $\hbar^2\beta^2/M$), а на рис. 2 и 3 - соответственно графики зависимостей a и r_0 (в единицах $1/\beta$) от V. Индексы $n = 0,1,2,3$ указывают порядок приближения, т.е. максимальный порядок используемых полиномов (40). На всех рисунках пунктирные линии соответствуют результатам работы /7/. В таблице 1 приведены также значения глубины потенциала V_0, соответствующего нулевой энергии связи двух нуклонов, причем в последнем столбце указано значение, взятое из работы /7/.

§ 4. Заключение

В методе Бубнова-Галеркина выбор базисных функций в достаточной степени произволен. В § 2 были выбраны базисные функции (3) с простой радиальной зависимостью в виде ортогональных полиномов, вид которых однозначно определяется формой потенциала. Из рис. 1-3 и таблицы 1 видно, что в этом случае использование даже небольшого числа полиномов дает результаты, близкие к результатам работы /7/, которые обычно служат основой при анализе нуклон-нуклонного взаимодействия при малых энергиях. С этой точки зрения можно считать, что в данном случае метод Бубнова-Галеркина обладает достаточно хорошей сходимостью.

Метод Бубнова-Галеркина в задаче двух нуклонов можно рассматривать как метод построения для данного потенциала $U(r)$ некоторого нелокального факторизующегося потенциала, который содержит то же самое число параметров, что и исходный потенциал $U(r)$. Действительно, если непосредственно в уравнении Шредингера в импульсном представлении локальный потенциал $f(\vec{p}-\vec{p}')$ заменить нелокальным $f(\vec{p},\vec{p}') = \sum_{\mu} M^{*}_{\mu}(\vec{p})M_{\mu}(\vec{p}')$, то легко прийти к результатам (12), (25) и (26). Обычно рассматриваются феноменологические потенциалы, содержащие два параметра – глубину и радиус, которые определяются из следующих экспериментальных величин: энергии связи дейтрона, триплетной и синглетной длин рассеяния, синглетного эффективного радиуса. Для некоторого порядка приближения n параметры потенциала могут быть определены с помощью графиков, изображенных на рис. 1-3. Тогда из (13) и (14) следуют соответствующие приближенные выражения для t -матрицы вне энергетической поверхности. Факторизованные выражения (13)-(14) для t -матрицы можно непосредственно использовать в интегральных уравнениях Фаддеева /9/ для трех нуклонов. В этом случае система многомерных интегральных уравнений Фаддеева сводится к системе одномерных интегральных уравнений, решение которой при наличии электронных вычислительных машин вполне доступно.

В заключение автор выражает благоданость В.И. Фурману и И.И. Шелонцеву за выполнение численных расчетов.

Таблица 1

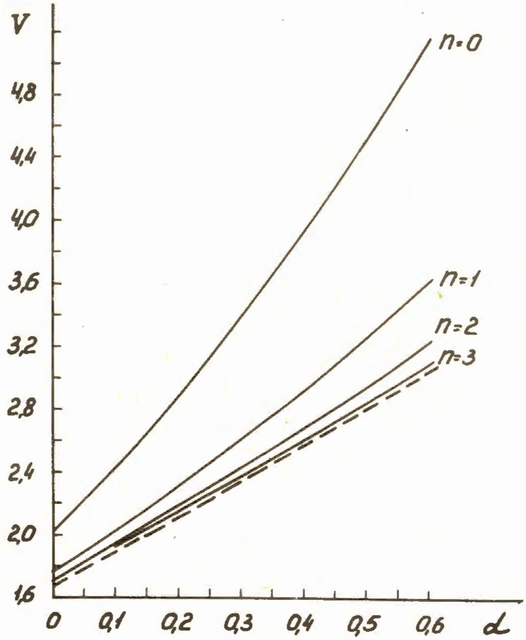
Значения глубины потенциала V_0, соответствующего нулевой энергии связи, в зависимости от порядка приближения n. Значение в последнем столбце взято из работы /7/.

n	0	1	2	3	
V_0	2	1,754	1,702	1,687	1,683

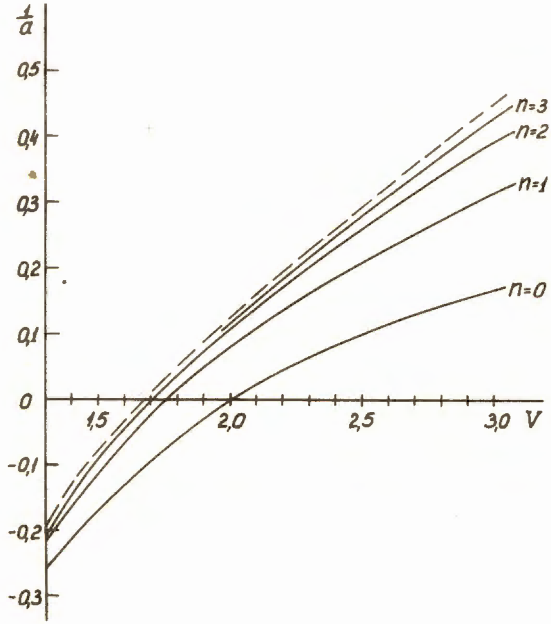
Литература

1. V.N. Efimov. Comptes Rendus du Congres International de Physique Nuclear, v. II, Paris, 1964.
2. С.Г. Михлин. Вариационные методы в математической физике. ГИТТЛ, Москва, 1957.
3. Y.Yamaguchi. Phys. Rev., 95, 1628 (1954).
4. Л.Д.Фаддеев. Труды математического института АН СССР, 69, 1963.
5. Л.В. Канторович и В.И. Крылов. Приближенные методы высшего анализа. ГИТТЛ, Москва, 1952.
6. Г.С. Данилов. ЖЭТФ, 43, 1424 (1962).
7. J.M.Blatt and J.D.Jackson. Phys. Rev., 26, 18 (1949).
8. И.М. Рыжик и И.С. Градштейн. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, ГИТТЛ, Москва, 1951.
9. Л.Д. Фаддеев. ЖЭТФ, 39, 1459 (1960).

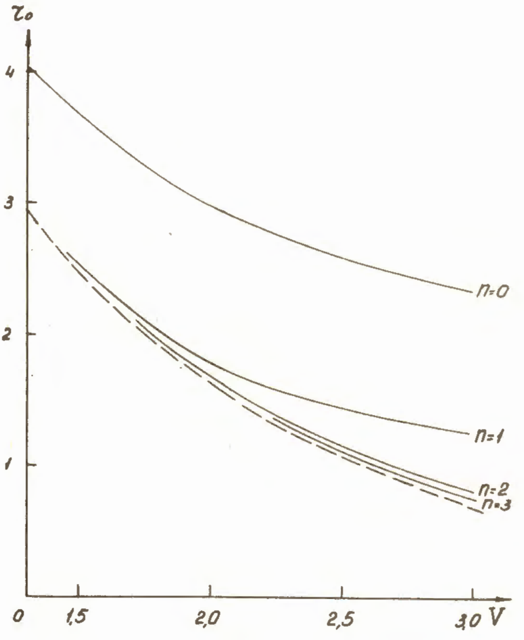
Рукопись поступила в издательский отдел 15 января 1966 г.



Р и с. 1. Зависимость глубины потенциала V от энергии связи α^2 (в единицах энергии $\hbar^2\beta^2/M$). Индекс n указывает порядок приближения. Пунктирная кривая соответствует результатам работы /7/.



Р и с. 2. Зависимость $1/a$ от глубины потенциала V, a –длина рассеяния в единицах $1/\beta$ (см. подпись к рис. 1).



Р и с. 3. Зависимость эффективного радиуса r_0 в единицах $1/\beta$ от глубины потенциала V (см. подпись к рис. 1).