ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р-2532

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

И.И. Тугов

Р-РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ В УРАВНЕНИИ ШРЕДИНГЕРА

1965

Р - 2532

И.И. Тугов

Р - РАЗДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННЫХ В УРАВНЕНИИ ШРЕДИНГЕРА

1. Введение

В работе [1] показано, что разделение переменных в уравнении Шредингера является эффективным методом построения полных наборов операторов, коммутирующих с гамильтонианом и друг с другом. (Константы разделения являются собственными значениями этих операторов). Задача построения полных наборов таких операторов возникает как при исследовании возможных систем собственных функций, так и при рассмотрении вопроса о высших симметриях в квантовой механике [2].

Наряду с полным разделением переменных так называемое P -разделение (частным случаем которого является полное разделение), также дает возможность построить диагональные операторы, соответствующие квантовым числам, определенным на той или иной системе собственных функций. Поэтому было бы естественно рассмотреть случай, более общий по сравнению со стандартным приемом решения квантовомеханических задач, основанном на полном разделении переменных в уравнении Шредингера, – P-разделение переменных. Такая задача интересна и потому, что для атома водорода в импульсном представлении существуют 6 (дискретный спектр) или 34 (непрерывный спектр) возможных наборов квантовых чисел, соответствующих системам координат, в которых разделяются переменные уравнения в импульсном пространстве [1]. Представлялось заманчивым найти аналог этих систем в координатном пространстве и исследовать поля, для которых переменные разделяются. К сожалению, в этом смысле результат работы отрицательный – в эвклидовом пространстве переменные в уравнении Шредингера P -разделяются только в тех системах координат, которые допускают полное разделение переменных .

В первой части работы рассматриваются общие вопросы P -разделения переменных в уравнении Шредингера в n -мерном римановом пространстве. Получены необходимые и достаточные условия P -разделения переменных в уравнении Шредингера и в волновом уравнении.

Вторая часть работы посвящена исследованию разделения переменных в уравнении Шредингера в инвариантной форме. В работе [3] показано, что уравнение Шредингера представимо в инвариантной форме обобщенного уравнения Шредингера в конформно-эвклидовом пространстве, причем потенциал пропорционален скалярной кривизне этого пространства и автоматически удовлетворяет условию разделения переменных. Последнее положение в работе [3] было приведено без доказательства; мы его докажем ниже.

2. Общие вопросы

Рассмотрим в пространстве R_n, $n>2$, определяемом вещественным линейным элементом

$$ds^2 = a_{ij}\, dx^i dx^j , \tag{2.1}$$

где a_{ij} –основной тензор пространства и по индексам i и j проводится суммирование, обобщенное уравнение Шредингера

$$F[u] \equiv \Delta_2 u + (E-V)u = 0. \tag{2.2}$$

Здесь Δ_2 –второй дифференциальный параметр Бельтрами [4]:

$$\Delta_2 u = a^{ij}\,(\partial^2 u/\partial x^i \partial x^j - \Gamma_{ij}^k\, \partial u/\partial x^k),$$

Γ_{ij}^k –символы Кристоффеля 2-го рода, величины a^{ij} определяются при помощи уравнений $a_{jk}\, a^{ij} = \delta_k^i$; $i,k = 1,\dots n$. Будем говорить, что уравнение (2.2) допускает P –разделение переменных в системе координат (x^1, x^2, ... x^n), если оно имеет решения в форме произведения

$$u = \frac{u^1(x^1)u^2(x^2)\dots u^n(x^n)}{P(x^1, x^2, \dots x^n)}, \tag{2.3}$$

где $P(x) \neq 0$ –вполне определенная функция, а $u^i(x^i)$ –любое решение обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка

$$F_i[u] = \frac{d^2 u}{(dx^i)^2} + L_i(x^i, u, \frac{du}{dx^i}) = 0 \tag{2.4}$$

по i –той независимой переменной. Если $P(x)$ –произведение вида

$$P(x) = P^1(x^1)P^2(x^2)\dots P^n(x^n), \tag{2.5}$$

то мы можем сделать $P = 1$, включив $P^i(x^i)$ в $u^i(x^i)$. В этом случае уравнение (2.2) допускает полное разделение переменных.

I. Мы будем рассматривать в пространстве R_n системы координат (x^1, x^2, ... x^n), для которых координатные поверхности ортогональны, т.е. линейные элементы вида

$$ds^2 = a_{11}(dx^1)^2.$$

Это не приводит к ограничению общности, т.к. ортогональность координатных систем непосредственно вытекает из условия (2.3) разделения переменных в уравнении (2.2). Подставив в (2.2) функцию u в виде (2.3), получим

$$F[u] = \frac{\prod_{k=1}^{n} u^k(x^k)}{P} \Big\{ \sum_{i=1}^{n} a^{ii} \Big[\frac{1}{u^i}(u^i)'' - \frac{2P_i}{Pu^i}(u^i)' - \frac{P_{ii}}{P} + \frac{2P_i^2}{P} \Big] +$$

$$+ \sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{n} a^{ij} \Big[\frac{1}{u^i u^j}(u^i)'(u^j)' - \frac{1}{Pu^i}(u^i)'P_j - \frac{1}{Pu^j}(u^j)'P_i - \frac{P_{ij}}{P} + \frac{2P_iP_j}{P^2} \Big] -$$

$$- \sum_{k,\ell,i=1}^{n} \Gamma^i_{k\ell} a^{k\ell} \Big(\frac{1}{u^i}(u^i)' - \frac{1}{P}P_i \Big) + (E - V) \Big\} = 0, \qquad P_i = \partial P/\partial x^i,$$

$$P_{ij} = \frac{\partial^2 P}{\partial x^i \partial x^j}, \quad (u^i)' = \frac{du^i}{dx^i}.$$

Рассмотрим выражение вида

$$F[u] - \frac{\prod_{k=1}^{n} u^k(x^k)}{P} \sum_{i=1}^{n} \frac{a^{ii}}{u^i} F_i[u^i] = \frac{\prod_{k=1}^{n} u^k(x^k)}{P} \Big[\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}} a^{ij}(u^i)'(u^j)' -$$

$$- \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} \Big(\frac{1}{Pu^i}(u^i)'P_j + \frac{1}{Pu^j}(u^j)'P_i + \sum_{k=1}^{n} \Gamma^k_{ij} \frac{1}{u^k}(u^k)' \Big) + \frac{1}{P} \sum_{i,j=1}^{n} a^{ij} \Big(\frac{2P_iP_j}{P} - P_{ij} +$$

$$+ \Gamma^\ell_{ij} P_\ell \Big) + (E - V) - \sum_{i=1}^{n} \frac{a^{ii}}{u^i} L_i\Big(x^i, u^i, \frac{du^i}{dx^i}\Big) \Big] = 0,$$

оно обращается в нуль для любых решений $u^i(x^i)$ обыкновенных дифференциальных уравнений (2.4). Более того, равенство нулю должно быть тождеством по функциям $u^i(x^i)$ и их производным, так как в противном случае мы могли бы рассматривать его как уравнение первого порядка относительно какой-либо функции $u^i(x^i)$, подставив вместо остальных функций $u^j(x^j)$ $(i \neq j)$ произвольные решения соответствующих обыкновенных дифференциальных уравнений. Очевидно, что уравнение первого порядка не может удовлетворяться всеми решениями уравнения 2-го порядка, что противоречит определению условия P-разделения переменных. Следствием тождественности равенства по u^i и $(u^i)'$ является, в частности, условие $a^{ij} = 0, i \neq j$.

II. Докажем, что P-разделение переменных в уравнении (2.2) эквивалентно полному разделению переменных в уравнении

$$\bar{F}[u] \equiv \Delta_2 u + P^k (E - \bar{V}) u = 0, \tag{2.6}$$

где Δ_2 определен на пространстве $\bar{R}_n$, основной тензор которого

$$\bar{a}_{ij} = P^{-k} a_{ij}, \quad k = \frac{4}{n-2}, \tag{2.7}$$

$$\bar{V} = V + \sum_{i=1}^{n} \frac{P}{\sqrt{a}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\sqrt{a}}{P^2 a_{ii}} \frac{\partial P}{\partial x^i} \right). \tag{2.8}$$

Действительно, если уравнение (2.2) допускает P -разделение переменных в системе координат ($x^1, x^2, \ldots x^n$) пространства R_n , т.е. имеет решения в виде (2.3), то, очевидно, что уравнение

$$F'[u] \equiv PF[P^{-1} u] = 0 \tag{2.9}$$

будет иметь решения в виде $u(x) = u^1(x^1) u^2(x^2) \ldots u^n(x^n)$, где $u^i(x^i)$ удовлетворяют тем же обыкновенным дифференциальным уравнениям (2.4), т.е. допускает полное разделение переменных.

Перепишем уравнение (2.2) в виде

$$F[u] = a^{ij} u_{ij} + b^i u_i + cu = 0, \tag{2.2'}$$

где $u_i = \partial u/\partial x^i$, $u_{ij} = \partial^2 u/\partial x^i \partial x^j$; $a^{ij} = a^{ji}$, b^i и c являются заданными функциями от x . Тогда уравнение (2.9) примет следующий вид:

$$F'[u] \equiv e^{-\theta} F[e^{\theta} u] = a^{ij} u_{ij} + (b^i + 2a^{ij} \theta_j) u_i + (c + b^i \theta_i + a^{ij} \theta_{ij} + a^{ij} \theta_i \theta_j) u = 0, \tag{2.10}$$

где $e^{-\theta(x)} = P(x)$, $\theta_i = \partial\theta/\partial x^i$, $\theta_{ij} = \partial^2 \theta/\partial x^i \partial x^j$. Определим величины a^i следующим образом:

$$a^i = b^i + a^{k\ell} \Gamma^i_{k\ell} . \tag{2.11}$$

Очевидно, что у уравнения (2.2') все $a^i = 0$,

$$a^i = b^i + a^{k\ell} \Gamma^i_{k\ell} = -a^{k\ell} \Gamma^i_{k\ell} = 0 . \tag{2.12}$$

Для уравнения (2.10) имеем ($a'^{ij} = a^{ij}$)

$$a'^i = b'^i + a'^{k\ell}\Gamma'^i_{k\ell} = b'^i + a^{k\ell}\,\Gamma^i_{k\ell} =$$

$$= b^i + 2a^{ij}\,\theta_j + a^{k\ell}\,\Gamma^i_{k\ell} = a^i + 2a^{ij}\,\theta_j = 2a^{ij}\,\theta_j \quad . \tag{2.13}$$

Рассмотрим теперь уравненне, полученное умножением левой части уравнения (2.10) на некоторую функцию от x

$$\bar{F}[u] \equiv e^{-2\bar{\theta}}\, F[u] = 0 . \tag{2.14}$$

Отмечая коэффициенты преобразованного уравнения чертой, будем иметь формулы:

$$a'^{ij} = e^{2\bar{\theta}}\bar{a}^{ij} \quad , \quad b'^i = e^{2\bar{\theta}}\,\bar{b}^i \; , \; c' = e^{2\bar{\theta}}\,\bar{c} \quad . \tag{2.15}$$

Очевидно, что

$$\bar{a}_{ij} = e^{2\bar{\theta}}\, a'_{ij} \tag{2.16}$$

и ассоциированное с уравнением (2.14) пространство определяется линейным элементом

$$\overline{ds^2} = e^{2\bar{\theta}}\, ds'^2 \quad . \tag{2.17}$$

Мы можем вычислить величины $\bar{a}^i$ для уравнения (2.14), воспользовавшись следующим соотношением [4] между символами Кристоффеля 2-го рода пространств, основные тензоры которых связаны между собой формулой (2.16),

$$\Gamma'^k_{ij} = \bar{\Gamma}^k_{ij} - \delta^k_i\,\bar{\theta}_j - \delta^k_j\,\bar{\theta}_i + \bar{a}_{ij}\,\bar{a}^{k\ell}\bar{\theta}_\ell \quad , \tag{2.18}$$

где $\bar{\theta}_j = \partial\bar{\theta}/\partial x^j$. Из выражений (2.15) и (2.18) получим

$$\begin{aligned} a'^k = b'^k + \Gamma'^k_{ij}\, a'^{ij} &= e^{2\bar{\theta}}\,[\bar{b}^k + \bar{a}^{ij}\,\bar{\Gamma}^k_{ij} - 2\bar{a}^{ki}\,\bar{\theta}_i + n\bar{a}^{k\ell}\,\bar{\theta}_\ell\,] = \\ &= e^{2\bar{\theta}}\,[\bar{a}^k + (n-2)\,\bar{a}^{k\ell}\,\bar{\theta}_\ell\,] . \end{aligned} \tag{2.19}$$

Выберем множитель $e^{-2\bar{\theta}(x)}$ в уравнении (2.14) так, чтобы члены этого уравнения, содержащие производные первого и второго порядка имели вид $\Delta_2 u$, где оператор Δ_2 определен на пространстве с основным тензором (2.16). Поскольку это пространство определяется как раз таким образом, чтобы коэффициенты при вторых производных уравнения (2.14) совпадали с соответствующими коэффициентами в выражении для оператора Δ_2, определенного на метрике (2.17), остается потребовать, чтобы все величины $\bar{a}^{i} = 0$. Действительно, в этом случае $\bar{b}^{i} = -\bar{a}^{k\ell}\Gamma^{i}_{k\ell}$ и содержащие производные члены уравнения (2.14) запишутся в виде $\Delta_2 u$, где оператор Δ_2 определен на метрике (2.17). Подставив в выражение (2.19) величины a'^{k} из (2.13) и положив $\bar{a}^{k} = 0$, получим следующую систему уравнений для определения функции $\bar{\theta}(x)$:

$$2a^{kj}\theta_j = (n-2)e^{2\bar{\theta}}\bar{a}^{kj}\bar{\theta}_j = (n-2)a^{kj}\theta_j .$$

Последняя всегда разрешима

$$\bar{\theta}(x) = \frac{2}{n-2}\theta(x) + \text{const} . \qquad (2.20)$$

Таким образом, при $e^{-2\bar{\theta}} = e^{-\frac{4}{n-2}\theta} = P^{k}$, где $k = \frac{4}{n-2}$, уравнение (2.14) имеет следующий вид:

$$\bar{F}[u] = \bar{a}^{ij}u_{ij} - \bar{\Gamma}^{i}_{k\ell}\bar{a}^{k\ell}u_i + P^{k}(E - V + a^{ij}\theta_{ij} + a^{ij}\theta_i\theta_j + b^{i}\theta_i)u = \Delta_2 u + P^{k}(E - \bar{V})u = 0$$

$$k = \frac{4}{n-2} , \qquad (2.14')$$

где оператор Δ_2 определен на пространстве с основным тензором

$$\bar{a}_{ij} = P^{-k}a_{ij} . \qquad (2.17')$$

Приведем величину $\bar{V}$ к виду, который в дальнейшем будет для нас удобным:

$$V = V - a^{ij}\theta_{ij} - a^{ij}\theta_i\theta_j - b^{i}\theta_i = V - a^{ii}\left(\frac{P_i^2}{P^2} - \frac{P_{ii}}{P}\right) - a^{ii}\frac{P_i^2}{P} + b^{i}\frac{P_i}{P} =$$

$$= V + \frac{a^{ii}}{P}\left(P_{ii} - \frac{2P_i^2}{P}\right) - \frac{a^{jj}\Gamma^{i}_{jj}P_i}{P} = V + \frac{a^{ii}}{P}\left[P_{ii} - P_i\left(\frac{2P_i}{P} + \frac{a^{jj}}{a^{ii}}\Gamma^{i}_{jj}\right)\right] .$$

Здесь использовано условие ортогональности $a_{ij} = 0;\ i,j = 1,\dots n,\ i \neq j;\ P_i = \partial P/\partial x^{i}$, $P_{ii} = \partial^2 P/\partial x^{i\,2}$, по индексам i и j предполагается суммирование. Из формул (15,7) работы [4] нетрудно получить следующее выражение:

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{a^{jj}}{a^{ii}}\Gamma^{i}_{jj} = -\frac{\partial}{\partial x^{i}}\ln\frac{\sqrt{a}}{a_{ii}} = -\frac{a_{ii}}{\sqrt{a}}\frac{\partial}{\partial x^{i}}\left(\frac{\sqrt{a}}{a_{ii}}\right) , \qquad (2.21)$$

где $a = \det|a_{ij}|$ и $a_{ii} = \frac{1}{a^{ii}}$ вследствие ортогональности координатных поверхностей. Подставляя выражение (2.21) в предыдущее, получим

$$\bar{V} = V + \frac{a^{ii}}{P}\{P_{ii} - P_i\,[\frac{2P_i}{P} - \frac{a_{ii}}{\sqrt{a}}\frac{\partial}{\partial x^i}(\frac{\sqrt{a}}{a_{ii}})]\} = V + \sum_{i=1}^{n}\frac{P}{\sqrt{a}}\frac{\partial}{\partial x^i}(\frac{\sqrt{a}}{P^2 a_{ii}}\frac{\partial P}{\partial x^i}). \qquad (2.22)$$

Итак, утверждение, сформулированное в начале пункта II, доказано (формулы (2.14'), (2.17') и (2.22)).

III Рассмотрим полное разделение переменных в уравнении (2.6)

$$\bar{F}[u] \equiv \Delta_2 u + (P^k E - P^k \bar{V})\,u = 0\ ,$$

эквивалентном уравнению (2.2).

$$F[u] = 0\ ,$$

$$\bar{F}[u] \equiv P^k F[u] \equiv P^{k+1} F[P^{-1}u] = 0\ . \qquad (2.2')$$

Если уравнение (2.2) допускает P -разделение переменных в системе координат $(x^1, x^2, \dots x^n)$, т.е. имеет решения в виде (2.3), то функции $u = \prod_{i=1}^{n} u^i(x^i)$ (где $u^i(x^i)$ -любое решение тех же обыкновенных дифференциальных уравнений (2.4), что и функции $u^i(x^i)$ в (2.3)) будут, очевидно, решениями уравнения (2.6), т.е. последнее допускает полное разделение переменных. С другой стороны, если уравнение (2.6) допускает полное разделение переменных, т.е. имеет решения в виде $u(x) = \prod_{i=1}^{n} u^i(x^i)$, то уравнение (2.2) имеет решения $u(x) = P\prod_{i=1}^{n} u^i(x^i)$, где $u^i(x^i)$ удовлетворяют тем же разделенным уравнениям. Таким образом, вместо P -разделения переменных в уравнении (2.2) можно рассматривать полное разделение переменных в эквивалентном ему уравнении (2.6).

Необходимые и достаточные условия полного разделения переменных в уравнении (2.6) легко получить, используя его аналогию с уравнением Шредингера. Как известно,[5] уравнение Шредингера допускает в системе координат $(x^1, x^2, \dots x^n)$ пространства R_n $ds^2 = a_{ii}(dx^i)^2$ полное разделение переменных в том и только в том случае, если существуют n^2 функций $\phi_{ij} = \phi_{ij}(x^i)$ и $2n$ функций $f_i = f_i(x^i), \chi_i = \chi_i(x^i)$, удовлетворяющих условиям

$$a^{ii} = (\phi^{-1})_{i1}\ ,\quad a^{ij} = 0\ ,\quad i, j = 1, \dots n\ ; \qquad (A)$$

$$V = \sum_{i=1}^{n} (\phi^{-1})_{i1}\,\chi_i(x^i)\ ; \qquad (B)$$

$$\frac{\phi}{\sqrt{a}} = \prod_{i=1}^{n}\frac{1}{f_i}\ ,\quad \phi = \det|\phi_{ij}|\ ; \qquad (C)$$

где $|(\phi^{-1})_{ij}|$ —определитель, обратный определителю Штеккеля $|\phi_{ij}|$, $a = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$. Уравнение (2.2) представимо в форме

$$F[u] = \sum_{i=1}^{n} (\phi^{-1})_{1i} F_i [u] = 0, \tag{2.23}$$

а разделенные уравнения имеют вид

$$F_i[u] \equiv \frac{1}{f_i}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(f_i \frac{\partial u}{\partial x^i}\right) + \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \phi_{ij} + \chi_i\right) u = 0, \tag{2.24}$$

$$i = 1,2,\dots n,$$

где $\alpha_1 = E$, $\alpha_2, \dots \alpha_n$ – константы разделения (существенно, что ранг матрицы $\|\partial F_i / \partial a_j\|$ равен n).

Уравнение (2.6) вместо постоянной содержит произведение $P^k E$. Поэтому, если вместо определителя Штеккеля $|\phi_{ij}|$ мы введем определитель, элементы которого

$$|\bar{\phi}_{ij}| = \begin{vmatrix} P^{-k}\phi_{11} & \phi_{12} \dots \phi_{1n}, \\ P^{-k}\phi_{21} & \phi_{22} \dots \phi_{2n}, \\ \dots\dots\dots & \\ \dots\dots\dots & \\ P^{-k}\phi_{n1} & \phi_{n2} \quad \phi_{nn}, \end{vmatrix} \tag{2.25}$$

где $\phi_{ij} = \phi_{ij}(x^i)$, то, рассматривая уравнение (2.6) формально как уравнение Шредингера, мы получим необходимые и достаточные условия разделения в нем переменных в виде условий (A),(B),(C), в которых величины ϕ_{ij} заменены на $\bar{\phi}_{ij}$ из (2.25).

Разделенные уравнения будут иметь вид:

$$F_i[u] \equiv \frac{1}{f_i}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(f_i \frac{\partial u}{\partial x^i}\right) + (\bar{\alpha}_j \phi_{ij} + \chi_i) u =$$

$$= \frac{1}{f_1}\frac{\partial}{\partial x^1}\left(f_1 \frac{\partial u}{\partial x^1}\right) + \left(E P^k P^{-k} \phi_{11} + \sum_{j=2}^{n} \alpha_j \phi_{1j} + \chi_1\right) u = \frac{1}{f_i}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(f_i \frac{\partial u}{\partial x^i}\right) \tag{2.26}$$

$$+ (\alpha_j \phi_{ij} + \chi_i) u = 0, \quad \bar{\alpha}_1 = P^k E, \ \bar{\alpha}_j = \alpha_j, \ j = 2, \dots n,$$

т.е. зависят только от одной переменной. Известно /6/, что требование $\phi_{ij} = \phi_{ij}(x^i)$ (т.е. функции ϕ_{ij} должны быть элементами определителя Штеккеля) обусловлено тем, чтобы каждый член суммы по j в уравнении (2.24) зависел только от x^i и чтобы миноры элементов первого столбца определителя $|\phi_{ij}|$ не зависели от x^j. Очевидно, что в случае уравнения (2.6) определитель $|\bar{\phi}_{ij}|$ (2.25) удовлетворяет этим требованиям. Таким образом, для полного разделения переменных в уравнении

$$\bar F[u] \equiv \Delta_2 u + (P^k E - P^k \bar V) u = 0$$

в системе координат $(x^1, x^2, \dots x^n)$, $\bar{ds}^2 = \bar a_{ii} (dx^i)^2$ необходимо и достаточно существование n^2 функций $\phi_{ij} = \phi_{ij}(x^i)$ и $2n$ функций $f_i = f_i(x^i)$, $\chi_i = \chi_i(x^i)$, таких, что

$$\bar a^{ii} = (\bar\phi^{-1})_{i1}, \quad \bar a^{ij} = 0, \quad i \neq j, \tag{2.27}$$

$$P^k \bar V = \sum_{i=1}^{n} (\bar\phi^{-1})_{i1} \chi_i(x^i), \tag{2.28}$$

$$\frac{\phi}{\sqrt{\bar a}} = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{f_i}, \tag{2.29}$$

где $|(\bar\phi_{ij}^{-1})|$ –определитель, обратный определителю $|\bar\phi_{ij}|$, построенному согласно формуле (2.25).

3. Необходимые и достаточные условия P -разделения переменных в уравнении Шредингера

Выразим величины, относящиеся к определителю $|\bar\phi_{ij}|$ через элементы определителя Штеккеля $|\phi_{ij}|$. Из (2.25) имеем:

$$\bar\phi = P^{-k} \phi, \tag{3.1}$$

$$(\bar\phi^{-1})_{i1} = P^k (\phi^{-1})_{i1}, \tag{3.2}$$

$$\bar a^{ii} = (\bar\phi^{-1})_{i1} = P^k (\phi^{-1})_{i1}. \tag{3.3}$$

Основной тензор пространства $\bar R_n$, на метрике которого определен оператор Δ_2 уравнения (2.6), связан с основным тензором пространства R_n, в котором мы рассматриваем уравнение Шредингера (2.2), формулами (2.7)

$$\bar a_{ij} = P^{-k} a_{ij}, \quad k = \frac{4}{n-2}. \tag{2.7}$$

Если уравнение (2.6) в системе координат $(x^1, x^2, \dots x^n)$ пространства $\bar R_n$ (соответствующий линейный элемент $\bar{ds}^2 = \bar a_{ii} (dx^i)^2$) допускает полное разделение переменных, то уравнение (2.2) допускает P -разделение переменных в системе координат $(x^1, x^2 \dots x^4)$ пространства R_n (соответстующий линейный элемент $ds^2 = a_{ii}(dx^i)^2 = P^k a_{ii}(dx^i)^2 = P^k \bar{ds}^2$). Используя формулы (3.1)–(3.3), (2.7), запишем условия (2.27), (2.28) и (2.29) в терминах основного тензора пространства R_n:

$$\bar a^{ii} = P^k a^{ii} = (\bar\phi^{-1})_{i1} = P^k (\phi^{-1})_{i1} \qquad i = 1, \dots n$$

Откуда:
$$P^k\bar V=\sum_{i=1}^n(\bar\phi^{-1})_{ii}\,\chi_i(x^i)=\sum_{i=1}^n P^k(\phi^{-1})_{ii}\,\chi_i(x^i)\ ,$$

$$\frac{\bar\phi}{\sqrt{\bar a}}=\frac{P^{-k}\phi}{P^{-\frac{kn}{2}}\sqrt{a}}=\frac{P^{\frac{k(n-2)}{2}}\phi}{\sqrt{a}}=\frac{P^2\phi}{\sqrt{a}}=\prod_{i=1}^n\frac{1}{f_i}\ .$$

$$a^{ii}=(\phi^{-1})_{ii}\ ,\quad a^{ij}=0\ ,\quad i,j=1,\dots n\ ,\quad i\neq j\ , \tag{3.4}$$

$$\bar V=\sum_{i=1}^n(\phi^{-1})_{ii}\,\chi_i(x^i)\ , \tag{3.5}$$

$$\frac{P^2\phi}{\sqrt{a}}=\prod_{i=1}^n\frac{1}{f_i}\ , \tag{3.6}$$

где $\bar V$ дается формулой (2.8). Воспользовавшись условием (3.6), получим:
$$\bar V=V+\frac{1}{P}\sum_{i=1}^n\frac{P^2}{\sqrt{a}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{\sqrt{a}}{P^2a_{ii}}\frac{\partial P}{\partial x^i}\right)=V+\frac{1}{P}\sum_{i=1}^n\frac{(\phi^{-1})_{ii}}{f_i}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(f_i\frac{\partial P}{\partial x^i}\right).$$

Уравнение (2.2) в системе координат $(x^1,x^2,\dots x^n)$ пространства R_n с линейным элементом $ds^2=a_{ij}\,dx^i\,dx^j$ допускает P-разделение переменных в том и только в том случае, если существуют функция $P(x)\neq 0$, n^2 функций $\phi_{ij}=\phi_{ij}(x^i)$ и $2n$ функций $f_i(x^i)$, $\chi_i(x^i)$, таких, что:

$$a^{ii}=(\phi^{-1})_{ii}\ ,\quad a^{ij}=0\ ,\quad i\neq j\ ,\quad i,j=1,\dots n\ ; \tag{A}$$

$$V+\frac{1}{P}\sum_{i=1}^n\frac{(\phi^{-1})_{ii}}{f_i}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(f_i\frac{\partial P}{\partial x^i}\right)=\sum_{i=1}^n(\phi^{-1})_{ii}\,\chi_i(x^i)\ ; \tag{B}$$

$$\frac{P^2\phi}{\sqrt{a}}=\prod_{i=1}^n\frac{1}{f_i}\ ; \tag{C}$$

где $\phi=\det|\phi_{ij}|$, а $|(\phi^{-1})_{ij}|$ – определитель, обратный определителю Штеккеля.

Эйзенхартом была получена [7] следующая форма условий (А):

$$\frac{\partial^2\ln|a_{ii}|}{\partial x^j\,\partial x^k}-\frac{\partial\ln|a_{ii}|}{\partial x^j}\frac{\partial\ln|a_{ii}|}{\partial x^k}+\frac{\partial\ln|a_{ii}|}{\partial x^j}\frac{\partial\ln|a_{jj}|}{\partial x^k}+\frac{\partial\ln|a_{ii}|}{\partial x^k}\frac{\partial\ln|a_{kk}|}{\partial x^j}=0,\quad k\neq j,$$
$$i,j,k=1,\dots n\ ,$$

и показано, что, так как для штеккелевской метрики (т.е. для метрики, удовлетворяющей условиям (А)) тензор Риччи R_{ij} равен

$$R_{ij}=\frac{3}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^i\,\partial x^j}\left(\ln\frac{\sqrt{a}}{|\phi|}\right), \tag{3.7}$$

то условие Робертсона (С) полного разделения переменных (т.е. $P(x)=P_1^1(x^1)$ $P_1^2(x^2)\dots P_n^n(x^n)$) принимает вид
$$R_{ij}=0\ ,\quad i\neq j,\quad i,j=1,\dots n\ .$$

Логарифмируя и дифференцируя формулу $(\bar C)$, получим с учетом (3.7):

$$\frac{3}{2}\frac{\partial^2\ln P^2}{\partial x^i\,\partial x^j}=R_{ij}\quad(i,j=1,\dots n,\ i\neq j)\ . \tag{C'}$$

Такая форма условия ($\bar{C}$) позволяет сразу сделать следующий вывод. Так как для пространств Эйнштейна (к которым, в частности, относятся пространства постоянной кривизны) справедливо следующее соотношение /4/:

$$R_{ij} = \frac{R}{n} a_{ij} , \tag{3.8}$$

где $R = a^{ij} R_{ij}$, а R_{ij} – тензор Риччи, то вследствие условий ортогональности ($\bar{A}$) $a^{ij} = 0,\ i \neq j$ имеем

$$R_{ij} = 0 ,\quad i, j = 1, \ldots n,\quad i \neq j . \tag{3.9}$$

В этом случае система дифференциальных уравнений ($\bar{C}'$) (определяющая функция $P(x) = P(x^1, \ldots x^n)$) имеет лишь решения вида

$$P(x) = \prod_{i=1}^{n} P^i(x^i),$$

и мы можем сделать $P = 1$, включив $P^i(x^i)$ в $u^i(x^i)$. Итак, в пространствах Эйнштейна, в том числе в пространствах постоянной кривизны, уравнение Шредингера P-разделимо лишь в тех системах координат, в которых оно разделимо полностью.

4. Частные случаи. Уравнение Лапласа и волновое уравнение

P-разделение переменных в уравнении Лапласа в 3-мерном пространстве постоянной кривизны ($K \neq 0$) было рассмотрено Шумом /8/. Полученные результаты аналогичны – уравнение Лапласа P-разделяется в тех же системах координат, в которых оно допускает полное разделение переменных. Эвклидово пространство в этом смысле представляет собой исключение. Дарбу показал, что P-разделение переменных в уравнении Лапласа в эвклидовом пространстве в общем случае не сводится к полному разделению переменных.

P-разделение переменных в волновом уравнении в n-мерном римановом пространстве рассматривалось в работе /9/. Авторы ограничились ортогональными координатными системами, что, как показано выше, не приводит к ограничению общности, однако сформулированные в работе необходимые и достаточные условия P-разделения переменных в волновом уравнении не являются точными. Действительно, так как волновое уравнение представляет собой частный случай уравнения Шредингера при $V = 0$, то необходимые и достаточные условия P-разделения переменных в волновом уравнении те же, что для уравнения (2.2), т.е. условия A, B и C при $V = 0$.

$$a^{ii} = (\phi^{-1})_{i1} ,\quad a^{ij} = 0 ,\quad i \neq j,\quad i, j = 1, 2, \ldots n . \tag{4.1}$$

$$\frac{1}{P}\sum_{i=1}^{n}\frac{(\phi^{-1})_{1i}}{f_i}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(f_i\frac{\partial}{\partial x^i}\right)=\sum_{i=1}^{n}(\phi^{-1})_{1i}\,X_i(x^i)\,. \qquad (4.2)$$

$$\frac{P^2\phi}{\sqrt{a}}=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{f_i}\,. \qquad (4.3)$$

Условия (4.1) и (4.3) совпадают с соответствующими условиями работы[9], а вместо (4.2) в работе[9] приведено следующее :

$$\frac{1}{P}\sum_{i=1}^{n}\frac{(\phi^{-1})_{1i}}{f_i}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(f_i\frac{\partial P}{\partial x^i}\right)=\mathrm{const},$$

которое, как видно из доказательства необходимости и достаточности условий $(\bar{A})$,$(\bar{B})$ и $(\bar{C})$, не является правильным.

5. Разделение переменных в инвариантном уравнении Шредингера

В работе[3] показано, что уравнение Шредингера представимо в инвариантной форме

$$\Delta_2 u+\left[-\tfrac{1}{2}+\frac{n-2}{4(n-1)}R\right]u=0\,, \qquad (5.1)$$

где Δ_2 определен на конформно-эвклидовом пространстве с основным тензором

$$\overline{ds^2}=2\,|E-V|\,ds^2\,, \qquad (5.2)$$

группа движений которого есть группа уравнения Шредингера, а R –скалярная кривизна этого пространства,в общем случае не постоянная. Мы рассмотрим полное разделение переменных в уравнении (5.1) в 3-мерном случае.

Разделение переменных в уравнении Шредингера в конформно-эвклидовом пространстве 3-х измерений исследовано Эйзенхартом. В работе[10] приведены следующие пять форм линейного элемента для систем координат, в которых разделяются переменные:

$$a_{11}=\frac{1}{\xi(x^1)}\,,\quad a_{22}=(x^1)^2,\quad a_{33}=\eta(x^1)\,, \qquad (\mathrm{I})$$

$$a_{11}=1\,,\quad a_{22}=\xi^2(x^1)\,,a_{33}=\xi^2(x^1)\,\eta^2(x^2)\,,(\eta''=a\eta)\,, \qquad (\mathrm{II})$$

$$a_{11}=1\,,\quad a_{22}=X_2(x^2)\xi^2(x^1)(x^2-x^3)\,,a_{33}=X_3(x^3)\xi^2(x^1)\times(x^3-x^2)\,; \qquad (\mathrm{III})$$

где

$$\overset{-1}{X_\sigma}(x^\sigma) = 4a_0 x_\sigma^3 + a_1 x_\sigma^2 + a_2 x_\sigma + a_3, \ \sigma = 2,3; \ a_0, a_1, a_2, a_3 = \mathrm{const}.$$

$$a_{11} = \xi(x^1) + e\eta(x^3), \ a_{22} = \xi(x^1)\eta(x^3), \ a_{33} = \xi(x^1) + e\eta(x^3); \quad (IV)$$

где

$$e = \pm 1.$$

$$a_{ii} = \overset{-1}{Q_5}(x^i)(x^i - x^j)(x^i - x^k); \ i,j,k = 1,2,3; \ i,j, \ i \neq j \neq k, \quad (V)$$

где $$Q_5(x^i) = a_0(x^i)^5 + a_1(x^i)^4 + a_2(x^i)^3 + a_3(x^i)^2 + a_4 x^i + a_5, \ a_i = \mathrm{const}.$$

Скалярная кривизна R для случаев $I - V$ соответственно будет

$$R = 2\frac{\xi(x^1)}{x^1}\left[\frac{\eta'(x^1)}{\eta(x^1)} - \frac{1}{x^1}\right] + \frac{2\xi'(x^1)}{x^1} + \mathrm{const} = R(x^1), \quad (I)$$

$$R = \frac{2}{\xi^2(x^1)}\left[2\xi(x^1)\xi''(x^1) + \xi'^2(x^1) + a_0\right] = R(x^1), \quad (II)$$

$$R = \frac{2}{\xi^2(x^1)}\left[2\xi(x^1)\xi''(x^1) + \xi'^2(x^1) + a\right] = R(x^1), \quad (III)$$

$$R = \frac{5}{2}a[\xi(x^1) - e\eta(x^3)] + \frac{3}{2}b, \quad (IV)$$

$$R = \frac{5}{2}a(x^1 + x^2 + x^3) + \frac{3}{2}b; \quad (V)$$

где a и b – константы.

Величины R играют роль потенциалов в инвариантном уравнении Шредингера (5.1). Покажем, что такой инвариантный потенциал всегда удовлетворяет условию (B) полного разделения переменных в соответствующем уравнении Шредингера

$$R = \sum_{i=1}^{n} (\phi^{-1})_{1i}\, \chi_i(x^i) = \sum_{i=1}^{n} a^{ii}\, \chi_i(x^i). \quad (5.3)$$

Случаи (I) – (III) очевидны. В случае (IV) имеем

$$R = \frac{5}{2}a[\xi(x^1) - e\eta(x^3)] + \frac{3}{2}b = \frac{\frac{5}{2}a\,\xi^2(x^1) + \frac{3}{2}b\xi(x^1)}{\xi(x^1) + e\eta(x^3)} - \quad (5.4)$$

$$- \frac{\frac{5}{2}a\eta^2(x^3) - \frac{3}{2}be\eta(x^3)}{\xi(x^1) + e\eta(x^3)} = a^{11}\chi_1(x^1) + a^{33}\chi_3(x^3) = \sum_{i=1}^{3} a^{ii}\chi_i(x^i), \ a,b = \mathrm{const}, \ e = \pm 1,$$

Аналогично для случая V

$$R = \frac{5}{2} a (x^1 + x^2 + x^3) + \frac{3}{2} b = \sum_{i=1}^{3} \frac{a^{ii}}{Q_5 (x^i)} \left[- \frac{5}{2} a (x^i)^3 - \frac{3}{2} b (x^i)^2 \right]. \quad (5.5)$$

Литература

1. Я.А. Смородинский, И.И. Тугов. Препринт ОИЯИ, Р-2307, Дубна, 1965; ЖЭТФ (в печати).
2. П. Винтерницп, В. Мандросов, Я.А. Смородинский, М.Углирж, И.Фриш. Препринт ОИЯИ, Р-2091, Дубна, 1965.
3. Я.А. Смородинский, И.И. Тугов. Препринт ОИЯИ, Р-2306, Дубна, 1965.
4. Л.П. Эйзенхарт. Риманова геометрия, ИЛ, 1948.
5. H.P. Robertson. Math. Ann. 98, 749 (1928).
6. Ф.М. Морс и Г. Фешбах. Методы теоретической физики, т. 1, ИЛ, 1958.
7. L.P. Eisenhart. Ann. of Math., 35, 284 (1934).
8. А.И. Шум. Мат. сб., 47, 495 (1959).
9. P. Moon and D.E. Spencer. Proc. Amer. Math. Soc., 3, 635 (1952).
10. L.P. Eisenhart. Ann. of Math., 36, 96 (1935).

Рукопись поступила в издательский отдел
29 декабря 1965 г.