ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р-2529

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

П. Винтерницц, Я.А. Смородинский, М. Углирж, И.Фриш

О ГРУППАХ СИММЕТРИИ В КЛАССИЧЕСКОЙ И КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

1965

P-2529

П. Винтерницп, Я.А. Смородинский, М. Углирж, И. Фриш

О ГРУППАХ СИММЕТРИИ В КЛАССИЧЕСКОЙ И КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ

Направлено в журнал "Ядерная физика"

1. Введение

В последнее время сильно возросла роль компактных /1/ и некомпактных /2/ групп динамической симметрии в теории элементарных частиц. В связи с этим повысился интерес к известным "динамическим" симметриям в классической и квантовой механике.

В квантовой механике имеет смысл говорить о трех типах группы симметрии для определенной задачи:

1. Группы геометрической симметрии, которые непосредственно связаны с симметрией физического пространства и времени, например, группа трехмерных вращений для любой нерелятивистской задачи с центрально-симметричным потенциалом.

2. Группа "динамической" ("скрытой", "высшей") симметрии, которая в случае, если она существует, дает полное описание квантово-механической системы, т.е. определяет все квантовые числа, вырождение энергетических уровней и спектр энергий. Впервые такая динамическая группа рассматривалась в работах /4/, чтобы объяснить "случайное" вырождение атома водорода по орбитальному моменту (в нерелятивистском случае, т.е. пренебрегая спин-орбитальным взаимодействием).

3. В связи с полезностью нарушенных симметрий для классификации элементарных частиц и исследования их взаимодействий очень интересно рассмотреть и в квантовой механике "группы неинвариантности" /5/, т.е. такие, часть элементов которых не коммутирует с гамильтонианом задачи, а действует как повышающие и понижающие операторы на волновые функции уровней. В качестве "группы неинвариантности" выбирают некоторую некомпактную группу, содержащую динамическую группу в качестве подгруппы. Все энергетические уровни системы вкладываются в такие представления группы неинвариатности, которые содержат именно те представления динамической подгруппы, которые реализуются на волновых функциях этих уровней. Наиболее известная группа такого типа - это группа Де Ситтера $O(4,1)$ для атома водорода.

В этой работе мы остановимся на группах второго тнпа - группах динамической симметрии. Известно /4/, что группой атома водорода является $O(4)$ для дискретного спектра и группа Лоренца $O(3,1)$ – для сплошного. Кроме атома водорода в литературе еще исследован гармонический осциллятор с динамической группой $SU(3)$ (как в изотропном /7/, так и анизотропном /8/ с рациональным отношением частот случае). В классической механике эти потенциалы обладают тем свойством, что все финитные траектории в них замкнуты. Заметим еще, что симметрии атома водорода и гармонического осциллятора допускают обобщение на n-мерный случай.

Целью настоящей работы является систематический подход к вопросу о динамических симметриях в нерелятивистской квантовой и классической механике, с тем чтобы выяснить, какие вообще потенциалы могут обладать группой симметрии, не явно геометрического происхождения.

Мы здесь ограничимся двумерным плоским случаем. Будем работать преимущественно алгебраическим методом, т.е. будем искать в квантовом случае потенциалы, для которых существует набор операторов, коммутирующих с гамильтонианом и образующих алгебру Ли. При этом мы ограничимся линейными дифференциальными операторами не выше второго порядка. К классической механике мы перейдем по принципу соответствия.

Часть результатов данной работы была предварительно опубликована в /9/.

2. Линейные дифференциальные операторы, коммутирующие с гамильтонианом

Мы ищем гамильтониан $H = -\frac{1}{2}\Delta + V(x_1, x_2)$, где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ – оператор Лапласа и $V(x_1, x_2)$ – потенциал, для которого существует некий набор линейных дифференциальных операторов L_i не выше второго порядка, коммутирующих с H:

$$[H, L_i] = 0. \tag{1}$$

Заодно мы найдем и интегралы движения L_i для соответствующих потенциалов.

Отметим, во-первых, что операторы первого порядка в качестве L_i приводят к чисто геометрическим симметриям. Действительно, если

$$L' = \phi_1(x_1, x_2)p_1 + \phi_2(x_1, x_2)p_2 + \phi_3(x_1, x_2), \tag{2}$$

где $p_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 1,2$ и ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 – произвольные функции, то условие (1) приводит к системе простых дифференциальных уравнений для ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 и V. Решая их, получаем

$$V = V\left(\tfrac{1}{2}a(x_1^2 + x_2^2) + bx_1 + cx_2\right)$$

$$L' = a(x_2 p_1 - x_1 p_2) + cp_1 - bp_2, \tag{3}$$

где a, b, c – произвольные постоянные. Мы видим, что интеграл движения L' является выражением ротационной или трансляционной симметрии задачи (V – произвольная функция указанного аргумента).

Далее рассмотрим интересующий нас случай операторов второго порядка:

$$L = \phi_1 p_1^2 + \phi_2 p_2^2 + \phi_3 p_1 p_2 + \phi_4 p_1 + \phi_5 p_2 + \phi_6, \tag{4}$$

где ϕ_i, $i = 1,\dots,6$ произвольные функции x_1 и x_2.

Условие $[H, L] = 0$ приводит к системе 10 уравнений для 7 неизвестных ϕ_i и V (так как коммутатор $[H, L]$ является оператором порядка и мы должны приравнять нулю коэффициенты при всех степенях p_1 и p_2):

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} = 0 \qquad \frac{\partial \phi_2}{\partial x_1} + \frac{\partial \phi_3}{\partial x_2} = 0 \qquad \frac{\partial \phi_3}{\partial x_1} + \frac{\partial \phi_1}{\partial x_2} = 0 \qquad \frac{\partial \phi_2}{\partial x_2} = 0 \tag{5}$$

$$\Delta \phi_1 + 2\frac{\partial \phi_4}{\partial x_1} = 0 \qquad \Delta \phi_2 + 2\frac{\partial \phi_5}{\partial x_2} = 0 \qquad \Delta \phi_3 + 2\frac{\partial \phi_4}{\partial x_2} + 2\frac{\partial \phi_5}{\partial x_1} = 0 \tag{6}$$

$$\tfrac{1}{2}\Delta \phi_4 + \frac{\partial \phi_0}{\partial x_1} + 2\phi_1 \frac{\partial V}{\partial x_1} + \phi_3 \frac{\partial V}{\partial x_2} = 0 \qquad \tfrac{1}{2}\Delta \phi_5 + \frac{\partial \phi_6}{\partial x_2} + 2\phi_2 \frac{\partial V}{\partial x_2} + \phi_3 \frac{\partial V}{\partial x_1} = 0 \tag{7}$$

$$\tfrac{1}{2}\Delta \phi_0 + \phi_1 \frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} + \phi_2 \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2} + \phi_3 \frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2} + \phi_4 \frac{\partial V}{\partial x_1} + \phi_5 \frac{\partial V}{\partial x_2} = 0. \tag{8}$$

Из (5) и (6) получаем

$$\begin{aligned}
&\phi_1 = a x_2^2 - 2b x_2 + d && \phi_4 = -a x_1 + g x_2 + h \\
&\phi_2 = a x_1^2 + 2c x_1 + e && \\
&\phi_3 = -2(a x_1 - c)x_2 + 2b x_1 + f && \phi_5 = -a x_2 - g x_1 + k
\end{aligned} \tag{9}$$

где a, b, c, d, e, f, g, h, k – произвольные постоянные.

Учитывая (9), нетрудно убедиться, что уравнения (7) и (8) совместимы только при условии:

$$(b-k+gx_1)\frac{\partial V}{\partial x_2}+(-c-h-gx_2)\frac{\partial V}{\partial x_1}=0.$$

Итак, либо *а)* $V(x_1x_2)$ является функцией аргумента $\frac{1}{2}g(x_1^2+x_2^2)+(b-k)x_1+(c+h)x_2$, т.е. обладает геометрической симметрией, либо

$$\beta)\quad k=b \qquad h=-c \qquad g=0.$$

Тогда интеграл движения L записывается в виде:

$$L=aM^2+b(p_1M+Mp_1)+c(p_2M+Mp_2)+dp_1^2+ep_2^2+ \tag{10}$$

$$+fp_1p_2+\phi(x_1,x_2),$$

где $M=x_1p_2-x_2p_1$ и $\phi(x_1,x_2)$ – произвольная функция.

Рассмотрим сначала более интересный случай β).

Используя свойства характеристик дифференциальных операторов гиперболического типа, нетрудно доказать следующую теорему:

Уравнение $[-\frac{1}{2}\Delta+V, L]=0$ решается для любого оператора L вида (10) и существует ортогональная система координат (q_1,q_2) (связанная с декартовской конформным преобразованием), в которой имеем

$$H=-\tfrac{1}{2}\Delta+V=\frac{1}{a(q_1)+b(q_2)}\left[-\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial q_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial q_2^2}\right)+V_1(q_1)+V_2(q_2)\right] \tag{11}$$

$$L=\frac{1}{a(q_1)+b(q_2)}\left[b(q_2)\left\{-\tfrac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial q_1^2}+V_1(q_1)\right\}-a(q_1)\left\{-\tfrac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial q_2^2}+V_2(q_2)\right\}\right] \tag{12}$$

$$V(x_1,x_2)=\frac{1}{a(q_1)+b(q_2)}\left[V_1(q_1)+V_2(q_2)\right]. \tag{13}$$

Гамильтониан (11) соответствует динамической системе типа Лиувилля, которая решается в квадратурах. Следует отметить, что в отличие от, например, /11/ здесь никаких предположений о разделении переменных в уравнении Шредингера (Гамильтона-Якоби) не делается, а, наоборот, доказывается, что квадратичный интеграл движения L может существовать только тогда, когда существует система координат (q_1,q_2), в которой переменные разделяются.

Нам необходимо найти конкретный вид координат (q_1,q_2) и функций $a(q_1)$, $b(q_2)$. Для этого воспользуемся следующим обстоятельством. Из (10) видно, что оператор

$D=L-\phi(x_1,x_2)$ является симметричным полиномом второго порядка в генераторах группы движения евклидовой плоскости E_2. В работе /12/ было показано, что с помощью преобразования подобия и линейной комбинации с оператором Δ можно все такие операторы свести к четырем основным типам:

$$\begin{aligned}
&a)\ p_1^2-p_2^2\\
&b)\ M^2\\
&c)\ p_1M+Mp_1\\
&d)\ M^2+\frac{\ell^2}{2}(p_1^2-p_2^2).
\end{aligned} \tag{14}$$

Нетрудно видеть, что если функция V является решением уравнения (1), то она удовлетворяет и уравнению $[H,\lambda L+\mu H]=0$, где λ, μ – произвольные постоянные, и что при преобразовании подобия (т.е. при переходе к новым декартовым коррдинатам) Δ не меняется и решение остается решением. Следовательно, можно ограничиться операторами D вида (14).

Рассмотрим отдельные случаи:

а) Пусть $L=p_1^2-p_2^2+\phi(x_1,x_2)$.

Тогда из условия $[H,L]=0$ получаем:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x_1}=-2\frac{\partial V}{\partial x_1},$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x_2}=+2\frac{\partial V}{\partial x_2}$$

и, следовательно,

$$-\tfrac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2}\right)-\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2}=0$$

$$V=f(x_1)+g(x_2) \tag{15}$$

$$L_D=p_1^2-p_2^2-2f(x_1)+2g(x_2). \tag{16}$$

b) Пусть $L=M^2+\phi(x_1,x_2)$. Из условия (1) получаем:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\phi}{\partial x_1}&=-2x_2^2\frac{\partial V}{\partial x_1}+2x_1x_2\frac{\partial V}{\partial x_2}\\
\frac{\partial\phi}{\partial x_2}&=-2x_1^2\frac{\partial V}{\partial x_2}+2x_1x_2\frac{\partial V}{\partial x_1}.
\end{aligned} \tag{17}$$

Из условия неприводечивости этих уравнений получаем

$$(x_2^2 - x_1^2)\frac{\partial^2 V}{\partial x_1 \partial x_2} + x_1 x_2 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 V}{\partial x_2^2}\right) + 3x_2 \frac{\partial V}{\partial x_1} - 3x_1 \frac{\partial V}{\partial x_2} = 0. \qquad (18)$$

Стандартным методом /13/ можно привести последнее уравнение к каноническому виду. Решая уравнения для характеристик, получаем сферическую систему координат $x_1 = e^a \cos\phi$, $x_2 = e^a \sin\phi$, в которой уравнение (18) решается просто. Получаем

$$V = \frac{f(a) + g(\phi)}{e^{2a}} \qquad (19)$$

$$L_s = M^2 - 2g(\phi).$$

Случаи c) и d) вполне аналогичны, но требуют громоздких вычислений, в результате которых получается:

c) Для инварианта типа $L = p_1 M + M p_1 + \phi(x_1, x_2)$ координатные кривые параболической системы координат $x_1 = ½(\xi_1^2 - \xi_2^2)$ $x_2 = \xi_1 \xi_2$ будут характеристиками соответствующего уравнения для потенциала.

Получаем

$$V = \frac{f(\xi_1) + g(\xi_2)}{\xi_1^2 + \xi_2^2} \qquad (20)$$

$$L_p = p_1 M + M p_1 + \frac{f(\xi_1)\xi_2^2 - g(\xi_2)\xi_1^2}{\xi_1^2 + \xi_2^2}.$$

d) Аналогично инвариант $L = M^2 + \frac{\ell^2}{2}(p_1^2 - p_2^2) + \phi(x_1, x_2)$ приводит к эллиптической системе координат $x_1 = \ell \operatorname{ch}\rho \cos\sigma$, $x_2 = \ell \operatorname{sh}\rho \sin\sigma$ и получаем

$$V = \frac{f(\sigma) + g(\rho)}{\cos^2\sigma - \operatorname{ch}^2\rho} \qquad (21)$$

$$L_E = M^2 + \frac{\ell^2}{2}(p_1^2 - p_2^2) - \ell^2 \frac{(\operatorname{ch}^2\rho + \operatorname{sh}^2\rho) f(\sigma) + (\cos^2\sigma - \sin^2\sigma) g(\rho)}{\cos^2\sigma - \operatorname{ch}^2\rho}.$$

Таким образом, мы видим, что квадратичный интеграл движения существует тогда и только тогда, когда потенциал допускает разделение переменных в одной из тех четырех систем координат, в которых разделяются переменные в уравнении Гельмгольца на плоскости.

3. Потенциалы с двумя инвариантами

Мы хотим рассмотреть потенциалы, обладающие группой Ли; поскольку нас интересуют системы с вырожденными энергетическими уровнями, мы должны искать неабелевские группы выше, чем однопараметрические. Следовательно, необходимо найти потенциалы, обладающие двумя или более инвариантами и образовать из этих инвариантов алгебру.

Из предыдущего параграфа вытекает, что два независимых оператора типа (4) существуют в том случае, если потенциал $V(x_1, x_2)$ допускает разделение переменных в двух системах координат (или разного типа, или одинакового, но сдвинутых или повернутых относительно друг друга).

Рассмотрим сначала пары систем координат, в которых центры и оси совмещены.

1) Декартовский и полярный инварианты.

Мы должны найти потенциал, который можно записать в виде:

$$V(x_1, x_2) = f(x_1) + g(x_2) = a(r) + \frac{b(\phi)}{r}, \qquad (22)$$

где $x_1 = r\cos\phi$, $x_2 = r\sin\phi$, $r = e^a$. Из (22) следует

$$\frac{\partial^2}{\partial x\, \partial\phi} r^2 [f(r\cos\phi) + g(r\sin\phi)] = 0.$$

Решая это уравнение, получаем

$$V(x_1, x_2) = \alpha(x_1^2 + x_2^2) + \frac{\beta_1}{x_1^2} + \frac{\beta_2}{x_2^2} = \alpha r^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\beta_1}{\cos^2\phi} + \frac{\beta_2}{\sin^2\phi}\right). \qquad (23)$$

Здесь и дальше α, β, γ, ... – произвольные постоянные. Остальные случаи двух интегралов можно рассмотреть вполне аналогично. В результате получается:

2) Декартовский и параболический инварианты:

$$V(x_1, x_2) = \alpha(4x_1^2 + x_2^2) + \beta x_1 + \frac{\gamma}{x_2^2} = \frac{\alpha(\xi_1^2 + \xi_2^2) + \frac{\beta}{2}(\xi_1^4 - \xi_2^4) + \gamma\left(\frac{1}{\xi_1^2} + \frac{1}{\xi_2^2}\right)}{\xi_1^2 + \xi_2^2}. \qquad (24)$$

3) Полярный и параболический инварианты

$$V(x_1, x_2) = \frac{\alpha}{2r} + \frac{1}{4r^2}\left(\frac{\beta_1}{\cos^2\frac{\phi}{2}} + \frac{\beta_2}{\sin^2\frac{\phi}{2}}\right) = \frac{\frac{\beta_1}{\xi_1^2} + \frac{\beta_2}{\xi_2^2} + \alpha}{\xi_1^2 + \xi_2^2}. \qquad (25)$$

4) Два параболических инварианта, соответствующие двум взаимно перпендикулярным параболическим системам:

$$V(x_1, x_2) = \frac{\alpha + \beta_1\xi_1 + \beta_2\xi_2}{\xi_1^2 + \xi_2^2} = \frac{\alpha}{2r} + \frac{\beta_1 \cos\frac{\phi}{2} + \beta_2 \sin\frac{\phi}{2}}{\sqrt{2r}} . \tag{26}$$

Непосредственным вычислением можно убедиться, что остальные комбинации координатных систем, в частности, произвольно повернутых и сдвинутых, не дают новых потенциалов.

4. Решение классических и квантовых уравнений движения для потенциалов с двумя инвариантами

Нетрудно видеть, что среди потенциалов (23)-(26) содержатся и ранее известные потенциалы, обладающие высшей симметрией - кулоновский потенциал и гармонический осциллятор. Других центрально-симметричных потенциалов среди них нет. Известно /11/, что кулоновский потенциал и гармонический осциллятор обладают тем свойством, что в них все финитные классические траектории замкнуты. Здесь мы покажем, что такое свойство типично и для найденных потенциалов. Далее рассмотрим решение уравнения Шредингера и вырождение энергетических уровней.

Рассмотрим потенциалы по отдельности

1) $V(x_1, x_2) = \alpha(x_1^2 + x_2^2) + \dfrac{\beta_1}{x_1^2} + \dfrac{\beta_2}{x_2^2}$.

Решая классические уравнения движения, получаем траектории в виде:

$$x_i^2 = \frac{E_i}{2\alpha} + \sqrt{\frac{E_i^2}{4\alpha^2} - \frac{\beta_i}{\alpha}}\, \sin(\sqrt{8\alpha}\, t + C_i), \tag{27}$$

где $i = 1,2$ и $E_1 + E_2 = E$ - полная энергия. Нетрудно видеть, что при $\alpha > 0$, $\beta_i > 0$, все траектории являются финитными и замкнутыми кривыми четвертого порядка. При $\beta_1 = \beta_2 = 0$ получаем изотропный гармонический осциллятор и траектории, естественно, вырождаются в эллипсы.

Разделив переменные в уравнении Шредингера в декартовых координатах, получаем два уравнения типа

$$\frac{d^2\psi_i}{dx_i^2} + 2\left(E_i - \alpha x_i^2 - \frac{\beta_i}{x_i^2}\right)\psi_i = 0 , \tag{28}$$

где $E = E_1 + E_2$, $\psi = \psi_1\psi_2$, $\hbar = m = 1$, $\alpha > 0$.

Нормированная волновая функция, описывающая связанное состояние, имеет вид:

$$\psi^{\pm\pm}_{n_1 n_2}(x_1, x_2) = \sqrt{2\alpha} \prod_{i=1}^{2} \sqrt{\frac{n_i!\,(2\alpha)^{\pm\nu_i}}{\Gamma(n_i \pm \nu_i + 1)}}\; e^{-\sqrt{\frac{\alpha}{2}}x_i^2}\, x_i^{1/2 \pm \nu_i}\, L^{\pm\nu_i}_{n_i}(\sqrt{2\alpha}\, x_i), \tag{29}$$

где $\nu_i = \frac{1}{2}\sqrt{1 + 8\beta_i}$, $L^{\nu}_{n}(z)$ - полиномы Лагерра, и для энергии имеем:

$$E^{\pm\pm} = E_1 + E_2 = 2\sqrt{2\alpha}\,(n_1 + n_2 + 1) + \sqrt{2\alpha}\,(\pm\nu_1 \pm \nu_2) .$$

Из поведения при $x_i = 0$ вытекает, что связанные состояния существуют при $\beta_i > -1/8$, $i = 1,2$. Далее, при $-1/8 \le \beta_i \le 3/8$ каждому $n = n_1 + n_2$ соответствуют четыре уровня, так как нужно учитывать оба значка перед ν_1 и ν_2, вырождение каждого из которых равно $d = n + 1$. При $-1/8 \le \beta_1 < 3/8, \beta_2 > 3/8$ или $\beta_1 > 3/8, 1/8 \le \beta_2 < 3/8$ каждому n соответствуют два уровня (знак $\pm$ перед ν_1 или ν_2 соответственно). При $\beta_i > 3/8$ перед ν_1 и ν_2 знак $+$, т.е. каждому n соответствует один уровень. Степень вырождения $d = n + 1 = 2j + 1$, где $j = 0, 1/2, 1, 3/2,$ совпадает с размерностями всех неприводимых представлений группы $SU(2)$. При $\beta_1 = \beta_2 = 0$ имеем $\nu_1 = \nu_2 = 1/2$ и получаем решение для гармонического осциллятора.

2) Потенциал $V(x_1, x_2) = \alpha(4x_1^2 + x_2^2) + \beta x_1 + \dfrac{\gamma}{x_2^2}$.

Для классических траекторий получаем:

$$x_1 = -\frac{\beta}{8\alpha} + \sqrt{\frac{E_1}{2\alpha} + \frac{\beta^2}{64\alpha^2}}\, \sin(\sqrt{8\alpha}\, t + C_1) \tag{30}$$

$$x_2^2 = \frac{E_2}{2\alpha} + \sqrt{\frac{E_2^2}{4\alpha^2} - \frac{\gamma}{\alpha}}\, \sin(\sqrt{8\alpha}\, t + C_2),$$

где $E = E_1 + E_2$. При $\alpha > 0$, $\gamma > 0$ и любом β все траектории финитны и замкнуты.

В квантовом случае, разделив переменные в уравнении Шредингера в декартовых координатах, получаем одно уравнение типа (28) и одно для смещенного гармонического осциллятора. В результате имеем:

$$\psi^{\pm}_{n_1 n_2}(x_1, x_2) = \left(\frac{8\alpha}{\pi^2}\right)^{1/8} (2\alpha)^{\frac{1+\nu}{4}} \sqrt{\frac{n_2!}{n_1!}\, \frac{1}{2^{n_1}\Gamma(n_2 + \nu + 1)}}\; e^{-\sqrt{2\alpha}\left(x_1 + \frac{\beta}{8\alpha}\right)^2} \cdot$$

$$\cdot H_{n_1}\left(\sqrt[4]{(8\alpha)}\left(x_1 + \frac{\beta}{8\alpha}\right)\right) e^{-\sqrt{\frac{\alpha}{2}}x_2^2}\, x_2^{1/2 + \nu}\, L^{\nu}_{n_2}(\sqrt{2\alpha}\, x_2^2), \tag{31}$$

где $\nu = \pm \frac{1}{2}\sqrt{1+\gamma}$

$$E^{\pm} = 2\sqrt{2a}\,\left[n_1 + n_2 + 1 + \tfrac{1}{2}\nu - \frac{\beta^2}{32(a)^{3/2}}\right].$$

Степень вырождения здесь $d = n + 1$, где $n = n_1 + n_2$, в области $-1/8 \le \gamma < 3/8$ число уровней удваивается, при $\gamma \ge 3/8$ всегда $\nu > 0$. При $\beta = \gamma = 0$ получаем анизотропный гармонический осциллятор с отношением частот 2:1. Вырождение опять описывается всеми представлениями SU(2).

3) Потенциал

$$V(x_1, x_2) = \frac{a + \frac{\beta_1}{\xi_1^2} + \frac{\beta_2}{\xi_2^2}}{\xi_1^2 + \xi_2^2}.$$

Классические траектории легко найти, решая уравнения Гамильтона-Якоби. Получаем:

$$\xi_1^2 = -\frac{\gamma_1}{2E_1} + \sqrt{\frac{\beta_1}{E} + \frac{\gamma_1^2}{4E^2}}\,\sin(2\sqrt{-2E}\,\tau + \mu_1), \qquad (33)$$

где τ - параметр и $\gamma_1 - \gamma_2 = C_1$, $\mu_1 - \mu_2 = C_2$ - произвольные постоянные. При $E<0$ получаем в качестве траекторий замкнутые кривые четвертого порядка (в плоскости $x; y$).

Разделив переменные в уравнении Шредингера в параболических координатах, получаем два уравнения типа (28): однако энергия входит как коэффициент при ξ_1^2. Следовательно, при $E < 0$ существуют связанные состояния:

$$\psi^{\pm\pm}_{n_1 n_2} = C^{\pm\pm}_{n_1 n_2}\sqrt{\xi_1 \xi_2}\;\xi_1^{\pm\nu_1}\xi_2^{\pm\nu_2}\,e^{-\sqrt{-\frac{E}{2}}(\xi_1^2+\xi_2^2)}\,L^{\pm\nu_1}_{n_1}(\sqrt{-2E}\,\xi_1^2)\cdot L^{\pm\nu_2}_{n_2}(\sqrt{-2E}\,\xi_2^2), \qquad (34)$$

где $\nu_i = \frac{1}{2}\sqrt{1+8\beta_i}$ и знаки при волновой функции относятся к выбору знака при ν_1, ν_2. Для энергии имеем:

$$E^{\pm\pm} = -\frac{2a^2}{[2(n_1+n_2) \pm \nu_1 \pm \nu_2 + 2]^2}. \qquad (35)$$

Громоздкий нормировочный коэффициент $C^{\pm\pm}_{n_1 n_2}$ выписывать не будем. Выбор знаков здесь совпадает со сказанным в 1). В частности, при $-1/8 < \beta_i < 3/8$, $i = 1,2$

нужно учитывать все четыре знака. С учетом этого при $\beta_1 = \beta_2 = 0$ получаем формулу Бальмера. В общем случае степень вырождения уровней равна $d = n+1$, т.е. реализуются все неприводимые представления SU(2). Однако при $\beta_1 = \beta_2 = 0$ совокупность решений (34) переходит в кулоновские решения

$$\psi_{m_1 m_2} = C_{m_1 m_2}\,e^{-\sqrt{\frac{a}{2}}(\xi_1^2+\xi_2^2)}\,H_{m_1}(\sqrt[4]{-8E}\,\xi_1)\,H_{m_2}(\sqrt[4]{-8E}\,\xi_2) \qquad (36)$$

и требуя однозначность волновых функций, как функций от x, y, получаем, что $m_1 + m_2$ четно, следовательно, в этом случае реализуются только представления размерности $d = 2n + 1$, т.е. неприводимые представления O(3).

4) Потенциал $V(x_1, x_2) = \dfrac{a + \beta_1\xi_1 + \beta_2\xi_2}{\xi_1^2 + \xi_2^2}$.

Потенциал претерпевает скачок вдоль линии $y = 0$, $x \ge 0$. Рассмотрение опять удобнее всего проводить в параболических координатах. Классические траектории получаем, решая уравнение Гамильтона-Якоби, в виде:

$$\xi_1 = \frac{\beta_1}{2E} + \sqrt{\frac{\beta_1^2}{4E^2} - \frac{\gamma_1}{E}}\,\sin(\sqrt{-2E}\,\tau + \mu_1) \qquad (37)$$

(обозначения те же, что и в (33)). При $E<0$ это эллипс в плоскости (ξ_1, ξ_2) и замкнутая кривая четвертого порядка в плоскости (x, y).

Решение уравнения Шредингера сводится в параболических координатах к гармоническому осциллятору. В результате имеем:

$$\psi_{n_1 n_2} = C_{n_1 n_2}\,e^{-\frac{\eta_1^2+\eta_2^2}{2}}\,H_{n_1}(\eta_1\sqrt{2})\,H_{n_2}(\eta_2\sqrt{2}), \qquad (38)$$

где $\eta_1 = \sqrt[4]{-2E}\,(\xi_1 - \frac{\beta_1}{2E})$ и для энергии получаем уравнение

$$2(n_1 + n_2) + 2 = -\frac{\beta_1^2 + \beta_2^2}{2E\sqrt{-2E}} - \frac{4a}{\sqrt{-2E}}. \qquad (39)$$

Вырождение здесь опять соответствует размерностям всех представлений SU(2) $d = n + 1$ и при $\beta_1 = \beta_2 = 0$ получаем представления O(3) (двумерный кулоновский потенциал).

Из вышеизложенного вытекает, что в квантовомеханическом случае рассмотрение всех найденных потенциалов сводится к решению обобщенного уравнения для гармонического осциллятора в различных системах координат:

$$\left(\frac{d^2}{dq^2} + a + b\,q^2 + \frac{c}{q^2}\right)\psi(q) = 0. \qquad (40)$$

При этом постоянные a, b, c для различных потенциалов связаны по разному с энергией и, следовательно, получаем различные формулы для энергетических уровней. В частности, уравнение для двумерного атома водорода в параболических координатах сводится к уравнению для обычного гармонического осциллятора.

5. Алгебра Ли потенциалов с динамической группой симметрии

Мы нашли потенциалы, обладающие двумя квадратичными интегралами движения, и из них и их коммутаторов можно было бы непосредственно построить алгебру. При этом, однако, возникают трудности, так как алгебру не удается простым способом замкнуть (впрочем, это обстоятельство характерно уже для анизотропного гармонического осциллятора[8]).

Здесь мы прибегнем к несколько иному способу, стандартному для всех найденных потенциалов. Будем пользоваться методами вторичного квантования, т.е. построим некие операторы рождения и уничтожения квантов энергии и из них построим алгебру Ли группы $SU(2)$. Мы знаем, что нужно искать именно эту алгебру, так как мы исследовали энергетические уровни и знаем, что степень их вырождения совпадает как раз с размерностями представлений $SU(2)$.

Рассмотрим подробнее потенциал (23). Нетрудно убедиться, что операторы

$$b_i = -\tfrac{1}{4}\left[2x_i\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{\sqrt{2a}}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \sqrt{2a}\,x_i^2 + 1 - 2\frac{\beta_i}{\sqrt{2a}}\frac{1}{x_i^2}\right]$$
$$b_i^+ = -\tfrac{1}{4}\left[-2x_i\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{\sqrt{2a}}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} + \sqrt{2a}\,x_i^2 - 1 - 2\frac{\beta_i}{\sqrt{2a}}\frac{1}{x_i^2}\right] \quad i = 1,2 \qquad (41)$$

обладают требуемыми свойствами

$$b_1\psi_{n_1 n_2} = \sqrt{n_1(n_1+\nu_1)}\,\psi_{n_1-1,n_2} \qquad (42)$$
$$b_1^+\psi_{n_1 n_2} = \sqrt{(n_1+1)(n_1+\nu_1+1)}\,\psi_{n_1+1,n_2}$$

(аналогичные формулы получаются для b_2 и b_2^+). Далее введем диагональные операторы

$$\hat{n}_i = \tfrac{1}{2}\left\{[b_i, b_i^+] - \tfrac{1}{2}\sqrt{1+8\beta_i} - 1\right\}, \qquad (43)$$

для которых, $\hat{n}_1\psi_{n_1 n_2} = n_1\psi_{n_1 n_2}$.

(аналогично для $\hat{n}_2$).

С их помощью построим операторы

$$L_3 = \frac{\hat{n}_2 - \hat{n}_1}{2}, \qquad L_+ = b_1^- b_2^+\frac{1}{\sqrt{(\hat{n}_1+\nu_1)(\hat{n}_2+\nu_2+1)}}, \qquad L_- = b_1^+ b_2^-\frac{1}{\sqrt{(\hat{n}_1+\nu_1+1)(\hat{n}_2+\nu_2)}}, \qquad (44)$$

действующие на собственные функции гамильтониана следующим образом:

$$L_3\psi_{n_1 n_2} = \frac{n_2 - n_1}{2}\psi_{n_1 n_2} \qquad (45)$$
$$L_+\psi_{n_1 n_2} = \sqrt{n_1(n_2+1)}\,\psi_{n_1-1,\,n_2+1}$$
$$L_-\psi_{n_1 n_2} = \sqrt{(n_1+1)n_2}\,\psi_{n_1+1,\,n_2-1}.$$

Положив $\ell = \frac{n_1+n_2}{2}$, $m = \frac{n_2-n_1}{2}$, получаем каноническую форму матричных элементов инфинитезимальных операторов $SU(2)$. При этом L_3 совпадает с одним из найденных интегралов типа (4) для данного потенциала и операторы L_+, L_- также тесно связаны с найденными интегралами.

Для того, чтобы замкнуть алгебру, нам пришлось сделать не совсем строгий шаг, а именно - поделить на корень из оператора. Поскольку эти операторы диагональны на рассматриваемых функциях, это вполне осмысленная операция. Если бы мы рассматривали только операторы L_3, $b_1^- b_2^+$ и $b_1^+ b_2^-$ и их непосредственные коммутационные соотношения, то мы получили бы бесконечную алгебру. Это проявляется, в частности, в том, что операторы $b_1^- b_2^+$ и $b_1^+ b_2^-$, хотя тоже преобразуют волновые функции одного уровня между собой, но при этом нарушают их нормировку (т.е. не могут соответствовать унитарному представлению компактной группы).

Алгебру для остальных потенциалов можно образовать вполне аналогично, действуя всегда в соответствующей системе координат и пользуясь вышеотмеченной аналогией между уравнениями для волновых функций.

6. Заключение

В результате настоящей работы найдены четыре типа потенциалов (23) - (26), обладающие динамической группой симметрии. (С ограничениями, сформулированными во введении, они исчерпывают все такие потенциалы). Как и следовало ожидать, все финитные классические траектории в них замкнуты и все квантовые системы обладают "случайным" вырождением энергетических уровней. Во всех случаях группой симметрии оказалась SU(2) (или локально-изоморфная ей O(3)). Такая "однообразность" для двумерного случая вполне естественна, поскольку мы рассмотрели только дискретный спектр. Динамическая группа тогда должна быть компактной и все компактные полупростые группы Ли ранга 1 локально изоморфны SU(2) . С этой точки зрения очень желательно рассмотреть трехмерный случай, который должен быть значительно более богатым. Очевидно, что ограничиваясь операторами не выше второго порядка, мы теряем часть результатов, например, анизотропный гармонический осциллятор с рациональным отношением частот, не равным 2:1.

Отметим еще, что все рассмотрение проводилось алгебраически, на языке операторов, коммутирующих с гамильтонианом и рассматриваемых как генераторы группы. Следовательно, мы пока не в состоянии ответить на очень существенные вопросы:

1) В каком пространстве реализуются найденные динамические симметрии, т.е. как можно найти для наших потенциалов пространства типа трехмерного шара в четырехмерном (нерелятивистском) импульсном пространстве Фока для атома водорода.

2) Как истолковать динамические симметрии в классической механике и каким свойствам фазового пространства они соответствуют.

В заключение мы хотели бы поблагодарить В. Мандросова, исследовавшего по нашей просьбе в своей дипломной работе движение в найденных потенциалах.

Л и т е р а т у р а

1. F. Gürsey, L.A. Radicati. Phys. Rev. Lett. 13, 173 (1964)
2. T. Fulton, J. Wess. Phys. Lett. 14, 57 (1965).
W. Rühl. Nuovo Cim. 37, 301 (1965).
A. Salam, R. Delbourgo, J. Strathdee. Proc. Roy. Soc. A284, 146 (1965).
R. Delbourgo, A. Salam, J. Strathdee, Relativistic extensions on non-compact symmetry groups. Trieste preprint (1965).
3. A.O. Barut. Phys. Rev. 135B, 939 (1964).
A.O. Barut, A. Böhm. Phys. Rev. 139, B1107 (1965).
L.C. Biedenharn. Phys. Rev. 126, 845 (1962).
L.C. Biedenharn, N.N.V.T. Swamy, Phys. Rev. 133, B1353 (1964).
4. W. Pauli. Zs.f. Phys. 36, 368 (1926).
V.A. Fock, Zs.f. Phys. 98, 145 (1935).
V. Bargmann, Zs. f. Phys. 99, 576 (1936).
5. N. Mukunda, E.C.G. Sudarshan, L.O'Raifeartaigh, Characteristic Non Invariance groups of dynamical systems, preprint, 1965.
E.C.G. Sudarshan, N. Mukunda, L.O'Raifeartaigh, Group Theory of the Kepler Problem, preprint 1965.
6. H. Bacry, CERN, preprint (1965).
A. Kihlberg, S. Ström, CERN preprint (1965).
A.O. Barut. Phys. Rev. 139, 1433 (1965).
7. J.M. Jauch, E.L. Hill. Phys. Rev. 57, 641 (1940).
8. Ю.Н. Демков. ЖЭТФ 44, 2007 (1963).
9. I. Friš, V. Mandrosov, J.A. Smorodinsky, M. Uhlíř, P. Winternitz. Phys. Lett. 16, 354 (1965).
10. Е.Т. Уиттекер. Аналитическая динамика, Москва, ОНТИ, 1937.
11. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Механика, Москва, ФМ (1958).
12. П. Винтерниц, И. Фриш. Ядерная физика 1, 889 (1965).
13. И.Г. Петровский. Лекции об уравнениях с частными производными ГИТТЛ, Москва (1950).

Рукопись поступила в издательский отдел
29 декабря 1965 г.