ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р - 2522

Г.И. Кузнецов

ЗАМЕЧАНИЕ О МНОГОМЕРНОЙ КУЛОНОВСКОЙ ЗАДАЧЕ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1965

Р - 2522

Г.И. Кузнецов

ЗАМЕЧАНИЕ О МНОГОМЕРНОЙ КУЛОНОВСКОЙ ЗАДАЧЕ

Направлено в ЖЭТФ

I. Введение

Как было показано Фоком[1], "случайное" вырождение уровней атома водорода ($E<0$) связано со "скрытой" симметрией системы, а именно, симметрией относительно группы $O(4)$. Случай непрерывного спектра рассматривался в работе[2].

Аллилуевым[3], Дьерди и Реваи[4] изучалась f -мерная задача Кеплера ($E<0$). В[3,4] получен спектр собственных значений, а также показано, что гамильтониан системы обладает симметрией группы $O(f+1)$.

Нашей задачей является получение наряду со спектром явного вида решений для f -мерного кулона в случаях дискретного и непрерывного спектров.

II. Дискретный спектр

1. Пусть имеется система с гамильтонианом

$$H = \sum_{i=1}^{f} \frac{p_i^2}{2m} + V, \tag{2.1}$$

где

$$V = -b/r, \qquad r = \left(\sum_{i=1}^{f} x_i^2\right)^{1/2}, \qquad p_i = -i\frac{\partial}{\partial x_i}, \tag{2.2}$$

удовлетворяющая уравнению Шредингера

$$\hat{H}\Psi = E\Psi . \tag{2.3}$$

Явная группа симметрии уравнения (2.3) есть группа $O(f)$. Легко проверить, что ортонормированные собственные функции и собственные значения оператора (2.1) равны

$$\tilde{\Psi}_{n,\ell_1} = C(p_0 r)^{\ell_1} e^{-p_0 r} L^{2\ell_1+f-2}_{n-\ell_1}(2p_0 r)\, \tilde{Y}^{(f)}_{\ell_1} \ldots , \tag{2.4}$$

где

$$C = \left\{ \frac{2^{2\ell_1}(2p_0)^f\, \Gamma(n-\ell_1+1)}{(2n+f-1)\,\Gamma(n+\ell_1+f-1)} \right\}^{1/2},$$

$$\frac{m b}{p_0} = n + \frac{f-1}{2}\ , \qquad p_0 = \sqrt{-2 m E}\ ,$$

$$\ell_1 = 0, 1, 2, 3 \dots n 1; \qquad n = 0, 1, 2 \dots$$

$L^{2\ell_1 + f-2}_{n-\ell_1}$ – обобщенный полином Лагерра, а $\tilde{\tilde{Y}}^{(f)}_{\ell_1 \dots}$ –нормированное решение угловой части лапласиана, принадлежащее собственному значению $-\ell_1(\ell + f - 2)$. Следуя Фоку /1/, осуществим фурье–преобразование уравнения (2.3). В результате мы получаем интегральное уравнение в p –пространстве

$$(p^2 + p_0^2)\ \Psi(p) = \frac{m b \Gamma(\frac{f-1}{2})}{\pi^{\frac{f+1}{2}}} \int \frac{\Psi(q)\ d^f q}{|p - q|^{f-1}}\ . \tag{2.5}$$

Рассмотрим теперь координаты вектора p/p_0 как стереографическую проекцию точек $(f+1)$ –мерной единичной гиперсферы. Тогда координаты гиперсферы связаны с p_i/p_0 соотношениями

$$\xi_i = \frac{2 p_0 p_i}{p_0^2 + p^2}\ ; \qquad \xi_0 = \frac{p_0^2 - p^2}{p_0^2 + p^2}\ ; \tag{2.6}$$

причем

$$\sum_{i=0}^{f} \xi_i^2 = 1\ . \tag{2.7}$$

Зададим на (2.7) систему координат типа рис. 1 (символика работы /5/).Тогда ядро уравнения (2,5) и элемент объема $d^f q$ в новых переменных запишутся как

$$|p - q|^{f-1} = \frac{[(p_0^2 + p^2)(p_0^2 + q^2)\{2(1 - \cos\omega)\}]^{\frac{f-1}{2}}}{(2 p_0)^{f-1}}\ , \tag{2.8}$$

$$d^f q = \frac{(p_0^2 + q^2)^f}{(2 p_0)^f}\ d\Omega\ (f+1)\ , \tag{2.9}$$

где

$$d\Omega\ (f+1) = \prod_{i=1}^{f} \sin^{f-1}\theta_i\, d\theta_i\ – \tag{2.10}$$

элемент поверхности гиперсферы, а $\cos\omega = (\xi\ \xi')$.

Учитывая (2.8), (2.9) и обозначая

$$Y(\xi) = \frac{1}{2^{\frac{f+1}{2}}\ \ p_0^{\frac{f}{2}+1}}\ (p_0^2 + p^2)^{\frac{f+1}{2}}\ \Psi(p)\ , \tag{2.11}$$

получаем уравнение

$$Y(\xi) = \frac{m b\ \Gamma\ (\frac{f-1}{2})}{p_0\ \ 2\pi^{\frac{f+1}{2}}} \int \frac{Y(\xi')\ \ d\Omega'}{\{2(1 - \cos\omega)\}^{\frac{f-1}{2}}}\ . \tag{2.12}$$

Здесь ξ –точка на гиперсфере, а $2(1 - \cos\omega) = \sum_{i=0}^{f} (\xi_i - \xi_i')^2$ –квадрат расстояния между точками ξ и ξ' на гиперсфере. Выбранная в (2.11) константа обеспечивает сохранение нормировки, а именно :

$$\int |\Psi(p)|^2 d^f p = \int |Y(\xi)|^2 d\Omega\,(f+1) = 1\ . \tag{2.13}$$

2. Покажем, что $Y(\xi)$ есть решение угловой части уравнения Лапласа. Полагаем

$$x_i = r\ \xi_i\ , \qquad i = 0,1,2 \dots f\ .$$

Рассмотрим уравнение Лапласа

$$\sum_{i=0}^{f} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\ u(x) = 0\ . \tag{2.14}$$

Используя формулы Грина /6/, запишем его решение в виде

$$u(x) = \int_{\Omega} (G\ \frac{\partial u}{\partial n}\ -\ u\ \frac{\partial G}{\partial n})\ d\Omega\ , \tag{2.15}$$

где функция G равна

$$G = \frac{1}{(f-1)\ \Omega_{f+1}}\ \left(\frac{1}{R^{f-1}} + \frac{1}{R_1^{f-1}}\right)\ . \tag{2.16}$$

Здесь R и R_1 соответственно равны $R^2 = r^2 + r'^2 - 2 r r' \cos\omega$, $R_1^2 = 1 - 2 r r' \cos\omega + r^2 r'^2$, $\Omega_{f+1} = 2\pi^{\frac{f+1}{2}} / \Gamma(\frac{f+1}{2})$ – поверхность гиперсферы. Выбрав нормаль n по r', получаем

$$\left(\frac{\partial G}{\partial r'} + \frac{f-1}{2} G\right)_{r'=1} = 0 . \tag{2.17}$$

Для гармонической функции степени n

$$u(x) = r^n Y_n(\xi) , \tag{2.18}$$

где $Y_n(\xi)$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta Y_n^{(f+1)}(\xi) = -n(n+f-1)\, Y_n^{(f+1)}(\xi) , \tag{2.19}$$

выполняется равенство

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{f-1}{2} u\right)_{r=1} = \left(n + \frac{f-1}{2}\right) Y_n(\xi) . \tag{2.20}$$

Принимая во внимание (2.16), (2.17), (2.18), (2.20), получаем

$$r^n Y_n(\xi) = \frac{\left(n+\frac{f-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{f-1}{2}\right)}{2\pi^{\frac{f+1}{2}}} \int \frac{Y_n(\xi')\, d\Omega'}{(1-2r\cos\omega + r^2)^{\frac{f-1}{2}}} . \tag{2.21}$$

Уравнение (2.21) при $r = 1$ остается справедливым и является совместным с (2.12) при условии

$$\frac{mb}{p_0} = n + \frac{f-1}{2} , \tag{2.22}$$

откуда

$$E_n = -\frac{mb^2}{2\left(n + \frac{f-1}{2}\right)^2} . \tag{2.22^x}$$

$Y_n(\xi)$ при фиксированном n осуществляют неприводимое представление $D_n^{(f+1)}$ группы $O(f+1)$.

3. Решения уравнения Лапласа в различных координатных системах, задаваемых на гиперсфере, исследовались в работе /5/. Поэтому мы сразу запишем орторнормированное решение для системы координат, например, типа показанной на рис. 1.

$$\tilde{\tilde{Y}}_{n,\ell_2,\dots,\ell_f} = \prod_{i=1}^{f-2} N_i^{-1/2} \sin^{\ell_{i+1}}\theta_i\, P_{n_i}^{(\nu_i)}(\cos\theta_i)\, \tilde{\tilde{Y}}^m_{\ell_{f-1}}(\theta_{f-1}, \phi) , \tag{2.23}$$

где $\nu_i = \ell_{i+1} + \frac{f-i}{2}$, $n_i = \ell_i - \ell_{i+1}$, $\theta_f = \phi$, $\ell_f = m$, $\ell_1 = n$.

$$N_i = \frac{\pi\, 2^{1-2\ell_{i+1}-f+i}\, \Gamma(\ell_{i+1}+\ell_i+f-i)}{(\ell_i - \ell_{i+1})!\,\left(\ell_i + \frac{f-i}{2}\right)\left\{\Gamma\left(\ell_{i+1}+\frac{f-i}{2}\right)\right\}^2}$$ – квадрат нормы,

$P_n^{(\nu)}$ – полином Гегенбауэра, $\tilde{\tilde{Y}}^m_{\ell_{f-1}}$ – обычная сферическая функция. Решение вид (2.23), хотя оно имеется в /7/, приведено из соображений краткости записи. Другие но мированные решения легко записать, пользуясь алгоритмом работы /5/. Нам известен я ный вид $\Psi(r)$ и $\Psi(p)$, и поскольку одна из них является фурье-образом другой, то тем самым мы получаем новые интегральные представления полиномов Лагерра.

4. Получим "теорему сложения" для $\tilde{\tilde{Y}}_{n\ell_2\dots}(\xi)$. Уравнение (2.21) относительно r является тождеством. Разлагая ядро уравнения (2.26) (производящую функцию полиномов Гегенбауэра) в ряд по степеням r

$$\frac{1}{(1-2r\cos\omega + r^2)^{\frac{f-1}{2}}} = \sum_{k=0}^{\infty} P_k^{\left(\frac{f-1}{2}\right)}(\cos\omega)\, r^k \tag{2.24}$$

и сравнивая коэффициенты разложения при одинаковых степенях r, получаем

$$\tilde{\tilde{Y}}_{n,\ell_2\dots}(\xi)\,\delta_{nk} = \frac{\left(n+\frac{f-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{f-1}{2}\right)}{2\pi^{\frac{f+1}{2}}} \int P_k^{\left(\frac{f-1}{2}\right)}(\cos\omega)\, \tilde{\tilde{Y}}_{n,\ell_2\dots}(\xi')\, d\Omega' . \tag{2.25}$$

Функция $P_k^{\left(\frac{f-1}{2}\right)}(\cos\omega)$ зависит от ξ и ξ'. Разлагая ее по $\tilde{\tilde{Y}}_{n,\ell_2\dots}(\xi')$ и полагая $k = n$, мы легко получаем коэффициенты разложения, откуда немедленно будет следовать "теорема" сложения

$$\frac{\left(n+\frac{f-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{f-1}{2}\right)}{2\pi^{\frac{f+1}{2}}} P_n^{\left(\frac{f-1}{2}\right)}(\cos\omega) = \sum_{\ell_2,\ell_3\dots\ell_f} \tilde{\tilde{Y}}^*_{n,\ell_2\dots}(\xi')\, \tilde{\tilde{Y}}_{n,\ell_2\dots}(\xi) . \tag{2.26}$$

5. Наконец, покажем, что атом водорода $(f = 3)$ в пространстве Фока есть волчок. Согласно /5/ на гиперсфере можно ввести систему типа данной на рис. 2.

$$\xi_0 = \cos\theta \, \cos\phi_1 , \qquad \xi_2 = \sin\theta \, \cos\phi_2 ,$$
$$\xi_1 = \cos\theta \, \sin\phi_1 , \qquad \xi_3 = \sin\theta \, \sin\phi_2 . \tag{2.27}$$

Решение уравнения (2.19) при $f = 3$ с параметризацией (2.27) можно записать как

$$\Psi_{n,k_1,k_2}(\alpha,\beta,\gamma) = D^{(\frac{n}{2})}_{k_1 k_2}(\alpha,\beta,\gamma) , \tag{2.28}$$

где $\alpha = \phi_1 - \phi_2$, $\gamma = \phi_1 + \phi_2$, $\beta = 2\theta$,

$$k_1 = \frac{m_1 - m_2}{2} , \qquad k_2 = \frac{m_1 + m_2}{2}$$

Функция D является обобщенной сферической функцией Вигнера, или функцией волчка, т.е. она является представлением группы $O(3)$. При стандартной нормировке D - функций

$$\int D^{*(\frac{n}{2})}_{k_1 k_2}(\alpha,\beta,\gamma) \, D^{(\frac{n'}{2})}_{k_1' k_2'}(\alpha,\beta,\gamma) \, dg = \frac{8\pi^2}{n+1} \delta_{nn'} \delta_{k_1 k_1'} \delta_{k_2 k_2'} , \tag{2.29}$$

"теорема сложения" (2.26) имеет вид:

$$\frac{\sin(2\ell+1)\omega}{\sin\omega} = \sum_{k_1,k_2} D^{*(\ell)}_{k_1 k_2}(\alpha,\beta,\gamma) \, D^{(\ell)}_{k_1 k_2}(\alpha',\beta',\gamma') . \tag{2.30}$$

Здесь $\ell = n/2$,

$$\cos\omega = \cos\beta/2 \, \cos\beta'/2 \, \cos\left(\frac{\alpha+\gamma-\alpha'-\gamma'}{2}\right) + \sin\beta/2 \, \sin\beta'/2 \, \cos\left(\frac{\gamma-\alpha-\gamma'+\alpha'}{2}\right).$$

Формула (2.30) есть не что иное, как выражение для характера представления $D^{(\ell)}$ группы $O(3)$. При $\beta = \gamma = \alpha' = \beta' = \gamma' = 0$ $\omega = \frac{\alpha}{2}$ и (2.30) переходит в хорошо известное выражение (см., например, /8/)

$$\frac{\sin(2\ell+1)\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \sum_{k_1=-\ell}^{\ell} e^{ik_1\alpha} . \tag{2.30x}$$

Разобранный пример еще раз подтверждает инвариантность характера представления.

III. Непрерывный спектр

1. В случае непрерывного спектра $E > 0$ мы должны вместо гиперсферы рассматривать двухполостной гиперболоид, при этом импульсам p в пределах $0 < p_{in} < p_0 = \sqrt{2mE}$ относится верхняя пола гиперболоида, а импульсам p в пределах $p_0 < p_e < \infty$ -нижняя пола /1/ (можно наоборот), т.е. верхняя пола проектируется во внутренность сферы радиуса p_0, а нижняя - во внешнюю область. Итак,

$$\xi = \frac{2 p_0 p}{p_0^2 - p^2} = n \begin{cases} \operatorname{sh} a , & p = p_{in} , \\ -\operatorname{sh} a , & p = p_e , \end{cases}$$
$$\xi_0 = \frac{p_0^2 + p^2}{p_0^2 - p^2} = \begin{cases} \operatorname{ch} a , & p = p_{in} , \\ -\operatorname{ch} a , & p = p_e , \end{cases} \tag{3.1}$$
$$\xi_0^2 - \xi^2 = 1 .$$

Откуда получаем, что

$$p^2 / p_0^2 = \begin{cases} \operatorname{th}^2 \frac{a}{2} , & p = p_{in} , \\ \operatorname{cth}^2 \frac{a}{2} , & p = p_e . \end{cases} \tag{3.2}$$

Из (3.2) следует, что $p_{in} p_e = p_0^2$. Следовательно, точки p_{in} и p_e являются зеркально сопряженными относительно сферы радиуса p_0. Зеркальному отображению в p -пространстве соответствует операция полной инверсии в ξ -пространстве. Интегральное уравнение (2.12) превращается в систему двух интегральных уравнений:

$$- Y_+(\xi) = \lambda \frac{\Gamma(\frac{f-1}{2})}{2\pi^{\frac{f+1}{2}}} \left\{ \int \frac{Y_+(\xi') \, d\Omega'}{[2(\operatorname{ch}\omega - 1)]^{\frac{f-1}{2}}} + \int \frac{Y_-(\xi') \, d\Omega'}{[2(\operatorname{ch}\omega + 1)]^{\frac{f-1}{2}}} \right\} ,$$
$$Y_-(\xi) = \lambda \frac{\Gamma(\frac{f-1}{2})}{2\pi^{\frac{f+1}{2}}} \left\{ \int \frac{Y_+(\xi') \, d\Omega'}{[2(\operatorname{ch}\omega + 1)]^{\frac{f-1}{2}}} + \int \frac{Y_-(\xi') \, d\Omega'}{[2(\operatorname{ch}\omega - 1)]^{\frac{f-1}{2}}} \right\} . \tag{3.3}$$

Здесь введено следующее обозначение :

$$Y_+(\xi) = \frac{(p_0^2 - p_{in}^2)^{\frac{f+1}{2}}}{2^{\frac{f+1}{2}}\, p_0^{\frac{f}{2}+1}}\, \Psi(p_{in}), \qquad Y_-(\xi) = \frac{(p_e^2 - p_0^2)^{\frac{f+1}{2}}}{2^{\frac{f+1}{2}}\, p^{\frac{f}{2}+1}}\, \Psi(p_e), \tag{3.4}$$

$$\lambda = mb/p_0, \quad p_0 = \sqrt{2mE}, \qquad E > 0, \qquad d\Omega' = \mathrm{sh}^{f-1} a'\, da'\, d\Omega'(f),$$

Индексы +, – указывают, что функция $Y(\xi)$ задана соответственно на верхней и нижней полах гиперболоида, т.е.

$$Y(\xi) = \begin{cases} Y_+(\xi), & \xi_0 > 0, \\ Y_-(\xi), & \xi_0 < 0. \end{cases} \tag{3.5}$$

2. Перейдем к построению ортонормированной системы функций, заданной на гиперболоиде в $f+1$ -мерном псевдоэвклидовом пространстве и являющейся решением уравнения Лапласа с собственным значением $\sigma(\sigma+f-1)$. σ -комплексное число, равное в унитарном случае $-\frac{f-1}{2} + i\rho$. Согласно /9, 10/ необходимо различать четномерные и нечетномерные пространства. Пусть имеется скалярная, финитная, бесконечно дифференцируемая функция $f(\xi)$, определенная на $\xi_0^2 - \xi^2 = 1$. Тогда ее можно представить (см. /10/) как

$$f(\xi) = \frac{(-)^{\frac{f-1}{2}}}{(2\pi)^f\, 2i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{\Gamma(\sigma+f-1)}{\Gamma(\sigma)} \int_L \Phi(k,\sigma)(\xi k)^{-\sigma-f+1}\, d^{f-1}k\, d\sigma \tag{3.6}$$

при $f = 2n+1$.

$$f(\xi) = \frac{(-)^{\frac{f}{2}-1}}{(2\pi)^f\, 2i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{\Gamma(\sigma+f-1)}{\Gamma(\sigma)}\, \mathrm{ctg}\, \pi\sigma \int_L \Phi(k,\sigma)(\xi k)^{-\sigma-f+1}\, d^{f-1}k\, d\sigma \tag{3.7}$$

при $f = 2n$. В (3.6), (3.7) контур L есть $\sum_{i=1}^{f} k_i^2 = 1$, $d^{f-1}k = d\Omega(f)$ – элемент гиперсферы. Разложим $\Phi(k,\sigma)$ по функциям $\tilde{Y}_\alpha(\Omega)$ (2.23).

$$\Phi(k,\sigma) = \sum_\alpha a_\alpha(\sigma)\, \tilde{\tilde{Y}}_\alpha(\Omega). \tag{3.8}$$

Здесь α –набор индексов $\{\ell_1, \ldots \ell_{f-2}, m\}$, Ω – набор углов $\{\theta_1, \ldots, \theta_{f-2}\, \phi\}$. Подставляя (3.8) в (3.6), (3.7) и производя интегрирование с учетом симметрии $\Phi(k,\sigma)$ (см. /9/), получаем в унитарном случае $\sigma = -\frac{f-1}{2} + i\rho$ следующее разложение $f(\xi)$ соответственно для $f = 2n+1$ и $f = 2n$:

$$f(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{f/2}} \int_0^\infty d\rho \prod_{k=1}^{\frac{f-1}{2}} \left\{\rho^2 + \left[\frac{f-(2k+1)}{2}\right]^2\right\} \sum_{\ell_1\ldots m} a_{\ell_1\ldots m}(\rho)\, \Psi^{(f)}_{\rho,\ell_1}(a)\, \tilde{\tilde{Y}}_{\ell_1\ldots m}(\theta_1\ldots\phi), \tag{3.8}$$

$$f(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{f/2}} \int_0^\infty d\rho\; \rho\; \mathrm{th}\, \pi\rho \prod_{k=1}^{\frac{f}{2}-1} \left\{\rho^2 + \left[\frac{f-(2k+1)}{2}\right]^2\right\} \sum_{\ell_1\ldots m} a_{\ell_1\ldots m}(\rho)\, \Psi^{(f)}_{\rho,\ell_1}(a)\, \tilde{\tilde{Y}}_{\ell_1\ldots m}(\theta_1\ldots\phi), \tag{3.9}$$

где

$$\Psi^{(f)}_{\rho,\ell_1}(a) = \frac{\Gamma(f-2+\ell_1)\,\Gamma(i\rho - \frac{f-1}{2}+1)}{\Gamma(f-2)\,\Gamma(\ell_1+1)\,\Gamma(i\rho - \frac{f-1}{2}+1-\ell_1)} \cdot \frac{P^{-\ell_1-\frac{f-2}{2}}_{-1/2+i\rho}(\mathrm{ch}\, a)}{\mathrm{sh}^{\frac{f-2}{2}} a}. \tag{3.10}$$

Так как однородная функция $\Phi(k,\sigma)$ представима в виде /10/

$$\Phi(k,\sigma) = \int f(\xi)(\xi k)^\sigma \frac{d^f \xi}{\xi_0}, \tag{3.11}$$

то, учитывая (3.8), легко записать формулы обратного преобразования. А именно :

$$a_{\ell_1\ldots m}(\rho) = (2\pi)^{f/2} \int f(\xi)\, \Psi^{(f)}_{-\rho,\ell_1}(a)\, \tilde{\tilde{Y}}^*_{\ell_1\ldots m}(\theta_1\ldots\phi)\, \frac{d^f \xi}{\xi_0}, \tag{3.12}$$

из (3.8), (3.9), (3.12) следует, что функция

$$\Psi^{(f)}_{\rho,\ell_1\ldots m}(\xi) = \frac{\Gamma(f-2+\ell_1)\,|\Gamma(i\rho-\frac{f-1}{2}+1)|\; P^{-\ell_1-\frac{f-2}{2}}_{-1/2+i\rho}(\mathrm{ch}\, a)}{\Gamma(f-2)\,\Gamma(\ell_1+1)\,|\Gamma(i\rho-\frac{f-1}{2}+1-\ell_1)|\; \mathrm{Sh}^{\frac{f-2}{2}} a}\; \tilde{\tilde{Y}}_{\ell_1\ldots m}(\theta_1\ldots\phi) \times$$

$$\times \begin{cases} \left[\prod_{k=1}^{\frac{f-1}{2}} \left\{\rho^2 + \left[\frac{f-(2k+1)}{2}\right]^2\right\}\right]^{1/2}, & f = 2n+1, \\ \left[\rho\, \mathrm{th}\pi\rho \prod_{k=1}^{\frac{f}{2}-1} \left\{\rho^2 + \left[\frac{f-(2k+1)}{2}\right]^2\right\}\right]^{1/2}, & f = 2n, \end{cases} \tag{3.13}$$

удовлетворяет условию нормировки

$$\int \tilde{\tilde{\Psi}}^{*}_{\rho,\ell_1\ldots m}(a,\theta_1,\ldots,\phi)\,\tilde{\tilde{\Psi}}_{\rho',\ell_1',\ldots m}(a,\theta_1,\ldots,\phi)\frac{d^f\xi}{\xi_0}=\delta(\rho-\rho')\,\delta_{\ell_1\ell_1'}\ldots\delta_{mm'}, \quad (3.14)$$

где $$\frac{d^f\xi}{\xi_0} = sh^{f-1} a \; da \; d\Omega(f)\,.$$

Учитывая явный вид функций (3.13) и "теорему сложения" (2.26), сразу можно написать "теорему сложения" для функций (3.13).

$$\sum_a \tilde{\tilde{\Psi}}^{*}_{\rho,a}(\xi')\,\tilde{\tilde{\Psi}}_{\rho,a}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{f/2}}\,\frac{P^{-\frac{f-2}{2}}_{-\frac12+i\rho}(ch\,\omega)}{sh^{\frac{f-2}{2}}\omega}\times$$

$$\prod_{k=1}^{\frac{f-1}{2}}\{\rho^2+[\frac{f-(2k+1)}{2}]^2\}, \qquad f=2n+1, \quad (3.15)$$

$$\times\; \rho\, th\,\pi\rho \prod_{k=1}^{\frac{f}{2}-1}\{\rho^2+[\frac{f-(2k+1)}{2}]^2\}, \qquad f=2n,$$

где $ch\,\omega = (\xi\,\xi')$.

Можно по аналогии с (2.26) записать (3.15) через функцию Гегенбауэра:

$$\sum_a \tilde{\tilde{\Psi}}^{*}_{\rho,a}(\xi')\,\tilde{\tilde{\Psi}}_{\rho,a}(\xi) = \frac{(\sigma+\frac{f-1}{2})\,\Gamma(\frac{f-1}{2})}{2\pi^{\frac{f+1}{2}}}\,P_\sigma^{(\frac{f-1}{2})}(ch\,\omega)\begin{cases}(-)^{\frac{f-1}{2}}, & f=2n+1;\ n=1,2\ldots\\ (-)^{\frac{f}{2}-1}ctg\pi\sigma, & f=2n.\ n=1,2,3\ldots\end{cases} \quad (3.15^x)$$

Отметим, что (3.13) для четномерного случая справедлива, начиная с $f=4$. Случай $f=2$ имеется в /10, 11/. Функции $\tilde{\tilde{\Psi}}_{\rho,a}(\xi)$ образуют полную систему на каждой из двух полостей гиперболоида и являются решением уравнения Лапласа с собственным значением $\sigma(\sigma+f-1)$ $(\sigma=-\frac{f-1}{2}+i\rho$ в унитарном случае). В справедливости последнего утверждения легко убедиться, непосредственно рассматривая решения уравнения Лапласа. Совокупность $\tilde{\tilde{\Psi}}_{\rho,a}(\xi)$ преобразуются по бесконечномерному унитарному представлению класса I $T_\chi(g)$, $\chi=(i\rho, i\rho)$ группы Лоренца.

3. Принимая во внимание выше сказанное, а также (3.5), имеем

$$Y_{E,a}(\xi)=\begin{cases}Y_{+,E,a}(\xi), & \xi_0>0\\ Y_{-,E,a}(\xi), & \xi_0<0\end{cases} = \begin{cases}c_1\tilde{\tilde{\Psi}}_{\rho,a}(\xi), & \xi_0>0,\\ c_2\tilde{\tilde{\Psi}}_{\rho,a}(\xi), & \xi_0<0.\end{cases} \quad (3.16)$$

Ядра системы интегральных уравнений (3.3) выражаются через $\tilde{\tilde{\Psi}}_{\rho,a}(\xi)$ по формулам:

$$\frac{\Gamma(\frac{f-1}{2})}{2\pi^{\frac{f+1}{2}}[2(ch\omega\mp1)]^{\frac{f-1}{2}}} = \int_0^\infty d\rho\; F_{1,2}(\rho)\sum_a \tilde{\tilde{\Psi}}^{*}_{\rho,a}(\xi')\,\tilde{\tilde{\Psi}}_{\rho,a}(\xi), \quad (3.17)$$

где

$$F_1=\frac{ctg\,\pi\rho}{\rho}, \qquad F_2=\frac{1}{\rho\; sh\,\pi\rho}. \quad (3.18)$$

Выражения (3.18) для спектральных плотностей $F_i(\rho)$ получены путем интегрирования ядер с учетом формул (3.13)-(3.15). Для нахождения c_1 и c_2 подставим (3.16) в (3.3). Учитывая (3.14) и (3.17), получаем для c_1, c_2 систему уравнений

$$\begin{cases}-c_1=\lambda\,[c_1F_1+c_2F_2], \\ c_2=\lambda\,[c_1F_2+c_2F_1].\end{cases} \quad (3.19)$$

Из (3.19) находим

$$c_1/c_2=-e^{\mp\pi\rho}; \quad \lambda=\pm\rho=\frac{mb}{p_0}.$$

Нормируя c_1 и c_2 условием $|c_1|^2+|c_2|^2=1$, получаем

$$c_1=(1+e^{\pi\rho})^{-1/2}; \qquad c_2=-(1+e^{-\pi\rho})^{-1/2}. \quad (3.20)$$

Выражения (3.18)-(3.20) не зависят от размерности пространства и, естественно, совпадают со значением, полученным для них в /2/ для $f=3$. Поскольку

$$\frac{|p_0^2-p^2|^{\frac{f+1}{2}}}{2^{\frac{f+1}{2}}\,p_0^{\frac{f}{2}+1}}\,\Psi_{E,a}(p)=\|\tilde{N}\|^{-1/2}\,\frac{P^{-\ell-\frac{f-2}{2}}_{-1/2+i\rho}\left(\left|\frac{p^2+p_0^2}{p^2-p_0^2}\right|\right)}{\left|\frac{2p_0p}{p_0^2-p^2}\right|^{\frac{f-2}{2}}}\,\tilde{Y}_{\ell_1\ldots m}(\theta_1\ldots\phi)\begin{cases}c_1, & p<p_0\\ c_2, & p>p_0,\end{cases} \tag{3.21}$$

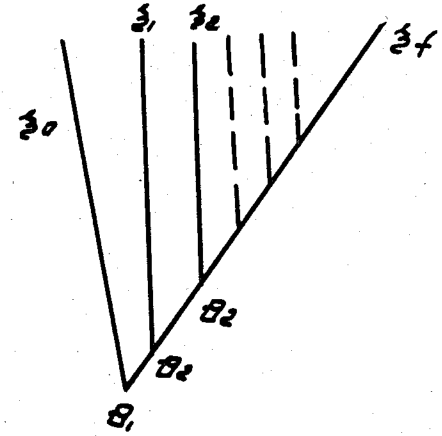
то особенности $\Psi_{E,a}(p)$ полностью определены.

Автор искренне благодарит Я.А. Смородинского за обсуждения результатов работы и критические замечания.

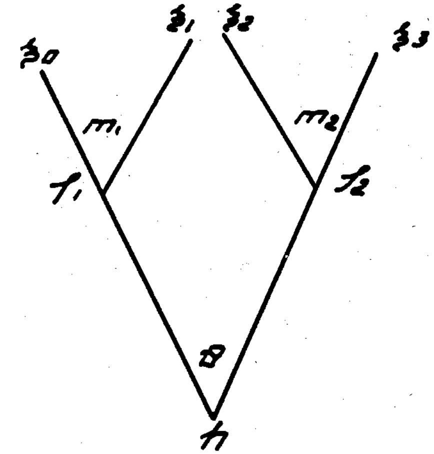
Литература

1. V.A.Fock. Zeits. f. Phys., 98, 145 (1935).
2. А.М. Переломов, В.С. Попов. ЖЭТФ, 50, 179 (1966).
3. С.П. Аллилуев. ЖЭТФ, 33, 200 (1957).
4. Г. Дьерди, Я. Ревai. ЖЭТФ, 48, 1445 (1965).
5. Н.Я. Виленкин, Г.И. Кузнецов, Я.А. Смородинский. ЯФ, 2, вып. 5 (1965).
6. Ф. Франк, Р. Мизес. Дифференциальные интегральные уравнения математической физики, ч. 2, ОНТИ, 1937.
7. Higher Transcendental Function, v.II, Mc.Craw-Hill Book Co. Inc., New York (1953).
8. Г.Я. Любарский. Теория групп и ее применение в физике. Физматгиз, 1958.
9. И.М. Гельфанд, М.И. Граев, Н.Я. Виленкин. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. Физматгиз, 1962.
10. Н.Я. Виленкин, Я.А. Смородинский. ЖЭТФ, 46, 1793 (1964).
11. Г.И. Кузнецов, Я.А. Смородинский. ЯФ, 3, вып. 2, 1966; Препринт ОИЯИ, Р-2321, Дубна, 1965.

Рукопись поступила в издательский отдел
28 декабря 1965 г.



Р и с. 1.



Р и с. 2.