ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р-2519

А.А. Логунов, М.А. Мествиришвили, И.Н. Силин

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ АМПЛИТУДЫ РАССЕЯНИЯ ПРИ БОЛЬШИХ ПЕРЕДАВАЕМЫХ ИМПУЛЬСАХ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1965

P-2519

А.А. Логунов, М.А. Мествиришвили, И.Н. Силин

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ АМПЛИТУДЫ РАССЕЯНИЯ ПРИ БОЛЬШИХ ПЕРЕДАВАЕМЫХ ИМПУЛЬСАХ

§ 1. В в е д е н и е

Хорошо известно[1], что для получения дисперсионных соотношений (д.с.) по s наряду с аналитичностью, которая является следствием принципа микропричинности, требуется полиномиальная ограниченность амплитуды в окрестности бесконечно удаленной точки. Последнее ограничение (задание степени роста) в теории д.с. выступает как независимый постулат и приводит к тому, что Фурье-образы запаздывающих амплитуд будут обобщенными функциями медленного роста.

Возникает вопрос: не является ли требование полиномиальной ограниченности слишком сильным. Чтобы ответить на этот вопрос, заметим следующее: принцип причинности, гарантируя аналитичность амплитуды в комплексной s плоскости, накладывает также определенное условие на ее рост. Поэтому можно было бы думать, что дополнительное предположение о степени роста амплитуды излишне, однако, ограничение, следующее из принципа причинности, является слабым и допускает рост более медленный, чем у любой линейной экспоненты[2]. Таким образом, для существования д.с. задание степени роста является необходимым.

Из вышесказанного следует, что при выполнении условия микропричинности (что обуславливает аналитичность в комплексной s плоскости) степень роста на ∞ может быть, вообще говоря, не полиномиальной. В этой связи можно ввести понятия элементарной длины в теории (даже при наличии локальной причинности), поскольку при экспоненциальном росте амплитуды всегда появляется величина размерности длины, характеризующая степень роста амплитуды на ∞.

?

Однако, если предположить, что физические величины на действительной оси s не растут быстрее полинома, то при наличии принципа локальной причинности возможность экспоненциального роста амплитуд в комплексной плоскости на физическом листе исключается, и в теории элементарная длина не возникает.

Ситуация такова лишь в s-плоскости. Если, следуя Мандельстаму, постулировать аналитичность амплитуды в комплексной t плоскости, то в отличие от предыдущего случая, где условие причинности явно накладывает ограничение на рост амплитуды, здесь такого рода ограничение пока неизвестно. В соответствии с симметрией между t и s плоскостями мы в дальнейшем будем предполагать, что рост в t плоскости, как и в s плоскости, не быстрее линейной экспоненты.

Пусть $s \geq s_{порог}$. Тогда линии разреза в t плоскости являются нефизическими, и мы не обязаны требовать полиномиальной ограниченности амплитуды на разрезах. Тем самым мы не исключаем неполиномиальный рост амплитуды по t и, значит, не можем написать д.с. с конечным числом вычитаний. Целью нашей работы является разработка некоторой техники, обобщающей метод фазовых представлений Сугавари и Табис[3]. Он приводит к представлению для амплитуды вида (2.3), которое, с одной стороны, допускает неполиномиальный рост, совместимый с принципом микропричинности, а с другой, – является удобным для описания экспериментальных данных.

§ 2. Определение класса функций. Свойства формфакторов

Наше рассмотрение начнем со случая электрон-протонного рассеяния. Амплитуда этого процесса в e^2 приближении выражается через электрический и магнитный формфакторы нуклона, которые зависят только от передаваемого импульса t. Обозначим эти формфакторы через $G(t)$. Известно, что $G(t)$ есть голоморфная функция в t-плоскости с разрезом вдоль действительной оси от $a \geq 0$ до $+\infty$.

Переведем t плоскость с помощью конформного отображения

$$\zeta = \frac{2a - t - 2\sqrt{a(a-t)}}{t} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{a-t}}{\sqrt{a} + \sqrt{a-t}} \qquad (2.1)$$

в единичный круг (обратное преобразование имеет вид $t = 4a\zeta/(1+\zeta)^2$) и обозначим образ $G(t)$ через $f(\zeta)$.

Пусть $f(\zeta) \in A$, где A – класс всех функций, аналитических в единичном круге и удовлетворяющих условию

$$\lim_{\rho \to 1} \int_0^{2\pi} \ln^+ |f(\rho e^{i\theta})| \, d\theta \leq A < \infty , \qquad (2.2)$$

где

$$\ln^+ a = \begin{cases} \ln a & a \geq 1 \\ 0 & a < 1 \end{cases}$$

Естественно, что ограничение (2.2) соответственно определяет класс $G(t)$ функций в t плоскости. Как будет видно ниже, для $G(t)$ при этом, с одной стороны, допускается довольно разнообразное поведение на бесконечности, а с другой стороны, это расширение по сравнению с классом функций, для которых пишутся д.с., носит в некотором смысле минимальный характер.

Отметим основные свойства функции из класса А [x)].

1. Пусть $f(\zeta) \in A$, тогда она допускает представление

$$f(\zeta) = b(\zeta) \exp\left\{ i\lambda + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}+\zeta}{e^{i\theta}-\zeta}\,\omega(\theta)\,d\theta \right\} = b(\zeta)\, e^{\phi(\zeta)}, \tag{2.3}$$

где $b(\zeta)$ является функцией Бляшке. Функция Бляшке дает все нули $f(\zeta)$ и имеет вид:

$$b(\zeta) = \prod_{i=0}^{\infty}\left(\frac{\zeta-\zeta_i}{1-\zeta\zeta_i}\right)\prod_{j=1}^{\infty}\left(\frac{\zeta-\zeta_j}{1-\zeta\zeta_j^*}\right)\prod_{j=1}^{\infty}\left(\frac{\zeta-\zeta_j^*}{1-\zeta\,\zeta_j}\right). \tag{2.4}$$

Здесь ζ_i обозначают действительные нули, а ζ_j и ζ_j^* –комплексные. Множители, соответствующие кратным нулям, написаны столько раз, какова их кратность. Для $b(\zeta)$ имеем $|b(e^{i\theta})| = 1$, а ее корни удовлетворяют условию $\sum\limits_{\nu=0}^{\infty}(1-|\zeta_\nu|)<\infty$; в противном случае

$$f(\zeta) \equiv 0 .$$

2. Функции из класса А допускают оценку

$$\max_{0\le\theta\le 2\pi} |f(\rho e^{i\theta})| \le e^{\frac{2A(f)}{1-\rho}} . \tag{2.5}$$

Это легко доказывается, если вспомнить, что $\ln|f(\rho e^{i\theta})| \le \ln|\exp\{\phi(\zeta)\}|$, где $\ln|\exp\{\phi(\zeta)\}|$ – гармоническая функция внутри единичиого круга. Условие (2.5) является необходимым (но недостаточным) для принадлежности функции $f(\zeta)$ классу А. Если $\operatorname{Re}\phi(\zeta)$ имеет на границе сингулярность выше, чем $\lim\limits_{\rho\to 1}\frac{2A(f)}{1-\rho}$, т.е. если не выполняется неравенство

$$\lim_{\rho\to 1}\frac{2A(f)}{1-\rho} \ge \lim_{\rho\to 1}\left[\max_{0\le\theta\le 2\pi} \operatorname{Re}\phi(\rho e^{i\theta})\right], \tag{2.6}$$

то тогда $e^{\phi(\zeta)}$ заведомо не входит в А.

Для установления некоторых общих свойств функции, определяемой равенством

$$\phi(\zeta) = i\lambda + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{e^{i\theta}+\zeta}{e^{i\theta}-\zeta}\,\omega(\theta)\,d\theta , \tag{2.7}$$

[x)] Подробно эти вопросы излагаются в /4/.

представим ее в виде:

$$\phi(\zeta) = i\bar{\phi}(0) + \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{\omega(z)}{z-\zeta}\,dz\,. \qquad (2.7a)$$

На основании теоремы /5/ интеграл типа (2.7а) изображает функцию класса H_δ, где $0<\delta\leq 1$. Упомянутый здесь класс H_δ определяется следующим образом: говорят, что $\phi(\zeta)\in H_\delta$, если

$$\lim_{\rho\to 1}\int_0^{2\pi} |\phi(\rho e^{i\theta})|^{\delta}\,d\theta < H_\delta(\phi) < \infty\,. \qquad (2.8)$$

Для функции класса H_δ справедлива следующая оценка

$$\max_{0\leq\theta\leq 2\pi} |\phi(\rho e^{i\theta})| \leq \left\{\frac{2H_\delta(\phi)}{1-\rho}\right\}^{1/\delta}, \qquad (2.8)$$

которая, как и соотношение (2.6), для класса A является необходимым, но недостаточным условием принадлежности $\phi(\zeta)$ к классу H_δ.

Ниже нам придется воспользоваться интегральной формулой Коши для $\tilde{\phi}(t)$, которая является образом $\phi(\zeta)$ в t -плоскости. Для того чтобы $\tilde{\phi}(t)$ удовлетворяла д.с. с n -вычитаниями, необходимо и достаточно, чтобы функция $\Psi(\zeta) = \frac{1-\zeta}{1+\zeta}\left[b-\frac{1-\zeta}{1+\zeta}\right]^{-n}\phi(\zeta)$ была представима интегралом Коши в единичном круге.

Это возможно тогда и только тогда /6/, когда $\Psi(\zeta)$ удовлетворяет следующим ограничениям:

$$\int_0^{2\pi} |\Psi(e^{i\theta})|\,d\theta < \infty \qquad (2.9)$$

$$\lim_{z\to 0}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} z\,\ln^+|\Psi(-1+2e^{ia})|\cos a\,da = 0\,. \qquad (2.10)$$

При этом $\phi(\zeta)$ может иметь интегрируемые особенности на контуре, а в точке $\zeta=1$ для $\mathrm{Im}\,\phi(\zeta)$ допускается поведение типа $(-1+\rho)^{-n}$. Однако n не может быть произвольным, так как аналитичность в единичном круге для $\phi(\zeta)$ означает, что $\mathrm{Im}\,\phi(\zeta)$ и $\mathrm{Re}\,\phi(\zeta)$ связаны между собой условием Коши-Римана, а для $\mathrm{Re}\,\phi(\zeta)$ возможная сингулярность определяется условием (2.6). Мы ограничиваемся подклассом из A, который соответствует $n\leq 1$, и, значит, допустимые сингулярность для $\mathrm{Re}\,\phi(\zeta)$ и $\mathrm{Im}\,\phi(\zeta)$ не выше $\frac{A}{1-\rho}$.

Наряду со свойствами, характерными для функции класса A, мы требуем также, чтобы $f(\zeta)$ удовлетворяла условию

$$f^*(\zeta) = f(\zeta^*) \,, \tag{2.11}$$

которое является следствием равенства $G^*(t) = G(t^*)$, если учесть, что $t^*(\zeta) = 4a\zeta^*/(1+\zeta^*)^2 = t(\zeta^*)$. Условие (2.11) означает, что при действительных значениях ζ, $f(\zeta)$ действительна, и все ее нули симметричны относительно реальной оси.

Условие (2.11) распространяется и на $\phi(\zeta)$ функцию, которая определяется формулой (2.7), если только мы докажем, что $b^*(\zeta) = b(\zeta^*)$ Для $\Pi\left(\frac{\zeta-\zeta_i}{1-\zeta\zeta_i}\right)$ свойство (2.11) очевидно. Остальные сомножители в (2.4) в отдельности свойством (2.11) не обладают, но вместе они ему удовлетворяют. Действительно:

$$\left[\left(\frac{\zeta-\zeta_j}{1-\zeta\zeta_j^*}\right)\left(\frac{\zeta-\zeta_j^*}{1-\zeta_j\zeta}\right)\right]^* = \left(\frac{\zeta^*-\zeta_j^*}{1-\zeta_j\zeta^*}\right)\left(\frac{\zeta^*-\zeta_j}{1-\zeta_j^*\zeta^*}\right) = \left(\frac{\zeta^*-\zeta_j}{1-\zeta^*\zeta_j^*}\right)\left(\frac{\zeta^*-\zeta_j^*}{1-\zeta_j\zeta^*}\right).$$

Отсюда приходим к заключению, что

$$\phi^*(\zeta) = \phi(\zeta^*) \,. \tag{2.12}$$

§ 3. Фазовое представление в t -плоскости

Исходной для получения фазовых представлений в t -плоскости является формула (2.3). Наряду с $\tilde{\tilde{\phi}}(t)$ необходимо учесть еще скачок, возникающий от функции $\tilde{\tilde{b}}(t)$, являющейся образом функции Бляшке $b(\zeta)$. Для этой цели представим $\tilde{\tilde{b}}(t)$ в виде $\tilde{\tilde{b}}(t) = B(t)\exp[g(t)]$, где $B(t)$ – целая функция, дающая все нули $\tilde{\tilde{b}}(t)$ в t -плоскости, а $\exp[g(t)]$ имеет разрез от $a > 0$ до $+\infty$. Если число нулей бесконечно, то $B(t)$ является функцией Вейерштрасса, а если их число конечно, то $B(t)$ – полином. Мы далее будем предполагать, что число нулей конечно. Предположим также, что $\tilde{\tilde{b}}(t)$ не имеет нулей на берегах разреза. Тогда

$$\ln \tilde{\tilde{b}}(t+i\epsilon) - \ln \tilde{\tilde{b}}(t-i\epsilon) = \theta(t-a)[g(t+i\epsilon) - g(t-i\epsilon)] = 2i\theta(t-a)\,\mathrm{Im}\,g(t). \tag{3.1}$$

Используя (2.4), найдем:

$$2i\,\mathrm{Im}\,g(t)\theta(t-a) = 2i\,\mathrm{Im}\left[\sum_{i=0}^{n}\ln\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{a-t-i\epsilon})-\zeta_i(\sqrt{a}+\sqrt{a-t-i\epsilon})}{(\sqrt{a}+\sqrt{a-t-i\epsilon})-\zeta_i(\sqrt{a}-\sqrt{a-t-i\epsilon})}\right. +$$

$$\left. +\sum_{j=1}^{m}\ln\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{a-t-i\epsilon})-\zeta_j(\sqrt{a}+\sqrt{a-t-i\epsilon})}{(\sqrt{a}+\sqrt{a-t-i\epsilon})-\zeta_j^*(\sqrt{a}-\sqrt{a-t-i\epsilon})} + \sum_{j=1}^{m}\ln\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{a-t-i\epsilon})-\zeta_j^*(\sqrt{a}+\sqrt{a-t-i\epsilon})}{(\sqrt{a}+\sqrt{a-t-i\epsilon})-\zeta_j(\sqrt{a}-\sqrt{a-t-i\epsilon})}\right]\theta(t-a). \tag{3.2}$$

Здесь $i=0,1,\dots,n$ – число действительных нулей в точках ζ_i, а $j=1,2,\dots,m$ – число комплексных нулей $\operatorname{Im}\zeta_j>0$ и $\operatorname{Im}\zeta_j<0$ в отдельности.

Так как $\operatorname{Im}\ln f(t)=\arg f(t)$ нам нужно вычислить аргументы выражений, которые стоят в (3.2) под знаком логарифма.

$$\arg[i]=\arg\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{a-t-i\epsilon})-\zeta_i(\sqrt{a}+\sqrt{a-t-i\epsilon})}{(\sqrt{a}+\sqrt{a-t-i\epsilon})-\zeta_i(\sqrt{a}-\sqrt{a-t-i\epsilon})}=\operatorname{arctg}\frac{-2\sqrt{a}\sqrt{t-a}\,\theta(t-a)}{a\frac{1-\zeta_i}{1+\zeta_i}-(t-a)\frac{1+\zeta_i}{1-\zeta_i}}. \qquad (3.3a)$$

Учитывая, что $\frac{1+\zeta_i}{1-\zeta_i}=\sqrt{\frac{a}{a-t_i}}$ $(a-t_i>0)$, имеем

$$\arg[i]=\operatorname{arctg}\frac{-2x_i}{1-x_i^2}\,\theta(t-a),$$

где

$$x_i=\sqrt{\frac{t-a}{a-t_i}}.$$

Аналогично можно подсчитать аргументы для других членов сумм (3.2). Мы приведем только результат:

$$\arg\left[\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{a-t-i\epsilon})-\zeta_j(\sqrt{a}+\sqrt{a-t-i\epsilon})}{([\sqrt{a}+\sqrt{a-t-i\epsilon})-\zeta_j^*(\sqrt{a}-\sqrt{a-t-i\epsilon})}\right]=\operatorname{arctg}\frac{-2\dfrac{x_j-\sin\frac{\psi_j}{2}}{\cos\frac{\psi_j}{2}}\theta(t-a)}{1-\left(\dfrac{x_j-\sin\frac{\psi_j}{2}}{\cos\frac{\psi_j}{2}}\right)^2}-\operatorname{arctg}\frac{1+\zeta_j}{1+\zeta_j^*} \qquad (3.3в)$$

$$\arg\left[\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{a-t-i\epsilon})-\zeta_j^*(\sqrt{a}+\sqrt{a-t-i\epsilon})}{(\sqrt{a}+\sqrt{a-t-i\epsilon})-\zeta_j(\sqrt{a}-\sqrt{a-t-i\epsilon})}\right]=\operatorname{arctg}\frac{-2\dfrac{x_j+\sin\frac{\psi_j}{2}}{\cos\frac{\psi_j}{2}}\theta(t-a)}{1-\left(\dfrac{x_j-\sin\frac{\psi_j}{2}}{\cos\frac{\psi_j}{2}}\right)^2}+\operatorname{arctg}\frac{1+\zeta_j}{1+\zeta_j^*} \qquad (3.3c)$$

Здесь $x_j=\sqrt{\frac{t-a}{|a-t_j|}}$, а $\Psi_j=\arg(a-t)$. При выводе последнего выражения учтено, что $\arg(a-t_j^*)=-\Psi_j$, поэтому в (3.3в) и (3.3с) Ψ_j приинимает значения в интервале $(0,\pi)$. Для $\operatorname{arctg}x$ везде берется ее главная ветвь, т.е. $-\frac{\pi}{2}\leq\operatorname{arctg}x\leq\frac{\pi}{2}$. V

Подставляя в (3.2) (3.3), находим

$$\operatorname{Im}g(t)\,\theta(t-a)=\Big[\sum_{i=0}^{n}\operatorname{arctg}\frac{-2x_i}{1-x_i^2}+ \qquad (3.4)$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\operatorname{arctg}\frac{-2\left(\frac{x_j}{\cos\psi_j/2}-\operatorname{tg}\frac{\psi_j}{2}\right)}{1-\left(\frac{x_j}{\cos\psi_j/2}-\operatorname{tg}\frac{\psi_j}{2}\right)^2}+\sum_{j=1}^{m}\operatorname{arctg}\frac{-2\left(\frac{x_j}{\cos\psi_j/2}+\operatorname{tg}\frac{\psi_j}{2}\right)}{1-\left(\frac{x_j}{\cos\psi_j/2}+\operatorname{tg}\frac{\psi_j}{2}\right)^2}\Big]\,\theta(t-a).$$

Отсюда для $g(t)$ можно написать

$$g(t) = \frac{1}{\pi} \int_a^\infty \frac{\operatorname{Im} g(t)}{t' - t} dt', \tag{3.4a}$$

а, следовательно, для формфактора $G(t)$ имеем представление

$$G(t) = B(t) \exp \left[\frac{1}{\pi} \int_a^\infty \frac{\operatorname{Im} g(t')}{t' - t} dt' + \frac{t - a_0}{\pi} \int_a^\infty \frac{\operatorname{Im} \tilde{\phi}(t')}{(t'-a_0)(t'-t)} dt' + \tilde{\phi}(a_0) \right], \tag{3.5}$$

которое является непосредственным следствием представления (2.3). Здесь учитывается то, что по предположению $\phi(\zeta)$ в точке $\zeta=-1$ не имеет особенности выше $\frac{\text{const}}{1+\zeta}$, чему для $\phi(t)$ в t плоскости соответствует поведение типа $\text{const}\,|t|^{1/2}$, когда $|t| \to \infty$.

Представляя $G(t)$ на верхнем берегу разреза в виде

$$G(t) = |G(t)| \exp[i\delta(t)\theta(t-a)],$$

где $\delta(t)$ – вещественная фаза функции $G(t)$, находим

$$\delta(t)\,\theta(t-a) = [\operatorname{Im} g(t) + \operatorname{Im} \tilde{\phi}(t)]\,\theta(t-a) = \delta_1(t) + \delta_2(t) \tag{3.6}$$

$$\delta_1(t) = \operatorname{Im} g(t)\,\theta(t-a); \qquad \delta_2(t) = \operatorname{Im} \tilde{\phi}(t)\theta(t-a).$$

Разбиение фазы $\delta(t)$ на две части удобно для дальнейшего анализа, так как они возникают из совершенно разных источников, а именно $\delta_1(t)$ полностью определяется значением корней $G(t)$ функции, в то время как $\delta_2(t)$ с ними не связана.

§ 4. Асимптотическое поведение $G(t)$ функции при больших $|t|$

Начнем рассмотрение свойств дисперсионного интеграла, связанного с фазой $\delta_1(t) = \operatorname{Im} g(t)$, которая дается выражением (3.4), и выясним его вклад в $G(t)$, когда $|t| \to \infty$. Заметим, что $\delta_1(t)$ не является непрерывной функцией своего аргумента. Действительно, используя известную формулу

$$\operatorname{arctg} \frac{2x}{1-x^2} = 2 \operatorname{arctg} x - \theta(x-1)\pi + \theta(-1-x)\pi,$$

находим

$$\delta_1(t) = \{ -2 \sum_{i=0}^{n} \operatorname{arctg} x_i + \sum_{i=0}^{n} \theta(x_i - 1)\pi - 2\sum_{j=1}^{m} \operatorname{arctg} \frac{x_j - \sin\psi_j/2}{\cos\psi_j/2} +$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\theta\left(\frac{x_j-\sin\psi_j/2}{\cos\psi_j/2}-1\right)\pi-\sum_{j=1}^{m}\theta\left(-1-\frac{x_j-\sin\psi_j/2}{\cos\psi_j/2}\right)\pi-$$

$$-2\sum_{j=1}^{m}\operatorname{arctg}\frac{x_j+\sin\psi_j/2}{\cos\psi_j/2}+\sum_{j=1}^{m}\theta\left(\frac{x+\sin\psi_j/2}{\cos\psi_j/2}-1\right)\pi\}\theta(t-a).$$

Отсюда явно видно, что $\delta_1(t)$ имеет скачок в каждой точке, когда аргумент θ – функции обращается в нуль. Скачок по модулю равняется π. Подставляя (4.2) в (3.4а), получаем:

$$g(t)=\sum_{\nu=1}^{3}J^{\nu}(t), \tag{4.3}$$

где

$$J^1(t)=-\sum_{i=0}^{n}\frac{2}{\pi}\int_0^1\frac{dx^2}{x^2+\dfrac{a-t}{a-t_i}}\operatorname{arctg}x$$

$$-\sum_{i=0}^{n}\frac{2}{\pi}\int_1^{\infty}\frac{dx^2}{x^2+\dfrac{a-t}{a-t_i}}\left[\operatorname{arctg}x-\operatorname{arctg}(+\infty)\right] \tag{4.4}$$

$$J^2(t)=-\sum_{j=1}^{m}\frac{2}{\pi}\int_0^{1+\operatorname{tg}\frac{\psi_j}{2}}\frac{d\kappa^2}{\kappa^2+\dfrac{a-t}{|a-t_j|\cos^2\frac{\psi_j}{2}}}\operatorname{arctg}\left(\kappa-\operatorname{tg}\frac{\psi_j}{2}\right)-$$

$$-\sum_{j=1}^{m}\theta\left(\operatorname{tg}\frac{\psi_j}{2}-1\right)\int_0^{1-\operatorname{tg}\psi_j/2}\frac{d\kappa^2}{\kappa^2+\dfrac{a-t}{|a-t_j|\cos^2\frac{\psi_j}{2}}}-\sum_{j=1}^{m}\frac{2}{\pi}\int_{\operatorname{tg}\frac{\psi_j}{2}+1}^{\infty}\frac{d\kappa^2}{\kappa^2+\dfrac{a-t}{|a-t_j|\cos^2\frac{\psi_j}{2}}}\left[\operatorname{arctg}\left(\kappa-\operatorname{tg}\frac{\psi_j}{2}\right)-\frac{\pi}{2}\right] \tag{4.5}$$

$$J^3(t)=-\sum_{j=1}^{m}\theta\left(1-\operatorname{tg}\frac{\psi_j}{2}\right)\frac{2}{\pi}\int_0^{1-\operatorname{tg}\psi_j/2}\frac{d\kappa^2}{\kappa^2+\dfrac{a-t}{|a-t_j|\cos^2\frac{\psi_j}{2}}}\operatorname{arctg}\left(\kappa+\operatorname{tg}\frac{\psi_j}{2}\right) \tag{4.6}$$

$$-\sum_{j=1}^{m}\theta\left(1-\operatorname{tg}\frac{\psi_j}{2}\right)\frac{2}{\pi}\int_{1-\operatorname{tg}\frac{\psi_j}{2}}^{\infty}\frac{d\kappa^2}{\kappa^2+\dfrac{a-t}{|a-t_j|\cos^2\frac{\psi_j}{2}}}\left[\operatorname{arctg}\left(\kappa+\operatorname{tg}\frac{\psi_j}{2}\right)-\frac{\pi}{2}\right],$$

где, как и раньше , $x^2 = \dfrac{t' - a}{a - t_i}$ и $\kappa^2 = \dfrac{t' - a}{|a - t_j| \cos^2 \frac{\psi_j}{2}}$.

Используя метод, развитый в работе /7/, можно получить следующие оценки для интегралов $J^\nu(t)$:

$$\Theta |J^1(t)| \le \begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{n} \frac{2}{\pi} C_0 \left| \frac{a - t_i}{a - t} \right|^{1/2} ; & \left| \arg \frac{a - t}{a - t_i} \right| \ge \theta_0 \\ \sum\limits_{i=0}^{n} \frac{2}{\pi} C_1 \left| \frac{a - t_i}{a - t} \right|^{1/2} \left[\ln \left(\mathrm{Re} \frac{a - t}{a - t_i} g\left(\left[\mathrm{Re} \frac{a - t}{a - t_i} \right]^{1/2} \right) \right) + \mathrm{const} \right]; & \left| \arg \frac{a - t}{a - t_i} \right| < \theta_0 \end{cases}$$

$$(4.7)$$

$$|J^2(t)| \le \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{m} \frac{2}{\pi} C_2 \left| \frac{a - t_j}{a - t} \right|^{1/2} \cos \frac{\psi_j}{2} ; & \left| \arg \frac{(a - t)}{(a - t_j| \cos^2 \frac{\psi_j}{2}} \right| \ge \theta_0 \\ \sum\limits_{j=1}^{m} \frac{2}{\pi} C_3 \dfrac{1}{\dfrac{|\mathrm{Re}(a-t)|^{1/2}}{|a - t_j|^{1/2} \cos \frac{\psi_j}{2}} - \mathrm{tg} \frac{\psi_j}{2}} \left(\ln \left[g(\mathrm{Re}\, t) \left(\frac{\mathrm{Re}(a - t)}{|a - t_j| \cos^2 \frac{\psi_j}{2}} \right)^2 \right] + \ln\left(a - \mathrm{tg} \frac{\psi_j}{2}\right) + C \right) \\ \left| \arg \frac{a - t}{|a - t_j| \cos^2 \frac{\psi_j}{2}} \right| < \theta_0 \qquad a > \mathrm{tg} \frac{\psi_j}{2}. \end{cases}$$

$$|J^3(t)| \le \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{m} \frac{2}{\pi} C_4 \left| \frac{a - t_j}{a - t} \right|^{1/2} \cos \frac{\psi_j}{2} & \left| \arg \frac{a - t}{|a - t_j| \cos^2 \frac{\psi_j}{2}} \right| \ge \theta_0 \\ \sum\limits_{j=1}^{m} \frac{2}{\pi} C_5 \dfrac{|a - t_j|^{1/2} \cos \frac{\psi_j}{2}}{|\mathrm{Re}(a - t)|^{1/2}} \left(\ln \left[g(\mathrm{Re}\, t) \left(\frac{|\mathrm{Re}(a - t)|}{|a - t_j| \cos \frac{\psi_j}{2}} \right)^{1/2} \right] + \mathrm{const} \right) \\ \left| \arg \frac{a - t}{|a - t_j| \cos^2 \frac{\psi_j}{2}} \right| < \theta_0 , \end{cases}$$

где θ_0 - фиксированный угол,по абсолютной величине меньший, чем $\pi/2$, а $g(\mathrm{Re}\, t)$ - некоторая положительная функция.

Полученный результат показывает, что при больших $|t|$ дисперсионный интеграл к экспоненте формулы (3.5), который связан с фазой $\delta_1(t)$, не меняет степенное поведение $G(t)$. Естественно полагать, что поведение $G(t)$ при $|t|\to\infty$ существенным образом зависит от $\delta_2(t)$ и от $B(t)$ функции. Последняя, когда $G(t)$ имеет конечное число нулей, является полиномом. Если нулей бесконечно много, оценки (4.7) теряют смысл и высказанное выше утверждение относительно влияния дисперсионного интеграла от $\delta_1(t)$ на асимптотику $G(t)$, вообще говоря, неверно.

В отличие от $\delta_1(t)$, свойства которой были известны "полностью", поведения $\delta_2(t)$ мы не знаем. Поэтому нам придется сделать некоторые разумные предположения, справедливость которых можно проверить, сравнивая результаты с экспериментальными данными.

Свойства $\delta_2(t)$ лучше всего описывать в ζ -плоскости на языке граничных значений $\phi(\zeta)$.

Пусть $\phi(\zeta)=\Phi(\zeta)(1+\zeta)^{-a}$. В соответствии с тем, что предполагалось, особенность $\phi(\zeta)$ не выше, чем $\frac{const}{1+\zeta}$, и поэтому $0\le a\le 1$, $\Phi(\zeta)$ – гладкая функция или имеет скачки первого рода. Когда $a<1$, то $\Phi(\zeta)$ в точке $\zeta=-1$ может иметь логарифмическую особенность.

Задавая определенные значения a и свойства $\Phi(\zeta)$, выясним поведение $\tilde{\phi}(t)$ и фазы $\delta_2(t)$ при $|t|\to\infty$.

1. Пусть $a=0$ и пусть в окрестности $\zeta=-1$

$$\lim_{\epsilon\to 0}[\Phi(e^{i(\pi-\epsilon)})-\Phi(e^{-i(\pi-\epsilon)})]\to 0,$$

т.е. $\lim\limits_{t\to+\infty}\delta_2(t)\to 0$. Тогда образ $\phi(\zeta)=\Phi(\zeta)$ при $|t|\to\infty$ допускает оценку $|\tilde{\phi}(t)|\le const$.

Если

$$\lim_{\epsilon\to 0}[\Phi(e^{i\pi-i\epsilon})-\Phi(e^{-i\pi+i\epsilon})]\to const \qquad \lim_{t\to+\infty}\delta_2(t)\to const$$

и для $|\tilde{\phi}(t)|$ имеем /7/

$$|\bar{\phi}(t)|<\begin{cases} const\ \ln(Ret\, g(Ret))+c & |\arg t|<\theta_0 \\ const\ \ln|t| & |\arg t|\ge\theta. \end{cases} \tag{4.8}$$

Здесь и везде θ_0 по абсолютной величине меньше, чем $\pi/2$, а $g(x)$ – некоторая невозрастающая положительная функция. (4.8) означает, что поведение $G(t)$ при $|t|\to\infty$ имеет степенной характер.

2. Пусть $a\neq 0$. Тогда $\lim\limits_{t\to+\infty}\delta_2(t)=\lim\limits_{\theta\to\pi}\left[\mathrm{Im}\frac{\Phi(e^{i\theta})}{(1+e^{i\theta})^a}\right]=$

$$= \lim_{\theta\to\pi} \left[2^{-\alpha} \operatorname{Im}\Phi(e^{i\theta}) \frac{\cos\alpha\theta/2}{\cos^{\alpha}\theta/2} - \frac{\operatorname{Re}\Phi(e^{i\theta})}{2^{\alpha}} \cdot \frac{\sin\alpha\theta/2}{\cos^{\alpha}\theta/2} \right].$$

Если $\lim_{\theta\to\pi} \operatorname{Im}\Phi(e^{i\theta}) \to \mathrm{const}$ и $\lim_{\theta\to\pi} \operatorname{Re}\Phi(e^{i\theta}) \to \mathrm{const}$, то $\lim_{t\to\infty} \delta_2(t) \to \mathrm{const}\, t^{\alpha/2}$ так как $\cos\theta/2 = \sqrt{a/t}$ и при $|t|\to\infty$ для $\tilde{\tilde{\phi}}(t)$ находим:

$$|\tilde{\tilde{\phi}}(t)| < \begin{cases} c_1 |t|^{\alpha/2} & |\arg t| \geq \theta_0 \\ c_1 |t|^{\alpha/2} [\ln(\operatorname{Re} t\, g(\operatorname{Re} t)) + \mathrm{const}] & |\arg t| < \theta \end{cases},$$

если $\alpha < 1$ и $\lim_{\theta\to\pi} \operatorname{Im}\Phi(e^{i\theta}) \approx \ln^{\beta} t$, $\lim_{\theta\to\pi} \operatorname{Re}\Phi(e^{i\theta}) \approx \ln^{\beta}(t)$ то $\delta_2(t) \approx \mathrm{const}\, t^{\alpha/2} \ln^{\beta} t$ и оценка для $\tilde{\tilde{\phi}}(t)$ имеет вид:

$$|\tilde{\tilde{\phi}}(t)| < \begin{cases} c_1 |t|^{\frac{\alpha+\epsilon}{2}} [\ln(\operatorname{Re} t \,.\, g'(\operatorname{Re} t)) + \mathrm{const}] & |\arg t| < \theta_0 \\ c_2 |t|^{\frac{\alpha+\epsilon}{2}} & |\arg t| \geq \theta_0 , \quad \epsilon > 0 \quad \alpha + \epsilon < 1 . \end{cases}$$

Таким образом, при $|t|\to\infty$, $G(t)$ допускает неполиномиальный рост, и на разрезе – осциллирует. Для аппроксимации экспериментальных данных удобно разложить показатель экспоненты в (2.3) по степеням ζ с выделением фактора $(1+\zeta)^{-\alpha}$, характеризующего рост $G(t) = \tilde{\tilde{f}}(t)$ при больших t. Таким образом, для $f(\zeta)$ имеем

$$f(\zeta) = b(\zeta) \exp\left[\frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n}{(1+\zeta)^{\alpha}} \right], \tag{4.9}$$

где $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n = \Phi(\zeta)$. Когда $\alpha = 1$, по предположению ряд в (4.9) должен сходится.

До сих пор мы ничего не говорили о скачках первого рода, которые $\delta_2(t)$ могут иметь на конечном расстоянии по t. Как показано в работах /3/, такие скачки $\delta_2(t)$ фазы не меняют полиномиальный характер $G(t)$ при $|t|\to\infty$, так что асимптотика $G(t)$ определяется свойством $\delta_2(t)$ только на бесконечности.

§ 5. Фазовое представление амплитуды p – p -рассеяния и ее асимптотическое поведение по передаваемому импульсу

Представим амплитуду рассеяния $T(s,t,u)$ в виде следующей суммы

$$T(s,t,u) = \frac{A}{t - t_0} + \frac{B}{u - u_0} + F_1(s,t) + F_2(s,u) = \frac{\Phi_1(s,t)}{t - t_0} + \frac{\Phi_2(s,u)}{u - u_0}.$$

Функции $F_1(s,t)$ и $F_2(s,u)$ и, значит, $\Phi_1(s,t) = A + (t-t_0) F_1(s,t)$ и $\Phi_2(s,u) = B + (u-u_0) F_2(s,u)$ имеют по одному разрезу по t и u и дают правый и левый разрез амплитуды $T(s,t,u)$, соответственно. s, t и u – обычные мандельстамовские переменные, удовлетворяющие соотношению $s+t+u = \sum_{i=1}^{4} m_i^2$. Разрез $\Phi_1(s,t)\,[\Phi_2(s,u)]$ начинается от $a_t > 0$ ($a_u > 0$) и простирается вдоль действительной оси до $+\infty$.

Предположим, что $\tilde{\tilde{\Phi}}_1(s,\zeta)$ и $\tilde{\tilde{\Phi}}_2(s,\xi)$ принадлежат классу А. Здесь переменные $\zeta = \frac{\sqrt{a_t}-\sqrt{a_t-t}}{\sqrt{a_t}+\sqrt{a_t-t}}$ и $\xi = \frac{\sqrt{a_u}-\sqrt{a_u-u}}{\sqrt{a_u}+\sqrt{a_u-u}}$ осуществляют конформное отображение разрезанных t и u плоскостей в единичные круги в ζ и ξ плоскостях соответственно. Тогда каждая функция $\Phi_1(s,t)$ и $\Phi_2(s,u)$ допускает представления типа (3.5), а для $T(s,t,u)$ имеем:

$$T(s,t,u) = \frac{\tilde{\tilde{D}}_1(t)}{t-t_0} \exp\left[\frac{1}{\pi}\int_{a_t}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} g_1(t')}{t'-t}\,dt' + \frac{t-t_1}{\pi}\int_{a_t}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} \tilde{\tilde{\phi}}_1(t')}{(t'-t_1)(t'-t)}\,dt' + \tilde{\tilde{\phi}}_1(t_1)\right] \tag{5.2}$$

$$+ \frac{\tilde{\tilde{D}}_2(u)}{u-u_0} \exp\left[\frac{1}{\pi}\int_{a_u}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} g_2(u')}{u'-u}\,du' + \frac{u-u_1}{\pi}\int_{a_u}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} \tilde{\tilde{\phi}}_2(u')}{(u'-u_1)(u'-u)}\,du' + \tilde{\tilde{\phi}}_2(u_1)\right].$$

В (5.2) $\tilde{\tilde{D}}_1(t)$, $\operatorname{Im} g_1(t')$, $\operatorname{Im} \tilde{\tilde{\phi}}_1(t')$ и $\tilde{\tilde{D}}_2(u)$, $\operatorname{Im} g_2(u')$ $\operatorname{Im} \tilde{\tilde{\phi}}_2(u')$ имеют тот же смысл относительно $\Phi_1(s,t)$ и $\Phi_2(s,u)$, что $\tilde{\tilde{B}}(t)$, $\operatorname{Im}\tilde{\tilde{\phi}}(t')$ имеет относительно $G(t)$ в формуле (3.5).

В дальнейшем формулу (5.2) мы будем применять для p-p -рассеяния и поэтому приспособим ее для этого процесса. Известно, что амплитуда pp -рассеяния симметрична относительно t и u (см., например, в работе /8/ формулу (4.6)). Поэтому в (5.2)

$$a_t = a_u = 4m^2, \qquad u_0 = t_0 = m^2, \qquad u_1 = t_1, \qquad A = B = g^2$$

$$\tilde{\tilde{\phi}}_1(t_1) = \tilde{\tilde{\phi}}_2(u_1), \qquad D_1(t) \underset{t\to u}{\to} D_2(u), \qquad \operatorname{Im} g_1(t') \underset{t'\to u'}{\to} \operatorname{Im} g_2(u')$$

$$\operatorname{Im} \tilde{\tilde{\phi}}_1(t') \underset{t'\to u'}{\to} \operatorname{Im} \tilde{\tilde{\phi}}_2(u')$$

и, следовательно,

$$T(s,t,u) = \frac{\tilde{D}(t)}{t-m^2}\exp\left[\frac{1}{\pi}\int\limits_{4m^2}^{\infty}\frac{\operatorname{Im} g(t')}{t'-t}\,dt' + \frac{t-t_1}{\pi}\int\limits_{4m^2}^{\infty}\frac{\operatorname{Im}\tilde{\phi}(t')\,dt'}{(t'-t_1)(t'-t)} + \tilde{\phi}(t_1)\right] \tag{5.3}$$

$$+ \frac{\tilde{D}(u)}{u-m^2}\exp\left[\frac{1}{\pi}\int\limits_{4m^2}^{\infty}\frac{\operatorname{Im} g(u')}{u'-u}\,du' + \frac{u-u_1}{\pi}\int\limits_{4m^2}^{\infty}\frac{\operatorname{Im}\tilde{\phi}(u')\,du'}{(u'-u_1)(u'-u)} + \tilde{\phi}(u_1)\right].$$

В переменных ζ и ξ, аналогично формуле (4.9), $T(s,t,u)$ можно представить в виде:

$$\tilde{T}(s,\zeta,\xi) = \frac{D(\zeta)}{t(\zeta)-m^2}\exp\left[\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} d_n\zeta^n}{(1+\zeta)^{\alpha}}\right] + \frac{D(\xi)}{u(\xi)-m^2}\exp\left[\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} d_n\xi^n}{(1+\xi)^{\beta}}\right]. \tag{5.4}$$

$$\alpha = \beta$$

Отметим, что для процессов, амплитуда которых несимметрична относительно замены t на u, коэффициенты разложения перед ζ^n и ξ^n, а также α и β, вообще говоря, неодинаковы.

§ 6. Аппроксимация экспериментальных данных и мнимая часть формфактора протона

В этом параграфе методом экстраполяции экспериментальных данных мы определим мнимую часть формфакторов $G_E(t)$ и $G_M(t)$, которая возникает у них во времени-подобной области по передаваемому импульсу. Для этой цели мы применяем представление (2.3) без функции Бляшке. Последнее предположение оправдывается тем, что $e^{\phi(\zeta)}$ хорошо описывает экспериментальные данные.

Наряду с экспериментальными данными /9/ для электрического $G_E(t)$ и магнитного $G_M(t)$ формфакторов учитывается следующая дополнительная информация:

a) $G_E(0) = 1$, $\quad G_M(0) = 2{,}793$,

b) $G_E(4M^2) = G_M(4M^2)$, где M – масса протона

c) $G_E(-\infty) = G_M(-\infty) = 0$.

Пусть

$$G_E(t) = \exp\left[\frac{d\zeta}{1+\zeta} + \sum_n d_n\zeta^n\right], \qquad G_M(t) = \exp\left[\frac{b\zeta}{1+\zeta} + \sum_n b_n\zeta^n\right]. \tag{6.1}$$

Таблица I. Экспериментальные и вычисленные значения для $G_E(t)$ и $G_M(t)$

$-t$ F^{-2}	$G_E(t)$ эксп	$\sigma(G_E)$	$G_M(t)$ эксп	$\sigma(G_M)$	$G_E(t)$ выч. с дв.пар.	$\sigma(G_E)$ выч.	$G_E(t)$ выч. с тр.пар.	$\sigma(G_E)$ выч.	$G_M(t)$ выч. с дв.пар	$\sigma(G_M)$ выч.	$G_M(t)$ выч. с тр.пар	$\sigma(G_M)$ выч.
0,30	0,970	0,004			0,976	0,0006	0,965	0,00I0				
0,49	0,922	0,009			0,96I	0,0009	0,944	0,00I5				
0,60	0,940	0,006			0,953	0,00I0	0,932	0,00I7				
I,00	0,885	0,005	2,508	0,038	0,924	0,00I5	0,89I	0,0023	2,352	0,0038	2,5I8	0,0084
I,05	0,885	0,009			0,92I	0,00I5	0,886	0,0027				
I,60	0,850	0,0I0	2,394	0,025	0,884	0,00I9	0,836	0,0027	2,I59	0,0047	2,359	0,0095
2,00	0,784	0,0I2	2,234	0,034	0,858	0,002I	0,802	0,0029	2,050	0,005I	2,259	0,0096
2,20	0,790	0,006			0,846	0,0022	0,786	0,0029				
2,98	0,725	0,02I	2,035	0,0I6	0,802	0,0024	0,729	0,0032	I,829	0,0054	2,039	0,0090
4,00	0,696	0,032			0,750	0,0024	0,665	0,0035				
4,60	0,628	0,0I3	I,73I	0,025	0,723	0,0024	0,632	0,0037	I,558	0,0052	I,742	0,0077
6,00	0,570	0,0I9	I,47I	0,03I	0,665	0,0023	0,565	0,0039	I,382	0,0049	I,537	0,0069
7,0	0,539	0,02I	I,383	0,028	0,628	0,0023	0,524	0,004I	I,279	0,0046	I,4I5	0,0065
7,50	0,520	0,020	I,335	0,025	0,6II	0,0022	0,506	0,004I	I,233	0,0045	I,359	0,0063
8,00	0,462	0,0I6	I,308	0,020	0,594	0,0028	0,488	0,004I	I,I90	0,0044	I,308	0,0062
9,00	0,427	0,02I	I,240	0,022	0,564	0,002I	0,456	0,004I	I,III	0,0042	I,2I3	0,0059
I0,00	0,4I7	0,020	I,I30	0,022	0,536	0,002I	0,428	0,004I	I,042	0,0040	I,I29	0,0056
II,00	0,409	0,020	I,075	0,020	0,5I0	0,002I	0,402	0,0040	0,980	0,0040	I,055	0,0054
I2,00	0,389	0,02I	0,975	0,022	0,486	0,002I	0,378	0,0040	0,924	0,0039	0,988	0,0052
I3,00	0,374	0,037	0,9I3	0,039	0,464	0,002I	0,357	0,0039	0,873	0,0039	0,928	0,0050
I4,00	0,350	0,029	0,887	0,025	0,444	0,002I	0,358	0,0039	0,828	0,0039	0,873	0,0048
I5,00	0,326	0,055	0,83I	0,048	0,424	0,002I	0,320	0,0037	0,786	0,0039	0,823	0,0047
I6,00	0,285	0,02I	0,795	0,0I4	0,407	0,0022	0,303	0,0036	0,747	0,0039	0,778	0,0046
I7,00	0,260	0,032	0,775	0,020	0,390	0,0022	0,288	0,0035	0,7I2	0,0040	0,737	0,0045
I8,00	0,30I	0,020	0,704	0,0I4	0,374	0,0023	0,274	0,0034	0,679	0,0040	0,699	0,0044
I9,00	0,274	0,032	0,69I	0,0I7	0,359	0,0023	0,26I	0,0033	0,648	0,004I	0,664	0,0044
20,00	0,203	0,072	0,673	0,03I	0,345	0,0023	0,249	0,0032	0,620	0,004I	0,63I	0,0043
22,00	0,I55	0,075	0,633	0,020	0,320	0,0024	0,227	0,003I	0,569	0,0042	0,573	0,0044
25,00			0,447	0,0I6					0,504	0,0044	0,50I	0,0045
30,00	0,I64	0,050	0,382	0,0I4	0,24I	0,0024	0,I63	0,0027	0,4I8	0,0045	0,407	0,0049
35,00			0,3I4	0,0I2					0,353	0,0045	0,338	0,0052
40,00			0,232	0,0I8					0,30I	0,0045	0,284	0,0055
45,00	0,I24	0,040	0,238	0,022	0,I52	0,0026	0,097	0,0025	0,259	0,0044	0,242	0,0057
75,00	0,035	0,035	0,I3I	0,0I4	0,072	0,0020	0,042	0,002I	0,0I23	0,0035	0,I09	0,0055
I00,0	0,032	0,032	0,098	0,0I2	0,043	0,00I6	0,024	0,00I7	0,0074	0,0027	0,065	0,0046
I25,0	0,040	0,040	0,040	0,020	0,027	0,00I2	0,0I5	0,00I4	0,047	0,002I	0,04I	0,0038
I75,0	0,040	0,050	0,030	0,0I5	0,0I2	0,00I2	0,006	0,008	0,022	0,00I2	0,0I9	0,0025

Так как образом точки $t=0$ является точка $\zeta=0$, то в соответствии с условием (а) в $G_E(t)$ сумма по n начинается от $n=1$, а в $G_M(t)$ от $n=0$, причем $\exp[b_o]$ =2,793. Автоматически удовлетворяется условие с), если только

$$d>0\,,\quad b>0\,,\qquad \lim_{\zeta\to-1}\ (\sum_n dn\,\zeta^n)\to \mathrm{const}\qquad и \qquad \lim_{\zeta\to-1}\ (\sum bn\,\zeta^n)\to \mathrm{const}\,,$$

а условие в) эквивалентно

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\ln G_E(4M^2) &= \mathrm{Re}\ln G_M(4M^2) \\ \mathrm{Im}\ln G_E(4M^2) &= \mathrm{Im}\ln G_M(4M^2) + 2k\pi\,, \end{aligned} \tag{6.2}$$

где k целое. Экспериментальные данные для $G_E(t)$ и $G_M(t)$ подгонялись совместно с условием (6.2) и во всех случаях минимум χ^2 находится при $k=0$. В таблице 1 даны экспериментальные и вычисленные значения $G_E(t)$ и $G_M(t)$, параметры аппроксимации для которых приведены в таблице II.

Т а б л и ц а II

Коэффициенты экстраполяции

Электрический формфактор $G_E(t)$			Магнитный формфактор $G_M(t)$	χ^2
d	I.I479 ± 0.0205	b	I.0543 ± 0.0205	I274
d_1	-0.4960 ±0.0370	b_1	-0.5287 ± 0.0308	
d	I.I659 ± 0.06I08	b	0.9725 ± 0.06I8	
d_1	-0.2I09 ± 0.0597	b_1	-0.2248 ± 0.0534	94
d_2	-0.5275 ± 0.2I2I	b_2	-I.6704 ±0.2254	
d	I.0444 ± 0.I953	b	0.8378 ± 0.2006	
d_1	-0.0625 ± 0.2359	b_1	-0.0086 ± 0.2802	
d_2	-0.3970 ± 0.3532	b_2	-I.2809 ± 0.5242	93
d_3	0.7800 ± I.I46I	b_3	0.9935 ± I.2800	

Как видно из таблицы I и II, имеется удовлетворительное согласие, когда число параметров в $G_E(t)$ и $G_M(t)$ равно трем. Аналогичная программа была выполнена в работе /10/. Экспериментальные данные аппроксимировались полиномом и было показано, что согласие достигается, когда число параметров равно 6.

Таким образом, мы получили приближенные выражения для формфакторов $G_E(t)$ и $G_M(t)$ пространственно-подобной области. Если эти выражения продолжить во времени-подобной области, то для функции $G_E(t)$ и $G_M(t)$ будем иметь:

$$G_E(t) = \exp\left[\left(\frac{d}{2} + d_1\cos\beta + d_2\cos 2\beta\right) + i\left(\frac{d}{2}\,\mathrm{tg}\frac{\beta}{2} + d_1\sin\beta + d_2\sin 2\beta\right)\right],$$

$$G_M(t) = \exp\left[\left(\frac{b}{2} + b_0 + b_1\cos\beta + b_2\cos 2\beta\right) + i\left(\frac{b}{2}\,\mathrm{tg}\frac{\beta}{2} + b_1\sin\beta + b_2\sin 2\beta\right)\right], \qquad (6.3)$$

где

$$\mathrm{tg}\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{t-a}{a}}; \qquad \cos\beta = \frac{2a-t}{t} \qquad \sin\beta = \frac{2\sqrt{a(t-a)}}{t}.$$

Подставляя эти выражения в дифференциальное сечение /11/ реакции $p + \tilde{\tilde{p}} \to e^- + e^+$

$$\frac{d\sigma}{d(\cos\theta)} = \frac{\pi\alpha^2}{2\sqrt{t(t-4M^2)}}\left[|G_M(t)|^2(1+\cos^2\theta) + \frac{4M^2}{t}|G_E(t)|^2(1-\cos^2\theta)\right],$$

получим

$$\frac{d\sigma}{d(\cos\theta)} = \frac{\pi\alpha^2}{2\sqrt{t(t-4M^2)}}\left[(1+\cos^2\theta)\exp\left(-0{,}7506 + 103{,}3088\frac{m_\pi^2}{t} - 414{,}2592\frac{m_\pi^4}{t}\right) + \right. \qquad (6.4)$$

$$\left. + \frac{4M^2}{t}(1-\cos^2\theta)\exp\left(0{,}5327 + 30{,}385\frac{m_\pi^2}{t} - 135{,}04\frac{m_\pi^4}{t^2}\right)\right].$$

Последняя формула показывает, что как дифференциальное, так и полное сечение при $t \to +\infty$ стремятся к нулю по закону t^{-1}. Отношение

$$\frac{\sigma(p\tilde{\tilde{p}} \to e^-e^+)}{\sigma_0(p\tilde{\tilde{p}} \to e^-e^+)} \Big\{ = \frac{|G_M(t)|^2 + \frac{2M^2}{t}|G_E(t)|^2}{(1+\mu_p)^2 + \frac{2M^2}{t}\left(1+\frac{t}{4M^2}\mu_p\right)^2}$$

при $t \to +\infty$ также стремится к нулю. Здесь $\mu_p = 1{,}79$ – аномальный магнитный момент протона, а σ_0 – полное сечение процесса $\tilde{\tilde{p}} + p \to e^+ + e^-$, когда протон считается точечным. Для полного сечения реакции $p + \tilde{\tilde{p}} \to e^+ + e^-$, а также для отношения σ/σ_0 имеем следующее значение (см. таблицу III), что находится (для $t = 6{,}8$) в удовлетворительном согласии с экспериментальными данными, приведенными в докладе /12/.

Отметим, что $\mathrm{Im}\, G_E(t)$ и $\mathrm{Im}\, G_M(t)$, как это видно из (6.3) и таблицы IV, осциллируют (см. рис. 1). Эти осцилляции можно обнаружить, если измерить поляризацию в реакциях $p + \tilde{\tilde{p}} \to e^+(\mu^+) + e^-(\mu^-)$ в широком интервале энергии.

§ 7. p – p рассеяние при больших энергиях

Экспериментальными данными /13/ для p-p рассеяния по энергии мы располагаем до 30 Гэв (таблица V). Как видно из таблицы V, квадрат передаваемого импульса t при фиксированном $s=2M^2+2Mp_0$, где p_0 – энергия падающего прото-

Таблица III

$t\,(Bev)^2$	$\lvert G_M(t)\rvert^2$	$\lvert G_E(t)\rvert^2$	$\sigma(t)\cdot 10^{33}$	$\frac{\sigma(t)}{\sigma_0(t)}$
4,0	0,7835	I,9778	I04	0,I5
4,5	0,740I	I,9445	66	0,I26
5,0	0,7075	I,9I94	46,6	0,II4
5,5	0,68I8	I,8984	33,9	0,I05
6,0	0,66I7	I,88I4	28,2	0,097
6,5	0,6447	I,8664	22,55	0,09
6,8	0,63699	I,8608	20,69	0,087
7,0	0,6307	I,8552	I8,I	0,085
7,5	0,6I82	I,844I	I6,7	0,0804
8,0	0,6077	I,8349	I4,8	0,076
8,5	0,5993	I,8276	I2	0,072
9,0	0,5909	I,8203	II,68	0,068
9,5	0,5845	I,8I30	I0,67	0,066
I0,0	0,578I	I,8076	9,83	0,063
I0,5	0,5723	I,8022	8,82	0,06I
II,0	0,5678	I,7986	8,I57	0,0588
II,5	0,5627	I,7932	7,45	0,0567
I2,0	0,5588	I,7896	6,98	0,055
I2,5	0,5549	I,7860	6,576	0,0532
I3,0	0,552I	I,7825	6,097	0,05I7
I3;5	0,5483	I,7807	5,8I7	0,050
I4,0	0,5472	I,777I	5,5	0,0488
I4,5	0,5428	I,775I	5,22	0,047
I5,0	0,540I	I,77I8	4,9	0,046

Таблица IV

$t\ F^{-2}$	$\mathrm{Im}\ G_E(t)$	$\mathrm{Im}\ G_M(t)$	$t\ F^{-2}$	$\mathrm{Im}\ G_E(t)$	$\mathrm{Im}\ G_M(t)$	$t\ F^{-2}$	$\mathrm{Im}\ G_E(t)$	$\mathrm{Im}\ G_M(t)$
2,0	0	0	II,4	2,2286	3,9084	2I0	-0,2397	-0,8072
2,2	-0,5293	-2,I45I	II,6	2,2I08	3,7223	220	-0,0545	-0,7047
2,4	-0,674I	-4,7037	II,8	2,I93I	3,5477	230	0,I27I	-0,5979
2,6	-0,6602	-8,0475	I2,0	2,I753	3,3838	240	0,3022	-0,4879
2,8	-0,52I8	-I I,0I35	I2,I	2,I576	3,2298	250	0,4684	-0,3759
3,0	-0,2968	-I2,273I	I2,4	2,I400	3,0849	260	0,6234	-0,263I
3,2	-0,02I7	-II,20I5	I2,6	2,I225	2,9485	270	0,7656	-0,I506
3,4	0,2738	- 8,0388	I2,8	2,I05I	2,8200	280	0,8934	-0,039I
3,6	0,568I	- 3,5398	I3,0	2,0877	2,6988	290	I,0059	0,0703
3,8	0,8474	I,4470	I3,2	2,0705	2,5843	300	I,I022	0,I769
4,0	I,I036	6,2399	I3,4	2,0533	2,476I	3I0	I,I8I9	0,280I
4,2	I,3332	I0,4089	I3,6	2,0363	2,3738	320	I,2447	0,3790
4,4	I,5352	I3,7534	I3,8	2,0I94	2,2769	330	I,2906	0,4733
4,6	I,7I04	I6,238I	I4,0	2,0027	2,I850	340	I,3I97	0,5623
4,8	I,8606	I7,9278	I5,0	I,9206	I,7908	350	I,3326	0,6456
5,0	I,9882	I8,936I	I6,0	I,84I6	I,48I5	355	I,3330	0,685I
5,2	2,0956	I9,39I8	I7,0	I,7654	I,2340	360	I,3300	0,7280
5,4	2,I85I	I9,4I86	I8,0	I,69I9	I,032I	370	I,3II5	0,7940
5,6	2,2590	I9,I260	I9,0	I,6208	0,8647	380	I,2792	0,8585
5,8	2,3I95	I8,6052	20,0	I,55I9	0,7236	390	I,2334	0,9I63
6,0	2,3682	I7,9295	25,0	I,2328	0,2534	400	I,I753	0,9672
6,2	2,4069	I7,I560	30,0	0,9444	-0,0242	420	I,026I	I,048I
6,4	2,4370	I6,3279	35,0	0,6779	-0,220I	440	0,8406	I,I0I3
6,6	2,4598	I5,4773	40,0	0,4294	-0,3740	460	0,6282	I,I272
6,8	2,4762	I4,6273	45,0	0,I975	-0,5025	470	0,5I48	I,I302
7,0	2,4872	I3,794I	50,0	- 0,08I8	-0,6I38	480	0,398I	I,I269
7,2	2,4936	I2,9887	55,0	-0,2I78	-0,7I20	500	0,I592	I,I02I
7,4	2,496I	I2,I282	60,0	-0,40II	-0,7997	5I0	0,0392	I,08I0
7,6	2,4952	II,4868	65,0	-0,568I	-0,8783	520	-0,07I0	I,0545
7,8	2,49I5	I0,7964	70,0	-0,7I83	-0,9488	540	-0,3I20	0,9866
8,0	2,4854	I0,I476	75,0	-0,8532	-I,0II7	520	-0,5300	0,9005
8,2	2,4773	9 ,5399	80,0	-0,97I5	-I,0675	580	-0,7285	0,7990
8,4	2,4674	8 ,97I9	85,0	-I,074I	-I,II67	600	-0,9027	0,6846
8,6	2,4560	8 ,4422	90,0	-I,I6II	-I,I594	620	-I,049I	0,5600
8,8	2,4434	7,9486	95,0	-I,2332	-I,I959	640	-I,I65I	0,4279
9,0	2,4298	7,4890	I00,0	-I,2908	-I,2265	620	-I,249I	0,2907
9,2	2,4I53	7,06I3	II0,0	-I,3649	-I,2707	680	-I,300	0,I509
9,4	2,400I	6,6634	I20,0	-I,3883	-I,2937	780	-I,3I92	0,0I09
9,6	2,3843	6,293I	I25,0	-I,3827	-I,2977		-I,3I89	0,0I09
9,8	2,3679	5,9484	I30,0	-I,3665	-I,2970	720	-I,3064	-0,I270
I0,0	2, 35I2	5,6274	I40	-I,3054	-I,2822	740	-I,2636	-0,26II
I0,2	2,3342	5,3283	I50	-I,2I08	-I,25I0	760	-I,I93I	-0,3893
I0,4	2,3I69	5,0495	I60	-I,0882	-I,2049	780	-I,0974	-0,5I02
I0,6	2,2995	4,7893	I70	-0,9433	-I,I456	800	-0,9795	0,6222
I0,8	2,28I9	4,5465	I80	-0,87I2	-I,0746			
II,0	2,2642	4,3I95	I90	-0,6070	-0,9936			
II,2	2,2464	4,I072	200	-0,4255	-0,9039			

на в лабораторной системе, меняется в довольно широком интервале, что соответствует измерению угла рассеяния от 0 до 90°.

Для того, чтобы путем сравнения с экспериментальными данными определить коэффициенты d_n в (5.4), введем нормированное диффереинальное сечение в виде:

$$X = \frac{(d\sigma / d\Omega)}{(d\sigma / d\Omega)_{\theta=0}} = \frac{(d\sigma / dt)}{(d\sigma / dt)_{t=0}} = \frac{|T|^2}{|T|^2_{t=0}} . \tag{7.1}$$

Пусть $|t|$ мало ($s \gg |t|$) , тогда $u = -s - t + 4M^2$ – большое отрицательное число и поэтому $\xi \approx -1$. Ввиду того, что в формуле (5.4) коэффициенты разложения dn перед ζ^n и ξ^n одинаковы, член $\frac{D(\xi)}{u(\xi)-m^2} \exp\left[\frac{\sum_{n=0} d_n \xi^n}{(1+\xi)^{\alpha}}\right]$ будет экспоненциально мал по сравнению с членом $\frac{D(\zeta)}{t(\zeta) - m^2} \exp\left[(1+\zeta)^{-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} d_n \zeta^n\right]$, если только $\left(\frac{\sum dn\, x^n}{(1+x)^{\alpha}}\right)$ уменьшается, когда x изменяется от 0 до –1. Поэтому, когда $|t| = 0$ хорошим приближением для $|T|^2_{t=0}$ будет выражение $m^{-4} \exp[2 d_0]$. Далее, если под знаком экспоненты[x)] в (5.4) выделить члены $\zeta/1+\zeta$ и $\xi/1+\xi$, обозначив через Ai переопределенные коэффициенты, получим для сумм:

$$d_0 + \frac{d_1 - d_0}{1+\zeta}\zeta + \frac{\sum_{n=2}^{\infty} \zeta^n dn}{1+\zeta} = d_0 + \frac{A_0 \zeta}{1+\zeta} + \sum_{n=1}^{\infty} An\, \zeta^n$$

$$d_0 + \frac{d_1 - d_0}{1+\xi}\xi + \frac{\sum_{n=2}^{\infty} \xi^n dn}{1+\xi} = d_0 + \frac{A_0 \xi}{1+\zeta} + \sum_{n=1} An\, \xi^n .$$

Тогда X принимает вид:

$$X = m^4 \left[\frac{e^{\frac{2A_0\zeta}{1+\zeta} + 2\sum_{n=1}^{\infty} An\, \zeta^2}}{(t-m^2)^2} + 2\, \frac{e^{A_0\left(\frac{\zeta}{1+\zeta} + \frac{\xi}{1+\xi}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} An(\xi^n + \zeta^n)}}{(t-m^2)(u-m^2)} + \frac{e^{\frac{2A_0\xi}{1+\xi} + 2\sum_{1=1}^{\infty} A_n \xi^n}}{(u-m^2)^2} \right]. \tag{7.2}$$

Здесь также опущена функция Бляшке.

Когда $|t|$ растет, то ξ увеличивается и становится сравнимой с ζ , которая в это время уменьшается. В окрестности точки $t \approx -\frac{s}{2} + 2M^2$, $\xi \approx \zeta$, и поэтому все слагаемые в правой части (7.2) дают одинаковый вклад, причем эти вклады экспоненциально малы. При дальнейшем увеличении $|t|$ преобладающим в $T(s,t,u)$ становится член $\frac{D(\xi)}{u(\xi)-m^2} \exp\left[\frac{\sum d_n \xi^n}{(1+\xi)}\right]$, который повторяет ход первого слагаемого правой части формулы (5.4) в обратном порядке. Это означает, что кривая, описывающая p-p рассеяние в интервале углов $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$, является зеркальным отражением кривой, описывающей ее при $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

---

x) Предполагается, что $\alpha = 1$.

Таблица У.

$-t$	$\theta_{c.m.}$	$-\ln X$ эксп.	$\sigma(\ln X)$	$-\ln X$ выч. с одн. пар	$\sigma(\ln X)$ выч.	$-\ln X$ выч. с дв. пар.	$\sigma(\ln X)$ выч.	$-\ln X$ выч. с тр. пар.	$\sigma(\ln X)$ выч.
$\bar{P}_0$ =12,6									
0,0II	2,66	0,0952	0,0755	0,9204	0,0007	0,6400	0,008I	0,2582	0,0I96
0,052	5,73	0,0645	0,0645	2,7I68	0,0029	I,6642	0,0352	0,5385	0,0608
0,I2I	8,72	I,I0745	0,0645	4,I988	0,0060	2,3626	0,0533	0,9890	0,083I
0,2I9	II,75	I,83057	0,0645	5,4095	0,0096	2,9495	0,07I6	I,8228	0,0884
0,342	I4,70	2,86I43	0,0645	6,4002	0,0I34	3,5I26	0,0842	2,8784	0,0892
0,524	I7,5	4,5048	0,0645	7,4I33	0,0I8I	4,2I23	0,0939	4,2564	0,0949
I,43	3I,5	9,I232	0,I76I	I0,0637	0,035I	6,82I0	0,0994	8,5855	0,I334
2,I7	34,6	I0,4434	0,I76I	II,3092	0,0450	8,447I	0,0934	I0,6098	0,I4I7
2,28	37,0	I0,7780	0,0969	II,4573	0,0465	8,6656	0,0924	I0,848I	0,I4I5
4,30	5I,5	I3,93II	0,0969	I3,5235	0,0687	I2,0343	0,0802	I3,8307	0,II36
6,00	68,3	I4,93I8	0,0969	I4,5065	0,0855	I4,2279	0,0838	I5,0887	0,0925
7,80	72,I	I6,5030	0,0969	I5,4734	0,0985	I6,2478	0,0986	I6,0889	0,I038
9,90	90,0	I5,5469	0,0969	I5,5058	0,I036	I6,9870	0,II75	I6,I65I	0,II24
I0,00	78,4	I7,2666	0,0969	I6,3093	0,IIII7	I8,2929	0,I252	I6,8524	0,I443
$\bar{P}_0$ =I5,63									
0,0I9	3,02	0,0407	0,07I9	I,4II7	0,00I3	0,9897	0,0I28	0,3800	0,0320
0,086	6,40	0,8200	0,0607	3,5882	0,005I	2,2I67	0,04I6	0,8484	0,0778
0,I95	9,7I	I,8306	0,0607	5,2I23	0,0098	3,0569	0,0656	I,8060	0,0887
0,364	I3,25	3,2665	0,0645	6,6232	0,0I56	3,90I6	0,0833	3,3309	0,0876
0,563	I6,50	5,I269	0,0828	7,6967	0,02II	4,6833	0,090I	4,8560	0,094I
0,783	I9,20	6,4306	0,I76I	8,560I	0,0263	5,4I97	0,0979	6,2274	0,I070
2,80	36,70	II,7636	0,I76I	I2,4I07	0,0580	9,9504	0,0938	I2,4476	0,I550
3,I6	40,80	I2,793I	0,0969	I2,8288	0,0623	I0,5586	0,0922	I3,0507	0,I532
6,00	55,40	I6,4505	0,0969	I5,2095	0,09I7	I4,4557	0,0936	I6,0543	0,II74
I0,00	78,40	I7,2666	0,0969	I6,93I4	0,I245	I8,28I2	0,I302	I7,7339	0,I333
I2,0I	8I,40	I8,586I	0,0969	I7,7077	0,I364	I9,8909	0,I52I	I8,3539	0,I66I
$\bar{P}_0$ =I8,76									
0,036	3,82	0,I39I	0,0864	2,2II2	0,0022	I,783I	0,0204	0,604I	0,0628
0,I34	7,30	I,27I4	0,0792	4,5088	0,0068	3,4537	0,0539	I,4587	0,II23
0,290	I0,7	2,9725	0,0792	6,2265	0,0I23	II,73I6	0,07I8	2,9863	0,II32
0,520	I4,4	4,9852	0,0934	7,6978	0,0259	7,0026	0,0943	6,7I58	0,0927
0,794	I7,8	6,8048	0,I038	8,8660	0,027I	7,4327	0,0928	7,4262	0,0932
0,925	20,0	7,3457	0,I76I	9,3II0	0,02I3	7,5965	0,0932	7,6925	0,0938
0,978	20,2	7,2463	0,I76I	9,4764	0,0300	7,909I	0,0966	8,I930	0,0955
I,084	20,7	8,670I	0,I76I	9,787I	0,03I7	8,I879	0,0939	8,6303	0,0974
I,I84	2I,2	9,76I4	0,I76I	I0,0590	0,032I	8,2473	0,0939	8,7225	0,0979
I,206	2I,3	9,25I3	0,I76I	I0,II63	0,0323	8,2879	0,0939	8,7845	0,09I8
I,22I	2I,4	9,779I	0,I76I	I0,I549	0,0469	I0,5597	0,0905	II,9582	0,II68

2,250	29,9	II,8I30	0,I76I	I2,I964	0,0469	I0,5597	0,0905	II,9582	0,II68
3,860	39,5	I4,0808	0,I76I	I4,2564	0,0644	I3,0993	0,0845	I4,80I5	0,I2I7
4,30	42,8	I4,8458	0,0969	I4,7009	0,0686	I3,680I	0,0839	I5,357I	0,II99
7,80	58,8	I8,2346	0,0969	I7,3824	0,0973	I7,3948	0,0966	I8,2626	0,I060
II,56	70,2	20,4932	0,0969	I9,3393	0,I227	20,3706	0,I300	I9,9I73	0,I398
I4,50	86,0	20,I462	0,0969	I9,9968	0,I379	2I,7502	0,I625	20,3330	0,I700

$\overline{P}_0$ = 2I,73

0,032	3,29	0,2873	0,0828	2,065	0,00I9	I,6II	0,0209	0,574	0,0578
0,I55	7,30	I,74II	0,07I9	4,865	0,0075	3,532	0,062II	I,700	0,II35
0,364	II,I8	3,6848	0,0755	6,879	0,0I42	4,974	0,0893	3,7469	0,I095
0,680	25,30	6,II25	0,0792	8,578	0,02I7	6,370	0,I044	6,I76	0,I052
I,055	I9,0	8,6I28	0,I27I	9,905	0,0289	7,60I	0,II03	8,267	0,II67
I,474	22,3	I0,5248	0,I76I	II,00I	0,0356	8,7I2	0,III6	I0,003	0,I320
I,590	22,6	I0,8588	0,I76I	II,262	0,0372	8,987	0,III5	I0,409	0,I356
4,9I0	4I,8	I5,9I78	0,I76I	I5,773	0,072I	I4,364	0,0972	I6,584	0,I53I
6,00	42,2	I7,5465	0,0969	I6,730	0,0808	I5,626	0,0957	I7,657	0,I440
I0,00	62,I	20,0226	0,0969	I9,4I2	0,I087	I9,373	0,I08I	20,22I	0,II7I
I3,94	73,I	22,3077	0,II39	2I,297	0,I323	22,240	0,I373	2I,660	0,I47I
I9,65	90,0	22,0045	0,II39	22,5I5	0,I534	24,469	0,I804	22,399	0,20I0

$\overline{P}_0$ =26

0,064	4,2I	0,4303	0,0864	3,I7I	0,0035	2,4I0	0,0385	0,767	0,I0II
0,268	8,60	2,5482	0,0828	6,228	0,0I06	4,540	0,0856	2,62I	0,I39I
0,526	I2,88	5,4429	0,0864	8,395	0,0I86	6,270	0,I085	5,297	0,I2I8
I,042	I7,03	8,2848	0,I072	I0,I43	0,0268	7,88I	0,II69	7,883	0,II6I
2,07I	24,2	II,96I6	0,I76I	I2,629	0,0408	I0,494	0,II48	II,609	0,I300
2,68	26,6	I3,395	0,I76I	I3,68I	0,0475	II,698	0,II03	I3,I05	0,I354
3,80	33,8	I4,7253	0,0969	I5,230	0,0582	I3,563	0,I020	I5,I80	0,I372
7,80	49,I	I9,5045	0,0969	I8,983	0,0872	I8,425	0,0920	I9,563	0,II32
I0,00	52,0	2I,543	0,II39	20,498	0,0999	20,492	0,I006	2I,I09	0,I064
I2,46	65,0	2I,899	0,II39	2I,907	0,II39	22,5II	0,II76	22,4I5	0,II83
I5,06	68,I	23,I	0,II39	23,24I	0,I264	24,4I9	0,I39I	23,594	0,I479
I8,77	77,9	24,7878	0,I303	24,704	0,I446	26,758	0,I754	24,738	0,2097

Коэффициенты аппроксимации и χ^2 при среднем значении $\bar{p}_o$ =12,6 Гэв, $\bar{p}_o$ =15,63 Гэв, $\bar{p}_o$=18,76 Гэв, $\bar{p}_o$=21,73 Гэв, $\bar{p}_o$ =26 Гэв приведены в таблице VI . Полученные результаты по p-p рассеянию не очень хороши, что объясняется скудностью экспериментальных данных. Приемлемым по χ^2 является выражение (7.1), с тремя параметрами, но тем не менее коэффициенты аппроксимации и для этого случая неудовлетворительны, так как они определены с большими ошибками.

Заметим следующий любопытный факт: коэффициент A_o при $\zeta/1+\zeta$ и $\xi/1+\xi$ заметно меняется (возрастает) при увеличении p_o , в то время как остальные коэффициенты, т.е. A_1 и A_2 в пределах ошибок постоянны. Если тенденция роста A_o сохранится при дальнейшем увеличении p_o , то можно думать, что при больших отрицательных t между формфакторами нуклона и амплитудой p-p рассеяния появится простая связь вида[17]:

$$\frac{\ln G(t)}{\ln\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)(90°, pp\to pp)} \to ¼ . \qquad (7.3)$$

Однако такое заключение нам кажется пока преждевременным, так как при измеряемых в настоящее время энергиях и передаваемых импульсах соотношение (7.3) не выполняется. Действительно, коэффициент при $\zeta/1+\zeta$ в $T(s,t,u)$ равен $0{,}34065\mp0{,}058715$, а в $G(t)$ (см. таблицу II) $1{,}1659\mp0{,}06108$.

Наконец, отметим, что при больших отрицательных $t, \zeta/1+\zeta = \frac{\sqrt{-t}}{2\sqrt{a}} = \frac{-k}{2\sqrt{a}}[2(1-\cos\theta)]^{½}$ (k - импульс, а θ - угол рассеяния в системе ц.м.) и когда θ невелико, получается формула Орира[14].

§ 8. Заключение

В последнее время во многих работах обсуждается вопрос об экспоненциальном убывании амплитуды. Так, например, в работах[15,16] предполагается статистический механизм описания p-p рассеяния при высоких энергиях и получено экспоненциальное убывание амплитуды p-p рассеяния при больших углах, причем учитывались статистические эффекты. Согласно этой модели, когда сталкиваются частицы, возможно (основное допущение) образование "составной" системы, которая некоторое время находится в "термическом" равновесии. В дальнейшем происходит нарушение равновесия и составная система распадается. Вероятность обнаружения частиц в заданном угле существенно зависит от числа состояний составной системы, определение которой и составляет главную трудность. В работе[15] оценивалось это число и было показано,

Таблица УI

№		Коэффициенты аппроксимации	χ^2
$\bar{p}_0 = 12,6$	A_0	0,4347 ± 0,0I0I	I696
	A_0	I,4487 ± 0,03I6	488
	A_1	-5,32I8 ± 0,I54I	
	A_0	-0,I035 ± 0,0785	
	A_1	-I0,075I ± 0,2702	I9,6
	A_2	-I6,4508 ± 0,7766	
$\bar{p}_0 = 15,63$	A_0	0,49II ± 0,0II33	I565
	A_0	I,3683 ± 0,0292	46I
	A_1	-4,8204 ± 0,I456	
	A_0	-0,0705 ± 0,0740	
	A_1	-9,8I87 ± 0,28I4	I7,7
	A_2	-I6,5070 ± 0,7979	
	A_0	0,6055 ± 0,0I05	883
$p = 18,76$	A_0	I,II60 ± 0,0266	
	A_1	- 2,8363 ± 0,I345	435
	A_0	0,03243 ± 0,05972	
	A_1	-9,4I27 ± 0,3579	34
	A_2	-I6,0739 ± 0,8III	
$\bar{p}_0 = 21,73$	A_0	0,6768 ± 0,0I03	85I
	A_0	I,I8699 ± 0,02594	38I
	A_1	-3,I989 ± 0,I4820	
	A_0	0,0987 ± 0,06I8	
	A_1	-9,4709 ± 0,3580	9,9
	A_2	-I6,205I ± 0,844I	
$\bar{p}_0 = 26$	A_0	0,7767 ± 0,0096	7I8
	A_0	I,2899 ± 0,0277	323
	A_1	-3,I7I8 ± 0,I598	
	A_0	0,34066 ± 0,0587	
	A_1	-9,8930 ± 0,4I49	I6,78
	A_2	I5,460I ± 0,8720	

что теоретический результат находится в хорошем согласии с экспериментальными данными. Аналогичный механизм рассматривался в работе [16], только для определения числа состояний составной системы (системы фермионного и бозонного газа, находящегося в равновессии) применялся термодинамический метод. При таком описании появляется характерный экспоненциальный фактор $\exp\left[\frac{-E}{T}\right]$, где $T \sim E^{1/4}$, который и обеспечивает быстрое убывание сечения.

Статистическое описание процессов при больших t используется также в работе Ву и Янга [17], в которой установлено асимптотическое соотношение между дифференциальными сечениями разных процессов, экспериментальное подтверждение которых было бы хорошим признаком в пользу статистического механизма. Экспоненциальное убывание амплитуды можно получить, если использовать квазипотенциальный подход в теории поля [18]. Действительно, в работе [18] было показано, что проблему рассеяния в теории поля можно описать уравнением типа Шредингера с некоторым комплексным квазипотенциалом. Тогда при высоких энергиях и на большие углы процесс рассеяния должен иметь характер надбарьерного отражения на квазипотенциале, а амплитуда такого процесса экспоненциально мала. Такая возможность описания процессов рассеяния при больших энергиях предлагается в [19].

Литература

1. Н.Н. Боголюбов, Б.В. Медведев, М.К. Поливанов. Вопросы теории дисперсионных соотношений. Госиздат физ.-мат. литературы, Москва, 1958 г.
2. Н.Н. Мейман. ЖЭТФ, 47, 1966 (1964).
   Вопросы физики элементарных частиц 3, Ереван, 1963 г.
3. a) M. Sugawara, A. Tabis, Phys. Rev. 130, 2127 (1963); Phys. Rev. Lett. 9, 355 (1962). T. Kanki. Nuovo Cim. 34, 1805 (1964).
4. И.И. Привалов. Граничные свойства аналитических функций, Москва, Гостехиздат, 1950.
   Ж. Валирон. Аналитические функции. Госиздат технико-теор. лит. Москва, 1957 г.
5. В.И. Смирнов. Sur Lles valeurs limites des fonctions requlieres a linterieur du ' e cercle.
   Журнал Ленинград. физ.мат. общества, 2; 2, 1928.
6. И.И. Мейман. Успехи мат. наук т. 18, вып. 4 (112), 108 (1963).
7. H. Lanz, and G.A. Prosperi. Nuovo Cim, 33, 201 (1964).
8. M. Cini and S. Fubini. Ann. of Phys. 3, 352-389 (1960).
9. a) B. Dudelzak, G. Sauvage and P. Lehman. Nuovo Cim. 28, 18, (1963).
   b) J. Drickey and L.N. Hand. Phys. Rev. Lett. 9, 521 (1963).
   c) P. Lehman, K. Taylor and R. Wilson. Phys. Rev. 126, 1183 (1962).
   d) T. L Janssens, R. Hofstadter, E.B. Hughes and M.K. Yearian. Preprint
   e) L.K. Dunning et al. Phys, Lett. 10, 500 (1963).
   f) R.W. Chen et al. Phys. Rev. Lett. 11, 561 (1963).

10. J.S. Levinger and C.P. Wang. Phys. Rev. 138, B1207 (1965).

11. a) N. Cabibbo and R. Gatto. Nuovo Cim. 20, 185 (1961).
    b) L.N. Hand, D.G. Miller and R. Wilson. Rev. Modern Phys. 35, No 2, 335 (1963).
    c) А.А. Соколов, Б.К. Керимов, Ф.С. Садыхов, Р.Ш. Яхьяев. ДАН СССР, 161, 1317 (1965).

12. N. Ramsey. Доклад на Международной конференции по физике высоких энергий г. Дубна 1964 г.

13. a) A.N. Diddens, E. Lillethum et al. Phys. Rev. Lett. 9, 108 (1962).
    b) A.N. Diddens, E. Lillethum et al. Phys. Rev. Lett. 9, 111 (1962).
    c) G. Cocconi et al. Phys. Rev. Lett. 11, 499 (1963).
    d) W.F. Baker, E.W. L Jenkins et al. Phys. Rev. Lett. 12, 13 (1964).

14. a) J. Orear. Phys. Rev. Lett. 2 12, 112 (1964).

15. a) C. Fost and R. Hagendorn. Nuovo Cim. 27, 208 (1963).
    H.W. Jones. Phys. Lett. 8, 287 (1964).

16. A. Bialas and V.F. Weisskopf. Nuovo Cim. 35, 1211 (1965).

17. T.T. Wu and C.N. Yang. Phys. Rev. 137, B708 (1965).

18. A.A. Logunov and A.N. Tavkhelidse, Nuovo Cim. 29, 380 (1963).

19. S.P. Alliluyev, S.S. Gerstein, A.A. Logunov. Phys. Lett. 18, 195 (1965).

Рукопись поступила в издательский отдел
28 декабря 1965 г.

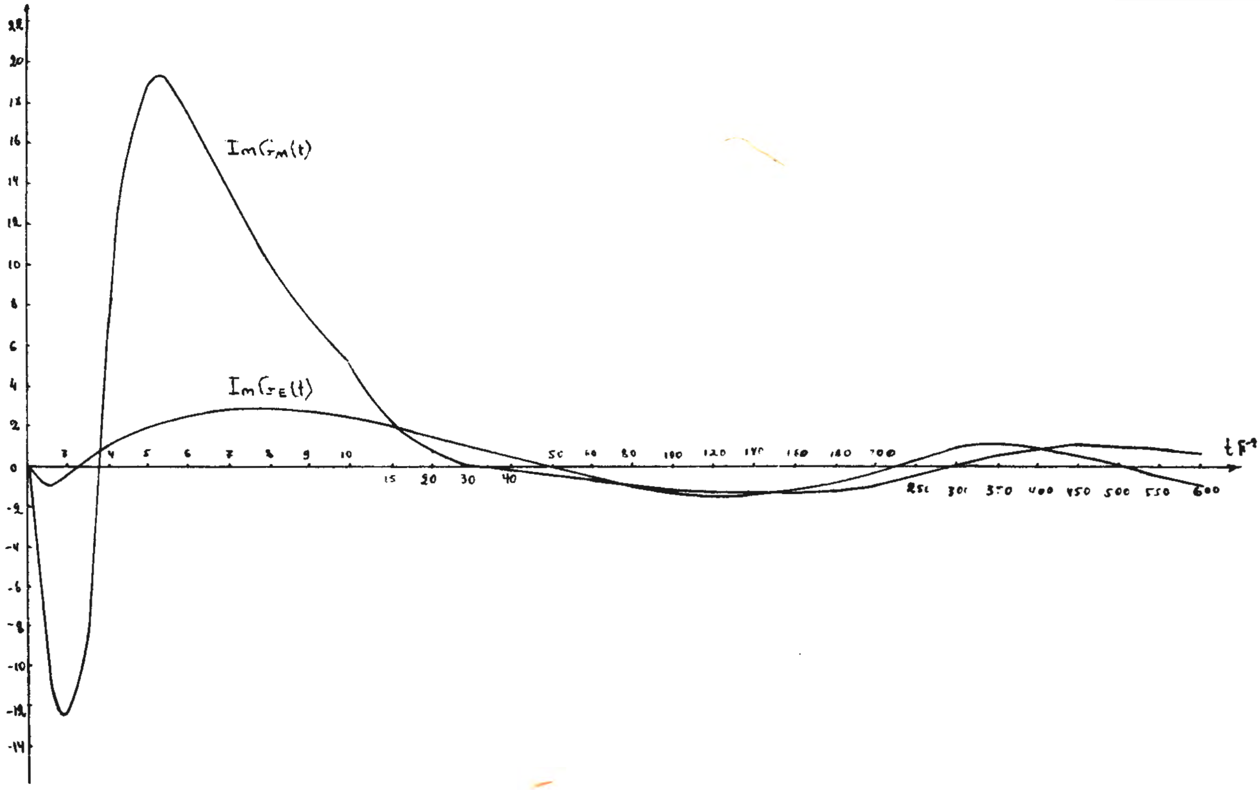

Рис. 1.

28

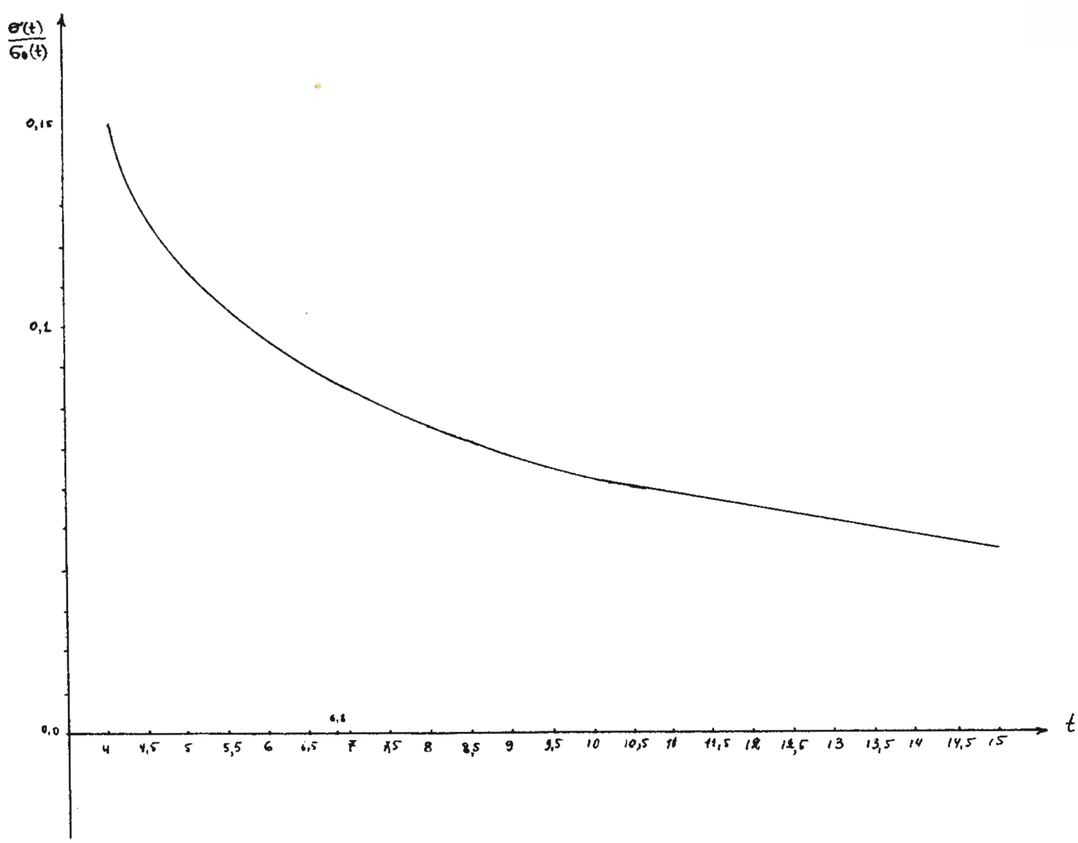

Рис. 2.