

C 3450

5/ii - 667.

A-465

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P-2507



И.А. Александров, В.А. Вагин, В.И. Котов

ВОЛНЫ С КОМПЛЕКСНЫМИ ПОСТОЯННЫМИ
РАСПРОСТРАНЕНИЯ В ДИАФРАГМИРОВАННОМ
ВОЛНОВОДЕ

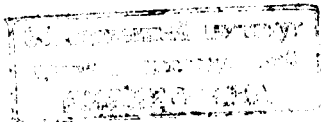
ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

1965

И.А. Александров, В.А. Вагин, В.И. Котов

ВОЛНЫ С КОМПЛЕКСНЫМИ ПОСТОЯННЫМИ
РАСПРОСТРАНЕНИЯ В ДИАФРАГМИРОВАННОМ
ВОЛНОВОДЕ

3931/1 чр



При изучении распространения волн в полупространстве над плоскостью с поверхностным импедансом ^{/1,2/}, в гиротропной плазме ^{/3/} и в некоторых других структурах ^{/4/} было показано, что в определенной полосе частот, несмотря на отсутствие диссипации энергии, возможно существование волн с комплексными постоянными распространения (сокращенно-комплексных волн). В частности, показано, что поток энергии, переносимый такими волнами, всегда равен нулю.

Детальное изучение дисперсионных характеристик комплексных волн затруднено (особенно для закрытых волноводов) в связи с очень сложным математическим описанием их поведения в зависимости от параметров системы. В работе ^{/5/} на простой модели связанных линий передачи подробно рассмотрены свойства комплексных волн и особенности их поведения. В работе ^{/6/} сделана попытка обнаружить комплексные волны для более сложной системы в виде круглого волновода с соосным диэлектрическим стержнем. Однако авторами не получено дисперсионное соотношение комплексных волн, а лишь указаны предполагаемые области их существования.

В настоящей работе детально рассмотрены комплексные волны в широко используемом на практике круглом диафрагмированном волноводе. Известно, что такие волны могут существовать лишь в структурах, в которых распространяющиеся волны несут гибридный (связанный) характер ^{/5/}.

Диафрагмированный волновод с этой точки зрения представляет собой наиболее удобную и простую структуру из всех соосных цилиндрических систем, допускающих гибридные волны. Действительно, в одноволновом приближении при бесконечно тонких диафрагмах он характеризуется лишь одним параметром a/v (отношение радиуса диафрагм a к радиусу волновода v) и, кроме того, поперечное волновое число в области диафрагм всегда действительно ^{/7/}.

В диафрагмированном волноводе существуют все области дисперсии (аномальная, смешанная и положительная), что находит свое отражение в разнообразии поведения и свойств комплексных волн.

Для получения дисперсионного уравнения комплексных волн в дифрагмированном волноводе определим поля в околоосевой области (область I, $0 \leq r \leq a$) и в области дифракта (область II, $a \leq r \leq b$). Для простоты ограничимся одноволновым приближением ($\lambda \gg D$, λ - длина волны, D - период структуры) и случаем тонких дифрактов ($\frac{p}{D} \ll 1$, p - толщина дифракта). Как обычно, возьмем зависимость полей в виде:

$$\vec{E}, \vec{H} = e^{i(\omega t - \kappa z)} e^{-i\nu\theta}, \quad (1)$$

где r, θ, z - цилиндрические координаты, $\kappa = \gamma - j\alpha$ - комплексная постоянная распространения. Для удобства выделения переменных (t, z) и θ введены мнимые единицы j и i в разном обозначении.

Поля выразим через векторы Герца $\vec{\Pi}_e$ (электрический вектор) и $\vec{\Pi}_h$ (магнитный):

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \text{rot rot } \vec{\Pi}_e - j\kappa \text{rot } \vec{\Pi}_h, \\ \vec{H} &= j\kappa \text{rot } \vec{\Pi}_e + \text{rot rot } \vec{\Pi}_h. \end{aligned} \quad (2)$$

Для нахождения полей в области I удобно использовать поперечный вектор \vec{Q} , введенный Ханом^{/8/}:

$$\vec{Q} = \begin{pmatrix} -\frac{j}{k^2} \frac{J_{\nu+1}(k_1 r)}{\gamma_1 J_\nu(k_1 a)} e^{-i\nu\theta} \\ \frac{j}{k^2} \frac{J_{\nu+1}(k_1 r)}{\gamma_1 J_\nu(k_1 a)} e^{-i\nu\theta} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-\kappa z}, \quad (3)$$

где $k_1^2 = k^2 - \kappa^2$; $\gamma_1 = \frac{k_1}{k}$.

Пологая в уравнениях (2) $\vec{\Pi}_h = \vec{Q}$ и $\vec{\Pi}_e = i \vec{Q}$, получим гибридные решения НМ и НЕ соответственно. Поля в области I, отпуская множитель $\exp\{i(\omega t - \kappa z)\}$, представим как сумму этих решений:

$$\vec{E}_I = \left(p + \frac{\kappa}{k} q\right) \frac{J_\nu(k_1 r)}{J_\nu(k_1 a)} e^{-i\nu\theta}, \quad \vec{H}_I = -\left(p \frac{\kappa}{k} + q\right) \frac{J_\nu(k_1 r)}{J_\nu(k_1 a)} e^{-i\nu\theta}$$

$$\begin{aligned} E_r &= j \left\{ p \frac{\kappa}{k} \frac{J_{\nu+1}(k_1 r)}{\gamma_1 J_\nu(k_1 a)} + q \left[\frac{\kappa^2}{k^2} \frac{J_{\nu+1}(k_1 r)}{\gamma_1 J_\nu(k_1 a)} + \frac{\nu}{kr} \frac{J_\nu(k_1 r)}{J_\nu(k_1 a)} \right] \right\} e^{-i\nu\theta} \\ E_\theta &= j \left\{ p \frac{\kappa}{k} \frac{J_{\nu+1}(k_1 r)}{\gamma_1 J_\nu(k_1 a)} + q \left[\frac{J_{\nu+1}(k_1 r)}{\gamma_1 J_\nu(k_1 a)} - \frac{\nu}{kr} \frac{J_\nu(k_1 r)}{J_\nu(k_1 a)} \right] \right\} i e^{-i\nu\theta}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$H_r = -j \left\{ p \left[\frac{\kappa^2}{k^2} \frac{J_{\nu+1}(k_1 r)}{\gamma_1 J_\nu(k_1 a)} + \frac{\nu}{kr} \frac{J_\nu(k_1 r)}{J_\nu(k_1 a)} \right] + q \frac{\kappa}{k} \frac{J_{\nu+1}(k_1 r)}{\gamma_1 J_\nu(k_1 a)} \right\} i e^{-i\nu\theta},$$

$$H_\theta = j \left\{ p \left[\frac{J_{\nu+1}(k_1 r)}{\gamma_1 J_\nu(k_1 a)} - \frac{\nu}{kr} \frac{J_\nu(k_1 r)}{J_\nu(k_1 a)} \right] + q \frac{\kappa}{k} \frac{J_{\nu+1}(k_1 r)}{\gamma_1 J_\nu(k_1 a)} \right\} e^{-i\nu\theta},$$

где p и q - комплексные постоянные. Запись полей в форме (4) очень удобна. Она позволяет получить непосредственно выражение полей для весьма важного частного случая $\gamma_1 = 0$ ($\beta_\phi = 1$).

В области II будем учитывать лишь основную моду E_{ν_0} . В связи с этим для данной области положим $\vec{\Pi}_h = 0$, а электрический вектор Герца $\vec{\Pi}_e$ выберем в обычном виде:

$$\vec{\Pi}_e = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{k^2} \frac{\psi_0(kr)}{\psi_0(ka)} e^{-i\nu\theta} \end{pmatrix} \quad (5)$$

где

$$\psi_0(kr) = J_\nu(kb) N_\nu(kr) - N_\nu(kb) J_\nu(kr). \quad (6)$$

В дальнейшем нами будет использована также функция

$$\psi_1(kr) = J_\nu(kb) N_{\nu+1}(kr) - N_{\nu+1}(kb) J_\nu(kr), \quad (7)$$

причем между ψ_0 и ψ_1 имеет место соотношение

$$\frac{\partial \psi_0}{\partial(kr)} = \frac{\nu}{kr} \psi_0 - \psi_1. \quad (8)$$

Отметим, что вектор Герца (5) записан с учетом граничных условий при $r = b$ и не зависит от координаты z . Поэтому поля в области Π , принимая во внимание (2) и (5) и опуская множитель $e^{i\omega t}$, можно записать в виде:

$$E_z = A \frac{\psi_0(kr)}{\psi_0(ka)} e^{-i\nu\theta}, \quad H_r = j \frac{\nu}{kr} \frac{\psi_0(kr)}{\psi_0(ka)} i e^{-i\nu\theta}, \quad (8)$$

$$H_\theta = -j \left[\frac{\nu}{kr} \frac{\psi_0(kr)}{\psi_0(ka)} - \frac{\psi_1(kr)}{\psi_0(ka)} \right] e^{-i\nu\theta}, \quad H_z = E_\theta = E_r = 0.$$

Используя граничные условия при $r = a$, несложно найти следующую систему уравнений относительно комплексных постоянных p и q :

$$\begin{cases} p \Psi + q \frac{\kappa}{k} (\Psi - \frac{\nu}{ka}) = 0, \\ p \frac{\kappa}{k} \Phi + q (\Phi + \frac{\nu}{ka}) = 0, \end{cases} \quad (10)$$

где

$$\Phi = - \frac{J_{\nu+1}(k_1 a)}{\gamma_1 J_\nu(k_1 a)}, \quad \Psi = \frac{\psi_1(kb, ka)}{\psi_0(kb, ka)} + \Phi. \quad (11)$$

Введем следующие обозначения:

$$p = p_1 - j p_2, \quad q = q_1 - j q_2, \quad \Phi = \phi_1 - j \phi_2, \quad (*)$$

где $p_1, p_2, q_1, q_2, \phi_1, \phi_2$ - действительные величины. Подставляя (*) и $\kappa = \delta - ja$ в систему (10) и приравняв по отдельности нулю мнимую и действительную части каждого уравнения, получим в итоге однородную систему четырех линейных уравнений относительно постоянных p_1, p_2, q_1, q_2 . Затем, приравняв нулю детерминант этой системы, найдем дисперсионное уравнение для комплексных волн, которое после ряда преобразований приобретает следующий компактный вид:

$$(M_1 - M_2)^2 + (M_3 - M_4)^2 = 0, \quad (12)$$

где M_1, M_2, M_3, M_4 - соответствующие миноры второго ранга:

$$M_1 = \begin{vmatrix} -\frac{\delta}{k} \phi_1 + \frac{a}{k} \phi_2 & -\phi_1 - \frac{\nu}{ka} \\ \frac{\psi_1}{\psi_0} + \phi_1 & \frac{\delta}{k} (\frac{\psi_1}{\psi_0} + \phi_1 - \frac{\nu}{ka}) - \frac{a}{k} \phi_2 \end{vmatrix}, \quad M_2 = \begin{vmatrix} \frac{a}{k} \phi_1 + \frac{\delta}{k} \phi_2 & \phi_2 \\ -\phi_2 & -\frac{a}{k} (\frac{\psi_1}{\psi_0} + \phi_1 - \frac{\nu}{ka}) - \frac{\delta}{k} \phi_2 \end{vmatrix}$$

$$M_3 = \begin{vmatrix} -\frac{\delta}{k} \phi_1 + \frac{a}{k} \phi_2 & \phi_2 \\ \frac{\psi_1}{\psi_0} + \phi_1 & -\frac{a}{k} (\frac{\psi_1}{\psi_0} + \phi_1 - \frac{\nu}{ka}) - \frac{\delta}{k} \phi_2 \end{vmatrix}; \quad M_4 = \begin{vmatrix} -\phi_1 - \frac{\nu}{ka} & \frac{a}{k} \phi_1 + \frac{\delta}{k} \phi_2 \\ \frac{\delta}{k} (\frac{\psi_1}{\psi_0} + \phi_1 - \frac{\nu}{ka}) - \frac{a}{k} \phi_2 & -\phi_2 \end{vmatrix}. \quad (13)$$

Если постоянная распространения действительна ($\frac{\kappa}{k} = \frac{\delta}{k}$ и $\frac{a}{k} = 0$), то миноры M_2, M_3, M_4 и функция ϕ_2 тождественно равны нулю и дисперсионное уравнение (13) приобретает хорошо известную форму^{/7/}

$$M_1 = 0,$$

или

$$(1 - \frac{\delta^2}{k^2}) \Psi \Phi + \frac{\nu}{ka} [\Psi + \frac{\delta^2}{k^2} \Phi] = 0. \quad (14)$$

Для запердельных волн постоянная распространения - чисто мнимая величина ($\frac{\kappa}{k} = -j \frac{a}{k}$; $\frac{\delta}{k} = 0$) и миноры M_3, M_4 и функция ϕ_2 тождественно обращаются в нуль. Дисперсионное уравнение (13) при этом переходит в

$$M_1 - M_2 = 0,$$

или

$$(1 + \frac{a^2}{k^2}) \Psi \Phi + \frac{\nu}{ka} [\Psi - \frac{a^2}{k^2} \Phi] = 0. \quad (15)$$

Из сравнения этого уравнения с (14) видно, что они взаимно переходят друг в друга при замене $\frac{\delta}{k}$ на $(-j \frac{a}{k})$ и наоборот.

Для определения возможных областей существования комплексных волн рассмотрим поведение распространяющихся (ур. (14)) и запердельных (ур. (15)) волн.

При $\kappa = 0$ дисперсионные соотношения (14) и (15) совпадают и в свою очередь распадаются на два независимых и простых уравнения критических частот:

$$J'_\nu(ka) = 0 \quad (a), \quad J'_\nu(kb) = 0 \quad (\delta). \quad (16)$$

Назовем гибридную волну $gh_{\nu m}$ модой, если ее критическая частота равна $ka = \mu_{\nu m}$, где $\mu_{\nu m}$ - m -ый корень уравнения (16a). Аналогично вводятся $ge_{\nu n}$ - моды по отношению к корням $\sigma_{\nu n}$ уравнения (16б). Подобная классификация удобна для дальнейшего анализа и носит условный характер в связи с особенностями поведения дисперсионных кривых гибридных волн в окрестности значения параметра $\frac{a}{b} = \frac{\mu_{\nu m}}{\sigma_{\nu n}}$, где критические частоты $gh_{\nu m}$ и $ge_{\nu n}$ волн совпадают^{/7,8/}. Вопрос об истинной классификации гибридных волн в соосных цилиндрических структурах является в настоящее время открытым, несмотря на предпринимавшиеся попытки решить его^{/10/}.

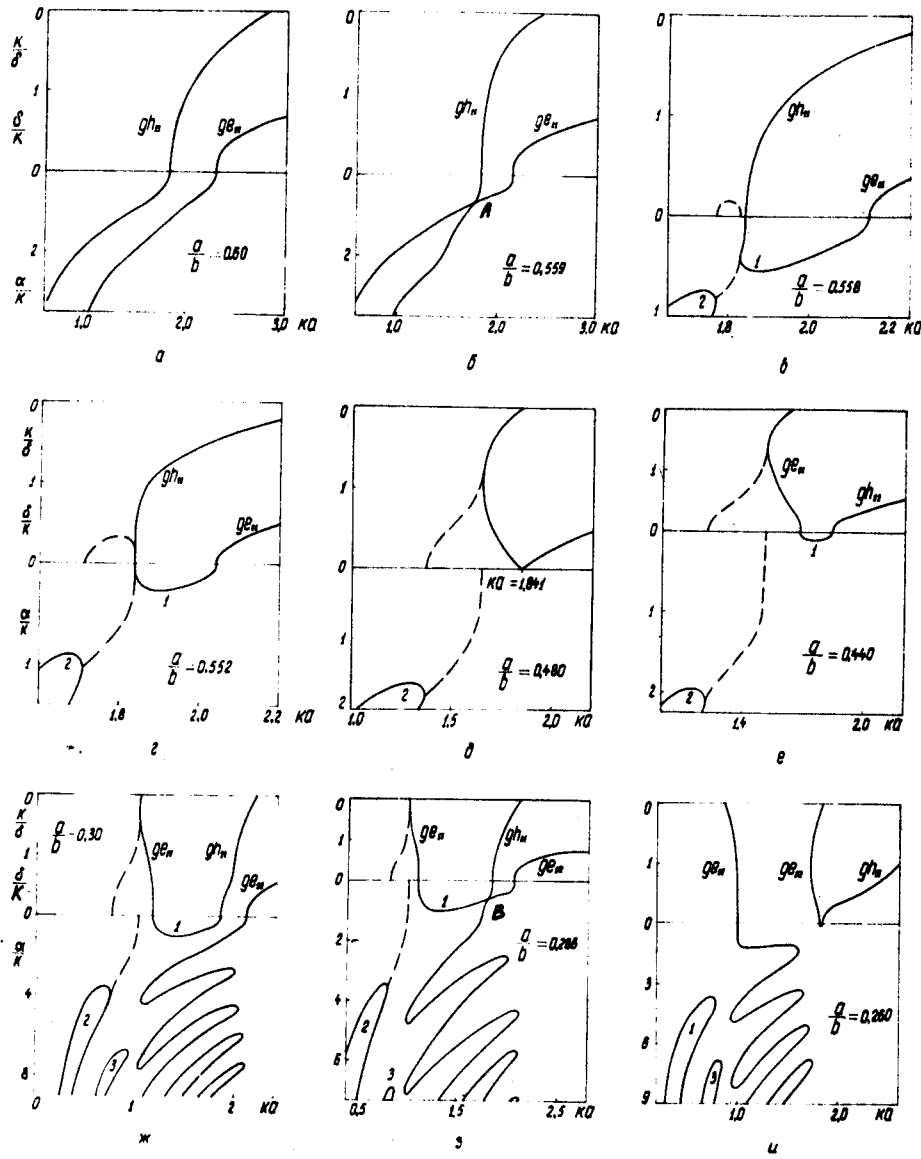


Рис. 1. Эволюция дисперсионных кривых в зависимости от параметра a/b .

На рис. 1 показана эволюция дисперсионных кривых, вычисленных на электронно-счетной машине, в зависимости от параметра a/b при $\nu=1$. Можно отметить три области дисперсии действительной ветви нижней моды (верхняя полу плоскость рис. 1), соответствующие изменению параметра a/b в пределах:

- 1) $0,552 \leq \frac{a}{b} \leq 1$ - нормальная дисперсия (рис. 1а, б, в, г),
- 2) $0,289 < \frac{a}{b} < 0,552$ - смешанная дисперсия (рис. 1 д, е, ж),
- 3) $0 < \frac{a}{b} \leq 0,289$ - аномальная дисперсия (рис. 1з, и).

При $a/b = 0,480$ критические частоты волн gh_{11} и ge_{11} совпадают (см. рис. 1д), причем для $\frac{a}{b} > 0,480$ нижней модой является волна gh_{11} , а для $a/b < 0,480$, наоборот, - ge_{11} .

При $a/b > 0,559$ запрелельные ветви двух нижних мод gh_{11} и ge_{11} близки по характеру соответствующим кривым в гладких волноводах (нижняя полу плоскость рис. 1а). Для $a/b = 0,559$ запрелельные ветви этих волн соприкасаются в одной точке А (рис. 1б) и затем ($a/b < 0,559$) рассматриваемые ветви оказываются разделенными на две отдельные петли 1 и 2 (см., например, рис. 1в). Петля 1 замыкает действительные ветви gh_{11} и ge_{11} через мнимую область в точках критических частей. Петля 2 имеет уходящие в бесконечность концы (при $ka \rightarrow 0$, $\frac{a}{b} \rightarrow \infty$). Между обеими петлями существует изолированная полоса частот. При совпадении критических частот рассматриваемых мод ($a/b = 0,480$) петля 1 исчезает (рис. 1д) и в дальнейшем ($a/b < 0,480$) перемещается влево по отношению к критической частоте $ka = 1,841$ моды gh_{11} . На рис. 1ж наряду с дисперсионными кривыми двух нижних мод показана соответствующая кривая следующей моды ge_{12} , которая в нижней полу плоскости имеет весьма сложный характер и делится на две части: волнообразную ветвь, уходящую в бесконечность, и изолированную петлю 3, возникающую при переходе моды ge_{12} через моду gh_{12} .

Для $a/b = 0,286$ запрелельная ветвь моды ge_{12} имеет с петлей 1 одну общую точку В (рис. 1з). При дальнейшем уменьшении параметра a/b мода ge_{12} замыкается через мнимую область с модой gh_{11} (рис. 1и). Более подробная эволюция дисперсионных кривых нижних гибридных мод показана на рис. 2а, б, в. На рис. 3 даны дисперсионные кривые для нескольких высших мод (ge_{13} , ge_{14} , ge_{15} , ge_{16} и gh_{12}) в более широкой области частот при $a/b = 0,3$.

Запрелельные ветви этих мод имеют волнообразный характер и разделены изолированными полосами частот. Данные полосы, также как и полосы нижних мод, являются областями существования комплексных волн.

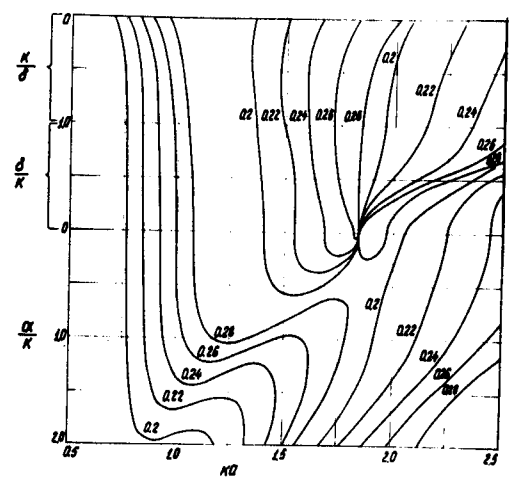
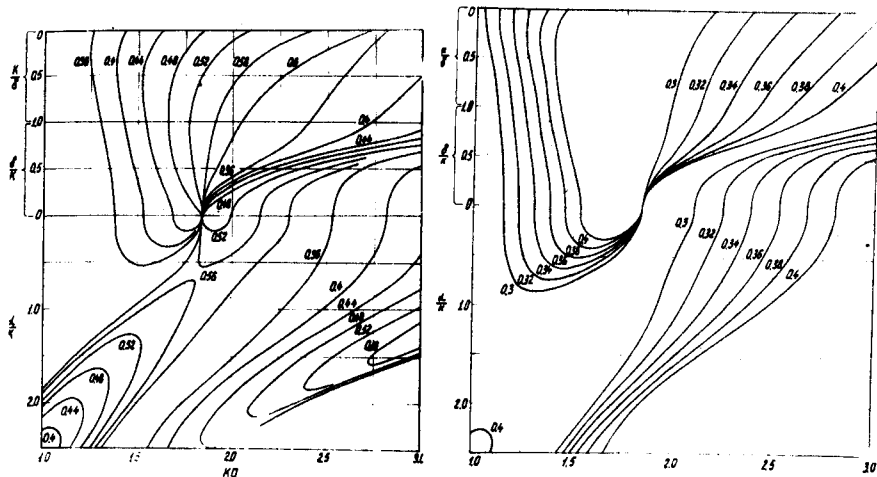


Рис. 2. Дисперсионные кривые диафрагмированного волновода для нижних гибридных мод при $\nu=1$.

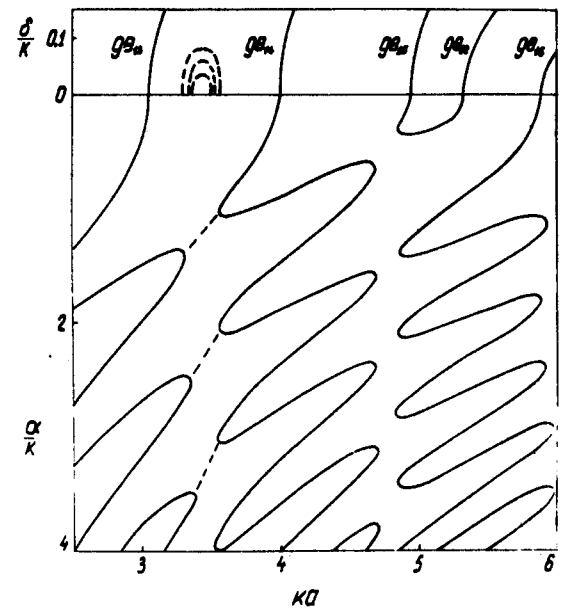


Рис. 3. Поведение запредельных ветвей дисперсионных кривых и комплексных решений для высших гибридных мод (комплексные решения показаны для одной полосы частот пунктирными кривыми).

Для получения дисперсионных кривых комплексных волн необходимо найти решение уравнения (12). Результаты расчета на электронно-вычислительной машине уравнения (12) приведены на тех же рисунках 1 пунктирными кривыми. В соответствии с тремя областями дисперсии нижней моды имеется три формы решений комплексных волн (см., например, рис. 1в, е, ж).

В области положительной дисперсии нижняя комплексная мода возникает при $a/b < 0,558$ (см. рис. 1 в, г), при этом с уменьшением параметра a/b полоса частот данной комплексной волны расширяется, а действительная часть постоянной распространения растет. В области смешанной дисперсии ($0,288 < \frac{a}{b} < 0,552$) действительная ветвь комплексных волн смыкается с действительной ветвью гибридной волны в точке, где групповая скорость ее равна нулю (рис. 1 д, е). В области отрицательной дисперсии действительная ветвь комплексной волны распространяется на

всю область фазовых скоростей (рис. 1 з, и). Что касается высших комплексных мод, то как видно из рис. 3, их существует целый набор, который следует характеризовать дополнительным индексом, указывающим место решения в вертикальном сечении k_z -const.

Л и т е р а т у р а

1. М.А. Миллер. Докл. АН СССР, 87, 571, 1952; ЖТФ 25, 1972, (1955).
2. В.И. Таланов. Радиофизика (Изв. вузов), 3, 802 (1960).
3. Б.Н. Гершман, Памяти Андропова, Изд. АН СССР, 599 (1959).
4. А.В. Гапонов. Докл. на первой Всесоюзной конференции по радиоэлектронике МВО СССР г. Горький, 1956.
5. А.М. Белянцев, А.В. Гапонов. Радиотехника и электроника, 9, 1188, (1964).
6. P.J.B. Clarricoats, V.C. Taylor. Proc. TEE, v.111, p.1951, 1964.
7. А.В. Вагин, В.И. Котов, М.М. Офицеров. Преприят ОИЯИ Р-2274, Дубна 1965.
8. H. Hahn. Rev. Sci. Instr., 34, 1094, 1963.
9. M.Y. Garault. CERN no.64-43, Geneva, 1964.
10. P.J.B. Clarricoats. Proc. IEE, 110, 261 (1963).

Рукопись поступила в издательский отдел
18 декабря 1965 г.