

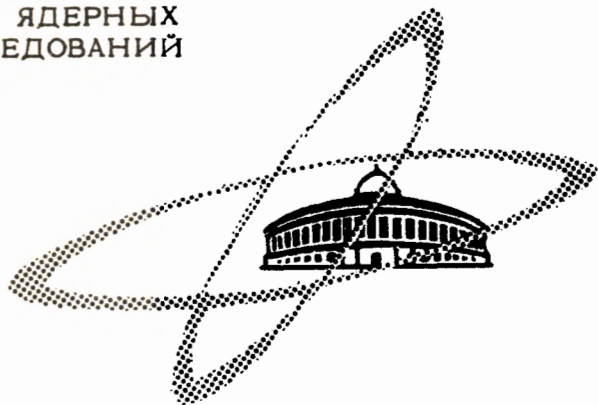
С 332,5
П-295

ЯФ, 1966, т. 4, №3,
с. 556-563.

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р - 2490



И.Ж. Петков, В.К. Лукьянов, Ю.С. Поль

НЕУПРУГОЕ РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОНОВ
НА ЯДРАХ С ВОЗБУЖДЕНИЕМ
КОЛЛЕКТИВНЫХ УРОВНЕЙ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1965

P - 2480

3926/3 чр.

И.Ж. Петков, В.К. Лукьянов, Ю.С. Польш

НЕУПРУГОЕ РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОНОВ
НА ЯДРАХ С ВОЗБУЖДЕНИЕМ
КОЛЛЕКТИВНЫХ УРОВНЕЙ

Объединенный институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

1. Постановка задачи

Неупругое рассеяние электронов на ядрах с возбуждением коллективных уровней рассматривалось в ряде работ. Однако характерно, что в них обычно используется либо борновское приближение, которое непригодно для тяжелых ядер из-за сильного искажения электронной волны кулоновским полем (большие Z), либо искажение приближено учитывается, но задачу удается решить лишь для нереального распределения плотности заряда (чаще всего ступенчатого).

Из-за электромагнитного характера взаимодействия электронов с ядрами эксперименты по неупругому рассеянию должны давать в принципе наиболее точную информацию о строении ядра. Поэтому целесообразно вновь рассмотреть эту задачу, отказываясь от указанных выше приближений.

Будем рассматривать неупругое рассеяние электронов на ядрах, которые описываются с помощью коллективных макромоделей, где в качестве динамических переменных выступают параметры формы поверхности $a_{\lambda\mu}$, определяющие радиус ядра

$$R = R + R \sum_{\lambda\mu} (a_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu}(\Omega') - \frac{(-1)^\mu}{4\pi} a_{\lambda\mu} a_{\lambda-\mu}). \quad (1)$$

Здесь Ω' -угловые координаты точки на поверхности ядра. Поскольку энергия возбуждения коллективных уровней ΔE невелика, то амплитуду неупругого рассеяния можно записать в адиабатическом приближении, которое применимо при выполнении условия $\frac{\Delta E}{\hbar c} R \ll 1$

$$f^{\text{неупр}}(\theta) = (\Psi_1(\xi), f^{\text{упр}}(\theta, \xi) \Psi_1(\xi)). \quad (2)$$

Здесь θ -угол рассеяния электрона, $\Psi(\xi)$ -волновые функции ядра, зависящие от коллективных координат $\xi = \{a_{\lambda\mu}\}$, а $f^{\text{упр}}(\theta, \xi)$ есть амплитуда упругого рассеяния электронов на неподвижном ядре. В качестве $f^{\text{упр}}$ возьмем выражение, полученное в работе ^{1/} (там же см. обозначения),

$$f_{\text{упр}}(\theta, \xi) = 2Ze^2 E(u_1^*, u_1) \int g(\vec{x}) \frac{e^{i\vec{q}\vec{x} + i\Phi(\vec{x})}}{q_{\text{эф}}(\vec{x})} \rho(\vec{x}) d^3x. \quad (3)$$

Функции $g(\vec{x})$, $\Phi(\vec{x})$ и $q_{\text{эф}}(\vec{x})$ учитывают искажение электронной волновой функции, которая находилась, в свою очередь, решением уравнения Дирака в квазиклассическом приближении^{/2/}. В частном случае, когда $g(\vec{x}) = 1$; $\Phi(\vec{x}) = 0$; $q_{\text{эф}}(\vec{x}) = q = 2k \sin \frac{\theta}{2}$, получаем обычный борновский результат. На основании амплитуды (3) в работе^{/1/} было найдено аналитическое выражение для сечения упругого рассеяния в центральном поле ядра с фермиевским распределением плотности заряда $\rho = \rho_0 (1 + \exp \frac{x-R}{b})^{-1}$. При этом метод вычисления состоял в нахождении вклада в амплитуду от полюсов плотности $\rho(x)$ ($x_n = R + i(2n+1)\pi b$, $n=0, 1, \dots$). Сравнение полученных дифференциальных сечений с результатами точного расчета фазового анализа дало хорошее совпадение. В настоящей работе мы воспользуемся этим методом для нахождения амплитуды неупругого рассеяния электронов с возбуждением коллективных уровней в ядрах.

В данном случае распределение плотности заряда $\rho(\vec{x})$ будет уже зависеть от параметров формы ядра и для средних и тяжелых ядер имеет вид:

$$\rho(\vec{x}) = \frac{\rho}{1 + e^{\frac{x-R-\Delta R}{b}}}; \quad \Delta R = R \sum_{\lambda\mu} (a_{\lambda\mu} Y_{\lambda\mu}(\Omega) - \frac{(-1)^\mu}{4\pi} a_{\lambda\mu} a_{\lambda-\mu}), \quad (4)$$

$$\rho_0 = \frac{3}{4\pi R^3} \left[1 + \frac{\pi^2 b^2}{R} \right]^{-1},$$

где Ω - угловые координаты вектора \vec{x} .

Для небольших отклонений поверхности ядра от сферической формы плотность $\rho(\vec{x})$ можно разложить по степеням малости $\frac{\Delta R}{R}$ и при рассмотрении возбуждений низколежащих коллективных уровней достаточно ограничиться в этом разложении лишь первыми членами ряда:

$$\rho(\vec{x}) = \rho_0(x) + \rho_1(x) \Delta R + \rho_2(x) (\Delta R)^2 + \dots, \quad (5)$$

$$\rho_1(x) = \frac{\rho_0}{b} \frac{e^{\frac{x-R}{b}}}{(1 + \exp \frac{x-R}{b})^2}, \quad (6)$$

$$\rho_2(x) = -\frac{1}{2} \frac{\rho_0}{b^2} e^{-\frac{x-R}{b}} \left[\frac{1}{(1 + \exp \frac{x-R}{b})^2} - \frac{2e^{-\frac{x-R}{b}}}{(1 + \exp \frac{x-R}{b})^3} \right]. \quad (7)$$

Отметим, что функции $g(\vec{x})$, $q_{\text{эф}}(\vec{x})$ и $\Phi(\vec{x})$ также зависят от параметров деформации, однако эта зависимость слабая, она приводит к кратным переходам, и их вклад в сечение, как показано в разделе 3, можно не учитывать. Тогда, подставляя (5) в (8) и затем в (2), получим:

$$f^{\text{неупр}}(\theta) = 2Ze^2 E(u_i^+ u_i^-) \sum_{n=1,2} \langle f | \mathbb{M}_{LM}^{(n)} | i \rangle I_{LM}^{(n)}(\theta), \quad (L \neq 0) \quad (8)$$

где

$$I_{LM}^{(n)}(\theta) = \frac{1}{J_L^{(n)}} \int \frac{g(\vec{x})}{q_{\text{эф}}^2(\vec{x})} e^{i\vec{q}\vec{x} + i\Phi(\vec{x})} \rho_n(x) Y_{LM}^n(\hat{x}) d^3x,$$

$$J_L^{(n)} = Ze \int_0^\infty \rho_n(x) x^L \cdot x^2 dx, \quad (9)$$

$$\mathbb{M}_{LM}^{(1)} = (-1)^M a_{L-M} R J_L^{(1)}; \quad \mathbb{M}_{LM}^{(2)} = (-1)^M R^2 \int_L^{(2)} \sum_A (\lambda \lambda' \mu \mu') a_{\lambda \mu} a_{\lambda' \mu'} \lambda_{\mu'}^{\lambda' \mu'}. \quad (10)$$

$$A_{LM}(\lambda \lambda' \mu \mu') = \left\{ \frac{(2\lambda+1)(2\lambda'+1)}{4\pi(2L+1)} \right\}^{1/2} (\lambda \lambda' 0 0 | L 0) (\lambda \lambda' \mu \mu' | L M).$$

Легко проверить, что выражения (10) совпадают с первыми членами разложения по $a_{\lambda \mu}$ оператора электрического L -польного момента ядра (индекс ν фактически означает порядок разложения по $a_{\lambda \mu}$):

$$\mathbb{M}_{LM} = Ze \int \rho(\vec{x}) x^L Y_{LM}(\hat{x}) d^3x = \sum_{n=1,2} \mathbb{M}_{LM}^{(n)} \quad (L \neq 0). \quad (11)$$

Определим также оператор электрического монополюсного перехода

$$\mathbb{M}_{00} = \frac{ZeR^3}{2} \int \rho(\vec{x}) \frac{d^3x}{x} \quad (L=0).$$

Тогда, воспользовавшись теоремой Вигнера-Экарта

$$\langle J_i M_i | \mathbb{M}_{LM}^{(n)} | J_i M_i \rangle = (J_i L M_i M | J_i M_i) \langle J_i || \mathbb{M}_L^{(n)} || J_i \rangle \quad (12)$$

и определенном приведенной вероятности электрического перехода мультипольности L

$$B_{\ell \rightarrow \ell'}^{(n)}(EL) = |\langle J_{\ell'} || \sum_L^{(n)} || J_{\ell} \rangle|^2, \quad (13)$$

получим следующий окончательный результат для сечения неупругого рассеяния ($L \neq 0$):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \sum_{\alpha} |I|^2 = (2Ze^2 E \cos \frac{\theta}{2})^2 \frac{2J_{\ell} + 1}{2J_{\ell} + 1} \sum_{\mu} B_{\ell \rightarrow \mu}^{(n)}(EL) F_L^{(n)}(\theta), \quad (14)$$

где \sum означает суммирование по конечным и усреднение по начальным спиновым состояниям. Здесь

$$F_L^{(n)}(\theta) = \frac{1}{2L+1} \sum_{\mu} |I_{L\mu}^{(n)}(\theta)|^2. \quad (15)$$

Ограничение здесь только диагональными по μ членами означает, что для каждого конкретного перехода мультипольности L мы оставляем в амплитуде неупругого рассеяния лишь нижайшие по $\alpha_{L\mu}$ члены разложения. Отметим, что индекс μ в случае простой вибраторной модели ядра ^{/3/} означает число фононов возбуждения.

Аналогичные выкладки можно проделать для $0^+ \rightarrow 0^+$ переходов. В этом случае сечение имеет вид:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4\pi} (2Ze^2 E \cos \frac{\theta}{2})^2 B(E0) |I_{00}|^2, \quad (16)$$

где

$$I_{00}(\theta) = \frac{1}{J_{00}} \int_{\varphi} \frac{g(\vec{x})}{\varphi(\vec{x})} e^{i\varphi\vec{x} + i\theta(\vec{x})} (\rho_1(x) - R\rho_2(x)) d^3x; J_{00} = \sqrt{\pi} ZeR^3 \int_0^{\infty} (\rho_1(x) - R\rho_2(x)) x dx.$$

Итак, дальнейшая задача заключается в нахождении интегралов (9) в явном виде, что даст возможность описывать угловое распределение неупруго-рассеянных электронов (раздел 2). Что касается вероятностей переходов $B(EL)$, то их можно вычислить в рамках любой коллективной макромоделли ядра, в которой волновые функции $\Psi(\xi)$ выражаются через параметры формы ядра $\alpha_{L\mu}$.

2. Метод расчета

Рассмотрим интегралы $I_{LM}^{(n)}$, когда индекс $M=0$. Они дают основной вклад в сечение (14), (15), так как при $M \neq 0$ интегралы пренебрежимо малы из-за симметрии по φ подынтегральной функции $e^{iM\varphi}$ и слабой зависимости от φ

остального подынтегрального выражения.

Для вычисления $I_{L0}^{(n)}$ (8) выберем систему отсчета $0x || \vec{q} (\mu = \text{const})$. Тогда в выражении

$$I_{L0}^{(n)} = \frac{1!}{J_L^{(n)}} \int_0^{\infty} x^2 dx \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-\frac{1}{q}}^{\frac{1}{q}} \frac{g(x, \mu, \phi)}{q^2_{\text{эф}}(x, \mu, \phi)} e^{iqx + i\Phi(x, \mu, \phi)} \rho_n(x) Y_{L0}(\mu, 0) d\mu, \quad (17)$$

так же как и в работе ^{/1/}, можно проинтегрировать по μ по частям, ограничиваясь при этом лишь первыми членами полученного асимптотического ряда по $\frac{1}{qx} \sim \frac{1}{qR}$. Естественно, это можно делать, если за исходное приближение брать условие $qR \gg 1$.

Кроме того, всюду здесь будем пренебрегать производной по μ от слабо меняющейся функции

$$\frac{g(x, \mu, \phi)}{q^2_{\text{эф}}(x, \mu, \phi) (iqx + i \frac{\partial}{\partial \mu} \Phi(x, \mu, \phi))}$$

Получаем:

$$I_{L0}^{(n)} = \frac{1}{J_L^{(n)}} \frac{2\pi}{L} \sum_{\epsilon = \pm 1} \int_0^{\infty} \frac{G_L(x, \epsilon)}{q^2_{\text{эф}}(x, \epsilon)} e^{iqx + i\Phi(x, \epsilon)} \rho_n(x) dx, \quad (18)$$

где

$$G_{L0}(x, \epsilon) = \frac{iqx}{2\pi} g(x, \epsilon) \sum_{\nu=0}^L (-1)^\nu \int_0^{2\pi} \frac{\frac{\partial^\nu}{\partial \mu^\nu} Y_{L0}(\mu, 0) |_{\mu=\epsilon}}{D^{\nu+1}(x, \epsilon, \phi)} d\phi \quad (19)$$

и

$$D(x, \epsilon, \phi) = iqx + i \frac{\partial}{\partial \mu} \Phi(x, \mu, \phi) |_{\mu=\epsilon}$$

Здесь учтено, что q и Φ в точках $\mu = \epsilon = \pm 1$ не зависит от ϕ (см. приложение). Отметим, что для выбранного фермиевского распределения плотности заряда $\rho(x)$ функции ρ_n (см. формулы (6), (7)) имеют двукратные ($n=1$) и трехкратные ($n=2$) полюса в точках $x^\epsilon = R + i(2n+1)\pi b$. Тогда для вычисления интегралов (18) можно применять метод, который использовался ранее в работе ^{/1/}. Для этого интеграл (18) записывается в виде контурных интегралов и суммы вычетов в указанных полюсах. Оказывается, что интегралы по контурам, выбранным так же, как и в работе ^{/1/}, пренебрежимо малы, и поэтому окончательное выражение имеет вид

$$I_{L0}^{(n)} = \frac{4\pi^2}{q} \frac{1}{J_L^{(n)}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\epsilon=\pm 1} \text{Res} \left\{ \frac{G_{L0}(x, \epsilon)}{q^2_{\text{эф}}(x, \epsilon)} e^{iqx + i\Phi(x, \epsilon)} \rho_n(x) \right\}_{x=x_n^\epsilon} \quad (20)$$

Заметим, что здесь из-за фактора $e^{i\kappa q x} = e^{i\kappa q R} e^{-i(\kappa+1)q x}$ ряд быстро сходится ($\kappa q b > 1$) и практически можно ограничиться лишь первыми двумя комплексно-сопряженными полюсами ($\kappa = 0$), ближайшими к действительной оси x . Вклад каждого последующего полюса по сравнению с предыдущим вносит поправку порядка $e^{-2\kappa q b}$ и пренебрежимо мал. Тогда в случае возбуждения однофононных колебательных уровней или первого вращательного уровня в ядрах сечению неупругого рассеяния получаем подстановкой (20) в (15) и (14):

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(J_f \leftarrow J_i) = \frac{2J_f + 1}{2J_i + 1} (2Ze^2 E \cos \frac{\theta}{2})^2 \sum_L B_{f \rightarrow i}^{(1)}(EL) \frac{1}{2L+1} \times \\ \times \left| \frac{4\pi^3}{q} \rho_0 b \sum_{\epsilon=\pm 1} J_L^{(1)} \{ (1+iq)_{\text{эф}}(x, \epsilon) \frac{G_L(x, \epsilon)}{q^2_{\text{эф}}(x, \epsilon)} e^{i\kappa q x + i\Phi(x, \epsilon)} \} \Big|_{x=x_0}^2 \right. \quad (21)$$

Сечение в случае возбуждения двухфононных колебательных либо высших вращательных состояний ($\kappa = 2$) можно получить аналогичным образом:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(J_f \leftarrow J_i) = \frac{2J_f + 1}{2J_i + 1} (2Ze^2 E \cos \frac{\theta}{2})^2 \sum_L \frac{1}{2L+1} B_{f \rightarrow i}^{(2)}(EL) \times \\ \times \left| \frac{4\pi^3}{q} \rho_0 b \sum_{\epsilon=\pm 1} J_L^{(2)} \{ (b x q^2_{\text{эф}}(x, \epsilon) - 2ibq_{\text{эф}}(x, \epsilon)) \frac{G_L(x, \epsilon)}{q^2_{\text{эф}}(x, \epsilon)} e^{i\kappa q x + i\Phi(x, \epsilon)} \} \Big|_{x=x_0}^2 \right. \quad (22)$$

Приведем также выражение для сечения в случае 0-0 переходов

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(0-0) = \frac{1}{4\pi} (2Ze^2 E \cos \frac{\theta}{2})^2 B(EO) \times \\ \times \left| \frac{4\pi^3}{q} \rho_0 b \sum_{\epsilon=\pm 1} J_{L_0} \{ (1+iq)_{\text{эф}}(x, \epsilon)(x-R) + \frac{1}{2} q^2_{\text{эф}}(x, \epsilon)xR \} \frac{G_{L_0}(x, \epsilon)}{q^2_{\text{эф}}(x, \epsilon)} e^{i\kappa q x + i\Phi(x, \epsilon)} \} \Big|_{x=x_0}^2 \right. \quad (23)$$

В приведенные выражения (21) - (23) входят функции $q_{\text{эф}}(x, \epsilon)$ и $\Phi(x, \epsilon)$, которые даны в явном виде в работе^{1/} (формулы (16), (17)) как функции параметров плотности заряда, энергии E и атомного номера ядра Z . Приведем здесь выражение для $G_{L_0}(x, \epsilon)$, вывод которого дается в приложении;

$$G_{L_0}(x, \epsilon) = G_0 \left[\sum_{\nu=0}^L i^{\nu} \frac{\partial^{\nu}}{\partial \mu^{\nu}} Y_{L_0}(\mu, 0) \right]_{\mu=\epsilon} \cdot \frac{F(\frac{1}{2}, -\nu; 1; \frac{B(x, \epsilon)}{A(x, \epsilon) + B(x, \epsilon)})}{[A(x, \epsilon)]^{\nu}},$$

где

$$G_0 = \frac{g(x, \epsilon) q x}{[A(x, \epsilon) \{A(x, \epsilon) + B(x, \epsilon)\}]^{\frac{1}{2}}}$$

совпадает с определением G , данным в работе ^{1/1/}, а $A(x, \epsilon)$ и $B(x, \epsilon)$ приведены в приложении.

3. Малые углы. Эффект "кратности"

До сих пор наше рассмотрение было ограничено областью углов рассеяния $\theta > \frac{1}{kR}$ ($kR \gg 1$), поэтому интересно получить выражение для сечения неупругого рассеяния в области малых углов в тех случаях, когда нельзя пользоваться борновским приближением (Z велико). Кроме того, мы не учитывали вклада в сечение так называемых "кратных" переходов. Дело в том, что в общем случае амплитуда неупругого рассеяния нелинейна по взаимодействию, приводящему к переходам в ядре. Это должно приводить к появлению в сечении наряду с матричными элементами "прямого" перехода таких матричных элементов, которые можно интерпретировать как отвечающие виртуальным каскадным, или "кратным" переходам, поскольку они идут через какой-либо промежуточный уровень ядра. Предыдущее наше рассмотрение соответствовало учету в амплитуде неупругого рассеяния лишь линейных по взаимодействию членов, это и приводило к тому, что сечение факторизовалось из двух частей - структурной $B(EL)$ и кинематической $F_L(\theta)$ (14).

Для оценки порядка величины "кратных" переходов проще всего воспользоваться выражением для амплитуды в приближении малых углов ($\theta < 1$) ^{1/4/}:

$$f^{\text{упр}}(\theta) = \frac{iE}{2\pi} (u_f^* u_i) \int_0^{\infty} \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\phi e^{-iq\rho \cos \phi} \left(e^{-\int_0^{\infty} V(\rho, \phi, z) dz} - 1 \right), \quad (24)$$

где $q = 2k \sin \frac{\theta}{2}$, θ - угол рассеяния.

Итак, записанное выражение (24) справедливо при малых углах рассеяния $\theta < 1$ (должно выполняться также условие $\frac{U}{E} \ll 1$) и тем самым дополняет полученные выше результаты (П.2), которые применимы при углах $\theta > \frac{1}{kR}$ (здесь также $\frac{U}{E} \ll 1$). С другой стороны, при такой записи проще всего оценить эффекты "кратности". Действительно, подставляя потенциал в виде $V_0 + V_{\text{вз}}$ и раскладывая затем

$\exp\{-i \int_{-\infty}^{\infty} V_{B3}(\rho, \phi, z) dz\}$ в ряд, получим в амплитуде как линейные по $A = -i \int_{-\infty}^{\infty} V_{B3} dz$ слагаемые, так и нелинейные, начиная с A^2 , которые будут отвечать "кратным" переходам. Используя представление потенциала через плотность $V(\vec{r}) = Ze \int_{|\vec{r}-\vec{z}|}^{\rho(\vec{r})} d^3r$, раскладывая $\rho(\vec{r})$ в ряд по малости ΔR (5), а также имея в виду разложение

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{z}|} = 4\pi \sum_{\ell m} \frac{1}{2\ell+1} \left\{ \begin{array}{l} \frac{r}{r} \frac{\ell}{\ell+1} Y_{\ell m}(\hat{r}) Y_{\ell m}^*(\hat{z}) \quad (z < r), \\ \frac{r}{z} \frac{\ell}{\ell+1} Y_{\ell m}(\hat{z}) Y_{\ell m}^*(\hat{r}) \quad (z \geq r), \end{array} \right.$$

получим с точностью до членов порядка $(\alpha_{\lambda\mu})^3$

$$\begin{aligned} V(\vec{x}) = V_0 + V_{B3} = V_0(x) + R \sum_{LM} \alpha_{LM} \frac{4\pi}{2L+1} Y_{LM} \left(\frac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}}, 0 \right) e^{iM\phi} f_L^{(1)}(\sqrt{\rho^2+z^2}) - \\ - R \sum_{LM} \frac{(-1)^M}{4\pi} \alpha_{LM} \alpha_{L-M} V_0^{(0)}(x) + \frac{R^2}{2} \sum_{\lambda\mu} \sum_{\lambda'\mu'} A_{LM}(\lambda\lambda'\mu\mu') \alpha_{\lambda\mu} \alpha_{\lambda'\mu'} \times \\ \times \frac{4\pi}{2L+1} Y_{LM} \left(\frac{z}{\sqrt{\rho^2+z^2}}, 0 \right) e^{iM\phi} f_L^{(2)}(\sqrt{\rho^2+z^2}) + \dots, \end{aligned} \quad (25)$$

где

$$V_0(x) = Ze^2 \int \frac{\rho_0(\vec{r})}{|\vec{r}-\vec{x}|} d^3r; \quad V_0^{(0)}(x) = Ze^2 \int \frac{\rho_1(\vec{r})}{|\vec{r}-\vec{x}|} d^3r,$$

$$f_L^{(n)}(x) = n \left\{ \frac{1}{x} \frac{1}{L+1} \int_0^x \rho_n(r) r^{L+2} dr + x \int_x^\infty \rho_n(r) \frac{dr}{r^{L-1}} \right\}; \quad n = 1, 2,$$

а коэффициенты $A_{LM}(\lambda\lambda'\mu\mu')$ даны формулой (10).

Подставляя теперь (25) в исходное выражение для амплитуды (24) и раскладывая экспоненту $\exp\{-i \int_{-\infty}^{\infty} V_{B3} dz\}$ в ряд, получим с точностью до членов порядка $(\alpha_{\lambda\mu})^3$ следующий результат:

$$\begin{aligned} i(\theta) = -4\pi Ze^2 ER \left(u_f^* u_i \right) \sum \left\{ \alpha_{LM} \frac{i^M}{2L+1} \int_0^\infty \int_{-M}^M (q\rho) F_{LM}^{(n)}(\rho) e^{-iF_0^{(n)}(\rho)} \rho d\rho + \right. \\ \left. + \sum_{\lambda\mu} \sum_{\lambda'\mu'} \alpha_{\lambda\mu} \alpha_{\lambda'\mu'} A_{LM}(\lambda\lambda'\mu\mu') \frac{i^M}{2(2L+1)} \int_0^\infty \int_{-M}^M (q\rho) F_{LM}^{(2)}(\rho) e^{-iF_0^{(2)}(\rho)} \rho d\rho - \right. \\ \left. - \alpha_{LM} \alpha_{L-M} \frac{(-1)^M}{(4\pi)^2} \int_0^\infty \int_0^\infty (q\rho) F_0^{(0)}(\rho) e^{-iF_0^{(0)}(\rho)} \rho d\rho + \right. \\ \left. + 2\pi Ze^2 R \sum_{\lambda\mu} \sum_{\lambda'\mu'} \alpha_{\lambda\mu} \alpha_{\lambda'\mu'} \frac{i^{M+\mu-1}}{(2L+1)(2\mu+1)} \int_0^\infty \int_{-M-\mu}^M (q\rho) F_{LM}^{(0)}(\rho) F_{\lambda\mu}^{(1)}(\rho) e^{-iF_0^{(0)}(\rho)} \rho d\rho \right\}. \end{aligned} \quad (27)$$

Здесь введено обозначение

$$F_{LM}^{(n)}(\rho) = \int_{-\infty}^{\infty} f^{(n)}(x) Y_{LM} \left(\frac{x}{\rho}, 0 \right) dx; \quad F_0(\rho) = \int_{-\infty}^{\infty} V_0(x) dx; \quad F_0^{(0)}(\rho) = \int_{-\infty}^{\infty} V_0^{(0)}(x) dx; \quad (28)$$

$$x = \sqrt{\rho^2 + z^2},$$

$$a J_M(x) = \frac{i^M}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-iM\phi + iM\phi} d\phi - \text{цилиндрическая функция Бесселя.}$$

Сечение неупругого рассеяния, как обычно, получается подстановкой амплитуды (27) в формулы (2) и (14).

Амплитуда (24) содержит слагаемые $\sim a_{\lambda\mu}$ и слагаемые $\sim (a_{\lambda\mu})^2$. Если рассматривать возбуждение электронами в ядре вибрационных уровней, то можно сказать, что первое слагаемое этой амплитуды отвечает однофононным переходам ($L = 2, 3$), а остальные — двухфононным. Последнее слагаемое амплитуды (24) $\sim (a_{\lambda\mu})^2$ получено из $\left(\int_{-\infty}^{\infty} V_{\text{вз}} dz \right)^2$ — члена в разложении экспоненты $\exp \left\{ -i \int_{-\infty}^{\infty} V_{\text{вз}} dz \right\}$ в ряд и образует в сечении матричные элементы "кратных" переходов, которые наряду с прямыми (второе и третье слагаемое) дают вклад в сечение двухфононных переходов. Это слагаемое имеет порядок $Z e^2 = \frac{Z}{137}$ по отношению к предыдущим и поэтому должно давать несущественную добавку к основным членам для легких и средних ядер. В случае тяжелых же ядер эта добавка из-за "кратных" переходов может оказаться существенной.

Для численной оценки такого рода переходов были сделаны конкретные расчеты сечения возбуждения двухфононных 0_+ и 2_+ уровней в ядре Cr^{52} ($E_{0_+} = 2,65 \text{ MeV}$; $E_{2_+} = 3,16 \text{ MeV}$). Для простоты оценок плотность распределения заряда выбиралась ступенчатой — в этом случае интегралы (26) и (28) берутся в квадратурах и численные расчеты существенно облегчаются. Как и ожидалось, вклад "кратных" переходов в данном случае невелик и изменяет сечение прямых переходов примерно на 1%, не меняя фактически углового распределения.

4. Обсуждение

Таким образом, в разделе 2 получены аналитические формулы для дифференциальных сечений неупругого рассеяния электронов с возбуждением коллективных уровней в ядрах, при этом учтено искажение движения электрона в кулоновском поле ядра, а также использовалось реальное фермиевское распределение плотности заряда. Эти формулы справедливы при углах рассеяния $\theta > \frac{1}{kR}$ и энергии электрона $E \gg U$.

Интересно сравнить полученные нами результаты с точными расчетами^{/8/}. На рис. 1 даны расчетные кривые формфакторов неупругого рассеяния электронов на ядрах

Ni^{88} и Cr^{88} с возбуждением нижайших 2^+ уровней. Видно, что пунктирные кривые, рассчитанные по приближенной формуле (21) $(|F(q)|^2 = \frac{d\sigma}{d\Omega} / (\frac{d\sigma}{d\Omega})_{\text{мотт}}$; $(\frac{d\sigma}{d\Omega})_{\text{мотт}} = (\frac{Ze^2}{2E})^2 \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2}}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}$, хорошо совпадают с результатами точного расчета фазового анализа (сплошные кривые). Экспериментальные точки приведены лишь для Ni^{88} и тоже взяты из работы /5/. Заметим, что в наших расчетах не учитывался вклад в сечение следующих полюсов ($S = 1, 2 \dots$), которые, однако, должны давать заметный вклад лишь при малых углах (1), где уже плохо выполняется основное приближение $qR \gg 1$.

Проведем теперь сравнение с наиболее полными экспериментальными данными по неупругому рассеянию электронов на ядре Cr^{88} . Как уже показано в разделе 3, в этом случае кратность не существенна, и поэтому будем пользоваться формулами (21), (22) и (23). Для этого необходимо задать параметры плотности R и b , которые были вначале найдены сравнением кривых дифференциального сечения упругого рассеяния, рассчитанного по формулам работы /2/, с экспериментом /8/. Таким образом, в формулах (21), (22), (23) не остается свободных параметров, и поэтому сравнение с экспериментом должно давать информацию о $B(EL)$.

На рис. 2 отложены экспериментальные точки и теоретические кривые для случая возбуждения в Cr нижнего 2^+ ($E = 1,43$ Мэв) уровня (формула (21)). На рис. 3 и рис. 4 сравнение сделано для случая возбуждения следующих 2^+ ($E = 3,16$ Мэв) и 0^+ ($E = 2,65$ Мэв) уровней (формулы (22), (23)). На этих же рисунках пунктирными линиями даны кривые в борновском приближении (формулы (21)–(23), $g = 1$, $\Phi = 0$). Видно, что в первом случае имеется хорошее согласие вплоть до углов в районе первого дифракционного минимума, и полученное отсюда значение вероятности перехода

$$\frac{1}{e^2} B^{(1)}(E 0 \rightarrow 2) = \frac{129,5}{Z^2 e^2} J_2^{(1)^2} = 129,5 \frac{9R^2}{16\pi^2} = 118 f^4$$

хорошо согласуется с данными других измерений. Аналогичным образом находится и значение величин

$$\frac{1}{e^2} B^{(2)}(E 0, 0 \rightarrow 0) = \frac{6,17}{Z^2 e^2} J_{00}^2 = 6,17 \frac{9R^2}{4\pi} = 70,8 f^4$$

и

$$\frac{1}{e^2} B^{(2)}(E 0 \rightarrow 2) = \frac{107,5}{Z^2 e^2} J_2^{(2)^2} = 107,5 \frac{9}{4\pi^2} = 24,6 f^4.$$

Если теперь вычислить значения вероятностей переходов в рамках вибрационной модели ядра /3/, то оказывается, что отношения

$$\alpha_T^{(1)} = \frac{B_T^{(2)}(E2,0 \rightarrow 2)}{[B_T^{(1)}(E2,0 \rightarrow 2)]^2} = 1,256 \cdot 10^{-2} f^{-4} e^{-2}, \quad \alpha_T^{(2)} = \frac{B_T^{(2)}(E0,0 \rightarrow 0)}{[B_T^{(1)}(E2,0 \rightarrow 2)]^2} = 2,76 \cdot 10^{-2} f^{-4} e^{-2}$$

сильно расходятся с соответствующими экспериментальными значениями

$\alpha_{\text{экс.}}^{(1)} = 1,76 \cdot 10^{-3} f^{-4} e^{-2}$; $\alpha_{\text{экс.}}^{(2)} = 5,1 \cdot 10^{-3} f^{-4} e^{-2}$. Более того, расхождение угловых распределений с экспериментом при углах в районе первого дифракционного минимума и за ним свидетельствует, по-видимому, о том, что коллективное макроописание среднemasовых круглых ядер является слишком грубым и, возможно, требует выделения нескольких нуклонов вне "кора" для более последовательного описания рассеяния. Во всяком случае, теперь уже нет оснований относить это расхождение за счет приближенного описания процесса рассеяния (борновское приближение, нереальное распределение плотности заряда, эффект "кратности").

ПРИЛОЖЕНИЕ

1. Необходимые для расчетов выражения $q_{\text{эф}}$ и G_L определяются заданием модулирующего фактора $g(\vec{x})$ и искажения фазы $\Phi(\vec{x})$, подробный вывод которых дан в работе ^{1/2/},

$$\Phi(\vec{x}) = -\frac{V(0)}{E} \vec{q}\vec{x} - \frac{a}{6} [3k^2 x^2 (\vec{q}\vec{x}) - 2(\vec{k}_1 \vec{x})^3 + 2(\vec{k}_r \vec{x})^3] - \\ - d[(\vec{x}\vec{k}_1)^2 + (\vec{x}\vec{k}_r)^2] + c[(\vec{x}\vec{k}_1)^4 + (\vec{x}\vec{k}_r)^4],$$

$$g(\vec{x}) = \left(\frac{k'}{k}\right)^2 u_r^* \{1 + 2a[(\vec{k}_1 \vec{x})^3 + (\vec{k}_r \vec{x})^3 - k^2 x^2] + 3d(\vec{q}\vec{x}) -$$

$$- 10c[(\vec{k}_1 \vec{x})(\vec{k}_1 \vec{x})^2 - (\vec{k}_r \vec{x})(\vec{k}_r \vec{x})^2] - [1/2 a(\vec{k}_1 + \vec{k}_r, \vec{x}) - 2c[\vec{k}_1 \vec{x}]^2 + 2c[\vec{k}_r \vec{x}]^2] \times \vec{\sigma} \vec{x} k \} u_l.$$

$$k' = k(1 - V(0)/E),$$

Выбирая ось $\vec{OZ} \parallel \vec{q}$ и пользуясь выражением

$$\cos \widehat{\vec{x}\vec{k}_1} = \mu a + \sqrt{1 - \mu^2} \sqrt{1 - a^2} \cos \phi,$$

$$\cos \widehat{\vec{x}\vec{k}_r} = -\mu a + \sqrt{1 - \mu^2} \sqrt{1 - a^2} \cos \phi,$$

где $\mu = \cos \widehat{\vec{q}\vec{x}}$, $\vec{q} = \vec{k}_1 - \vec{k}_r$, $a = \sin \frac{\theta}{2}$, θ - угол рассеяния, получим выражения для $\Phi(x, \mu, \phi)$ и $g(x, \mu, \phi)$. При $\mu = \pm 1$ зависимость от ϕ в последних фор-

муглах выпадает, и получаются формулы (18) работы ^{1/}.

2. В определении G_{L_0} (18) входят интегралы по ϕ типа

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{(A + B \cos^2 \phi)^n},$$

где $n = 1, 2, \dots$ $A(x, \epsilon)$ и $B(x, \epsilon)$ не зависят от ϕ и равны

$$A(x, \epsilon) = qx - \frac{V(0)}{E} qx - a(\frac{1}{2}k^2 q - \frac{1}{2}q^3)x^3 + \epsilon dq^2 x^2 - \frac{1}{2}xc q^2 (4k^2 - q^2)x^4,$$

$$B(x, \epsilon) = -\frac{1}{2}aq(4k^2 - q^2)x^3 - \epsilon d(4k^2 - q^2)x^2 + \epsilon c(2k^2 - \frac{3}{2}q^2)(4k^2 - q^2)x^4.$$

Причем

$$A(x, \epsilon) + B(x, \epsilon) \cos^2 \phi = qx + \frac{\partial}{\partial \mu} \Phi(x, \mu, \phi) \Big|_{\mu=\epsilon}.$$

Замена $\phi \rightarrow \phi + \frac{\pi}{2}$ приводит к интегралу ^{7/}

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{(A + B \cos^2 \phi)^n} = 4 \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{[(A+B) - B \cos^2 \phi]^n} = \frac{2\pi}{(A+B)^n} F(\frac{1}{2}, n; 1; \frac{B}{A+B})$$

при условии $A + B > |B| \geq 0$.

Пользуясь свойством гипергеометрической функции

$$F(\alpha, \beta, \gamma; z) = (1-z)^{\gamma-\alpha-\beta} F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta; \gamma; z),$$

получим более удобную формулу

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\phi}{(A + B \cos^2 \phi)^n} = \frac{2\pi}{\sqrt{A(A+B)}} \frac{1}{A^{n-1}} F(\frac{1}{2}, 1-n; 1; \frac{B}{A+B}),$$

где гипергеометрические функции при $n = 1, 2, \dots$ выражаются через конечный ряд по $\frac{B}{A+B}$.

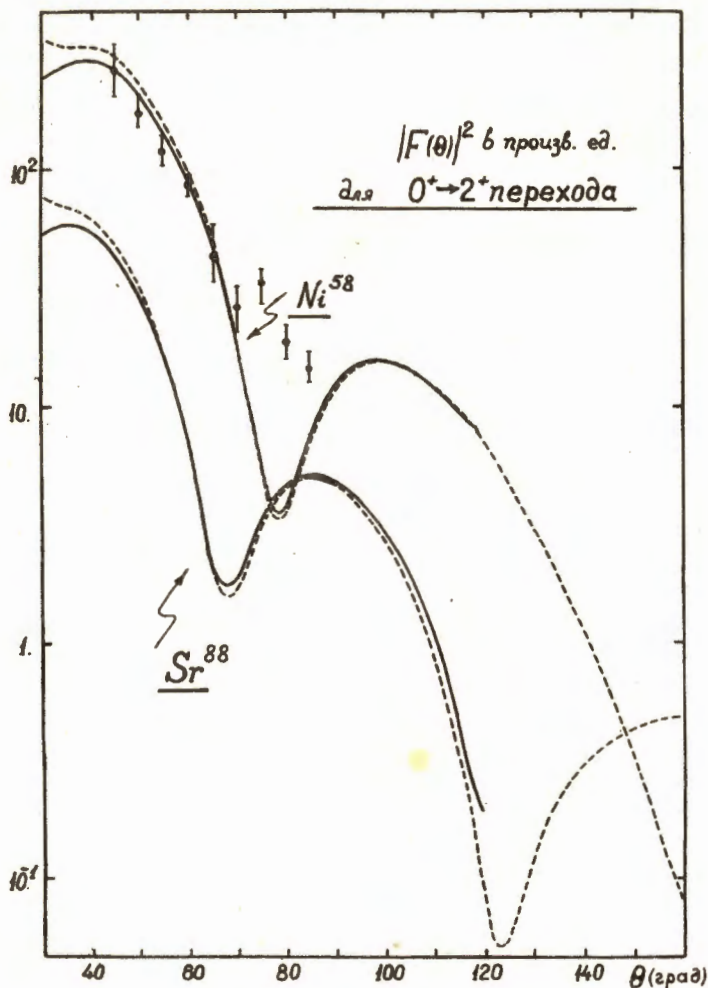
Подставляя в (18) это выражение, получим формулу для G_{L_0} .

Л и т е р а т у р а

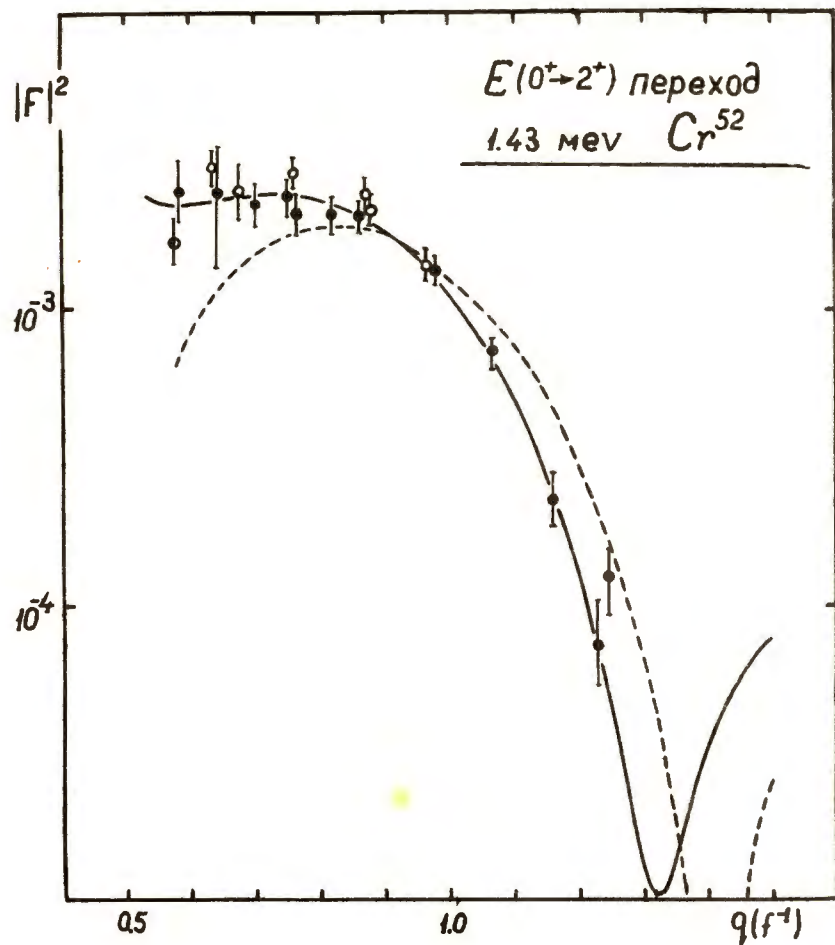
1. И.Ж. Петков, В.К. Лукьянов, Ю.С. Польш. Препринт ОИЯИ, P-2370, Дубна, 1985.
2. D.R.Yennie, F.L.Boos, D.C.Revenhall. Phys.Rev., 137, B882 (1965).
3. A.Bohr, B.Mottelson, Kgl. Dan. Vid. Selsk., Mat.Fys.Medd. 27, No.16 (1953).
4. R.J.Glauber, Lectures in Theoretical Physics, v.1.p. 315, New York, 1959; A.Baker, Phys. Rev. 134, B240 (1964).
5. D.S.Onley, T.A.Griffy, J.T.Reynolds. Phys. Rev., 129, 1689 (1963).
6. J.Bellicard, P.Barreau, D.Blum. Nucl.Phys., 60, 319 (1964).
7. И.С. Градштейн и И.М. Рыжик. Таблицы интегралов. Москва, 1962, стр. 403, Ф.3.682.

Рукопись поступила в издательский

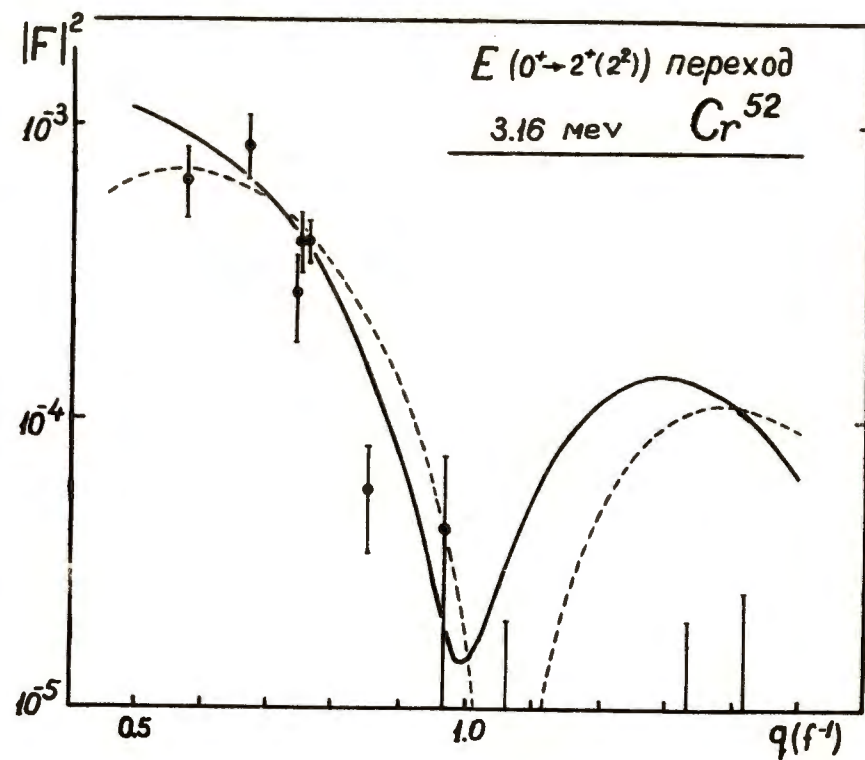
отдел 10 декабря 1985 г.



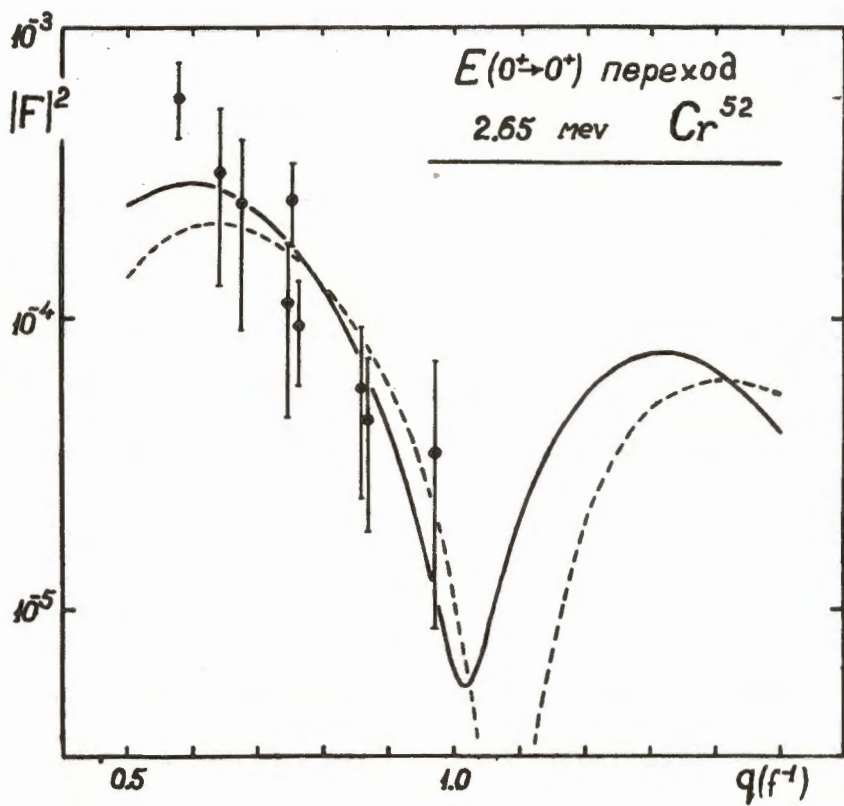
Р и с. 1. Формфакторы неупругого рассеяния электронов на ядрах Ni^{58} и Sr^{88} с возбуждением первых 2^+ -уровней. Расчеты сделаны для фермиевского распределения плотности заряда. Параметры R , b и k те же, что и в работе [5]. Сплошные кривые - расчет по фазовому анализу [5]; пунктирные - по формуле (21).



Р и с. 2. Сравнение с экспериментом ^{16/} формфакторов неупругого рассеяния электронов на ядре Cr^{52} с возбуждением первого 2^+ уровня. Сплошная кривая рассчитана по формуле (21), пунктирная - борновское приближение ($g = 1$, $\Phi = 0$). Параметры фермиевского распределения плотности заряда $R = 3,975 f$ и $b = 0,529 f$ выбраны из сравнения дифференциальных сечений упругого рассеяния электронов ^{16/} с вычисленными в работе ^{17/}.



Р и с. 3. То же, что и на рис. 2, но возбуждается следующий 2^+ уровень ядра Cr^{52} с энергией $E = 3,16 MeV$. Расчеты сделаны по формуле (22).



Р и с. 4. То же, что и на рис. 2, но возбуждается 0^+ уровень ядра Cr^{52} с энергией $E = 2,65 \text{ MeV}$. Расчеты сделаны по формуле (23).