-86
49

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория теоретической физики

Р-249

Я. Фишер, С. Чулли

Анализ рождения частиц на нуклонах по парциальным волнам

г. Дубна, 1958 год

P-249

Я. Фишер, С. Чулли

Анализ рождения частиц на нуклонах по парциальным волнам

В статье указан метод вычисления угловой зависимости S - матрицы для процессов типа $b + N \longrightarrow N' + \sum_{i=1}^{n} b_i'$, где N, N' - нуклон и b и b_i' - π - мезоны или фотоны.

§ 1. Введение

В последнее время все больше исследуются процессы рождения π -мезонов и γ - квантов. Теоретически можно эту проблему рассматривать, в зависимости от числа вылетающих частиц либо как статистический процесс, либо как переход от упругого рассеяния к рождению одной, двух и т.д. частиц. В дальнейшем будет идти речь только о втором методе.

При исследовании какого-либо процесса возможен, вообще говоря, двойной подход: либо мы интересуемся энергетической зависимостью поперечного сечения, либо хотим знать только угловую зависимость S - матрицы. Исследования последнего типа важны особенно для процессов, которые известны не очень хорошо, так как их результаты независимы от принятой модели взаимодействия и вытекают из одной инвариантности S - матрицы. В настоящей статье проводится анализ именно такого рода. Изучена структура S - матрицы в обычном пространстве для процессов типа

$$b + N \longrightarrow N' + \sum_{i=1}^{n} b_i' \qquad /1/$$

где N и N' обозначают нуклон и b и b_i' - бозоны, из которых часть могут быть π - мезоны, и остальные — фотоны.

Такой анализ был сделан для процессов типа $a + b \rightarrow a' + b'$ Ритусом[1], однако простое обобщение его метода для случая большего числа частиц ведет к длинным и громоздким вычислениям. Уже при $n = 2$ в /1/ приходится иметь дело с несколькими сотнями вычисляемых членов и для более высоких n расчеты становятся практически невозможными. Поэтому в дальнейшем показан способ, с помощью которого можно эти вычисления значительно упростить, именно тем, что рождение n частиц сводится к рождению $n-1$ частицы. Он показан на примере $n=2$ в /1/ и для этого случая были также получены угловые операторы в явном виде, однако можно его применить при любом n и значение $n = 2$ было выбрано только для того, чтобы иметь дело с простыми формулами.

§ 2. Метод вычисления и результаты

Пусть начальное состояние характеризуется полным моментом количества движения $\mathcal{J}$, его слагаемой M и, кроме того, спинами и орбитальными моментами присутствующих частиц/и, вообще говоря, способом их сложения/, которые все вместе обозначим как / i /. Тогда начальное состояние можно записать как

$$|\mathcal{J}M(i)\rangle \; .$$

Аналогично, конечное состояние будет описываться вектором

$$|\mathcal{J}'M'(f)\rangle .$$

Оператор, описывающий переход $|\mathcal{J}M(i)\rangle \longrightarrow |\mathcal{J}'M'(f)\rangle$ определяется выражением

$$|\mathcal{J}'M'(f)\rangle\langle\mathcal{J}M(i)|$$

и, стало быть, полную S – матрицу можно выразить как

$$S = \sum a\,(\mathcal{J}'M'(f);\,\mathcal{J}M(i)).\;|\mathcal{J}'M'(f)\rangle\langle\mathcal{J}M(i)| \qquad /2/$$

где $a\,(\mathcal{J}'M'(f);\,\mathcal{J}M(i))$ определяет "ширину" соответствующего канала. В силу инвариантности S – матрицы относительно вращений правая сторона /2/ принимает вид

$$\sum_{\mathcal{J}(f)(i)} a\,(\mathcal{J}(f)(i)) \sum_{M=-\mathcal{J}}^{\mathcal{J}} |\mathcal{J}M(f)\rangle\langle\mathcal{J}M(i)| ,$$

где величина

$$\hat{\mathcal{L}}\,(\mathcal{J}(f)(i)) = \sum_{M=-\mathcal{J}}^{\mathcal{J}} |\mathcal{J}M(f)\rangle\langle\mathcal{J}M(i)| \qquad /3/$$

есть так называемый угловой оператор, который определяет угловую зависимость соответствующего канала реакции $\mathcal{J}(i) \longrightarrow \mathcal{J}(f)$.

Прежде чем искать явный вид /3/ для реакций типа /1/, заметим, что угловые операторы для процессов с фотонами и π – мезонами можно совместно вывести из "производящих" операторов описывающих фиктивный процесс, в котором все фотоны и пионы заменены бесспиновыми частицами с неопределенной четностью /поэтому в формулах /2/ и /3/ мы четность не отмечаем/. Для того, чтобы перейти к π -мезону, достаточно наложить требование внутренней нечетности частицы, и для перехода к фотону на "производящий" угловой оператор подействовать оператором

$$\frac{1}{\sqrt{j(j+1)}}\left(\vec{e}\,\frac{\partial}{\partial\vec{k}}\right)$$

для электрических переходов и оператором $\frac{i}{\sqrt{j(j+1)}}\left([\vec{K}\vec{e}]\cdot\frac{\partial}{\partial\vec{K}}\right)$ -для магнитных переходов, причем $\vec{K}$ и $\vec{e}$ обозначают соответственно импульс и поляризацию фотона.

Таким образом, мы будем заниматься только случаем, когда частицы b и b_i' имеют нулевой спин и неопределенную четность. Тогда набор собственных значений (i) содержит спин нуклона $1/2$ и орбитальный момент ℓ падающей частицы. Символ (f) в рассматриваемом случае двух вылетающих b'– частиц представляет собой или набор

$$\sigma' = 1/2,\ \ell_1',\ \ell_2',\ L, \qquad \text{где} \quad \vec{L} = \vec{\ell_1}' + \vec{\ell_2}',$$

или набор

$$\sigma' = 1/2,\ j,\ \ell_1',\ \ell_2', \qquad \text{где} \quad \vec{j} = \vec{\sigma}' + \vec{\ell_1}',$$

в зависимости от того, как проводилось суммирование конечных моментов.

В первом случае конечное состояние можно записать в виде

$$|JM\ell_1'\ell_2'L\,1/2\rangle = \sum_{M=-J}^{J} C_{JM}^{L\,M-\mu'\,1/2\,\mu'}\ \mathcal{Y}_{L\,M-\mu'}^{\ell_1'\ell_2'} \cdot |1/2\,\mu'\rangle$$

и угловые операторы имеют, по определению /3/, вид

$$\hat{\mathcal{L}}^{I}(J\ell_1'\ell_2'L\,1/2\,\ell\,1/2) = \sum_{\mu'=-1/2}^{1/2}\sum_{\mu=-1/2}^{1/2}\mathcal{L}^{I}_{\mu'\mu}\,|1/2\,\mu'\rangle\langle 1/2\,\mu|, \tag{4}$$

где

$$\mathcal{L}^{I}_{\mu'\mu} = \sum_{M} C_{JM}^{M-\mu';1/2\mu'}\,C_{JM}^{\ell M-\mu;1/2\mu}\,\mathcal{Y}^{\ell_1'\ell_2'}_{L M-\mu'}(\vec{q},\vec{r})\,Y^{*}_{\ell,M-\mu}(\vec{p}) \tag{5}$$

будем называть угловым коэффициентом, и $\mathcal{Y}$ есть собственная функция системы $b_1'\,b_2'$ возникшая как клебш-гордановская комбинация двух сферических Y – функций.

Из формы /5/ видно, что задача сводится в этом случае к простому рассеянию, только с той разницей, что $\mathcal{Y}$ – функцию необходимо выразить через слагающие ее сферические гармоники. Поэтому вычисления делаются так же как и в случае упругого рассеяния, а именно: сумму по $M = -J, -J+1, \ldots +J$ в /5/ можно выбором оси z параллельно импульсу $\vec{p}$ падающей частицы свести к одному члену /т.к. $M-\mu = 0$ в этой системе координат/.

$$C_{J\mu}^{L\,\mu-\mu'\,1/2\,\mu'}\,C_{J\mu}^{\ell 0\,1/2\,\mu}\,\mathcal{Y}^{\ell_1'\ell_2'}_{L\,\mu-\mu'}(\vec{q}\,\vec{r})\sqrt{2\ell+1}$$

и получившийся угловой коэффициент следует подставить в /4/. При этом спиновая часть $|{}^1/_2\,\mu'\rangle\langle{}^1/_2\,\mu|$ оператора $\hat{\mathcal{L}}^{I}$ имеет, как известно, следующую скалярно-векторную структуру:

$$\text{для}\quad \mu'=\mu=\pm {}^1/_2 \qquad \frac{1\pm\sigma_z}{2}$$

$$\text{для}\quad \mu'=-\mu=\pm {}^1/_2 \qquad \frac{\sigma_x\pm i\sigma_y}{2} \qquad /6/$$

Получившийся угловой оператор $\hat{\mathcal{L}}^{I}$ является инвариантом и, следовательно, зная его форму в выбранной системе $z\parallel\vec{p}$, можно его выразить в инвариантном виде.

Последний этап вычислений заключается в выражении Y - функций через полиномы Лагранжа. Результатом являются угловые операторы для всех каналов реакции. В качестве примера приведем один из них, скажем, для случая

$$J=L+{}^1/_2=\ell-{}^1/_2\ ,\quad \ell_1'=1\ ,\quad \ell_2'=L$$

$$\hat{\mathcal{L}}^{I}\,(J\,\ell_1'\,\ell_2'\,L\,{}^1/_2\,\ell\,{}^1/_2)=$$

$$=\frac{+i\sqrt{3}}{\sqrt{\ell_2'(\ell_2'+1)}}\Big\{\Big(\big((\ell_2'+2)(p[q\tau])(p\sigma)-(\sigma[q\tau])\big)\mathcal{P}'_{\ell_2'}+$$

$$+(p[q\tau])([\sigma p][p\tau])\,\mathcal{P}''_{\ell_2'}\Big\}\,,$$

где полиномы Лагранжа $\mathcal{P}_{\ell_2}$ являются функцией от $\cos\vartheta=\vec{p}\cdot\vec{\tau}$ и штрих обозначает производную по этому аргументу.

Более интересным является случай, когда орбитальный момент одной вылетающей частицы складывается сначала со спином нуклона, потому что он включает возможность того, что частицы вылетают из нуклона не одновременно, а постепенно. Тогда можно легко убедиться в том, что содержащиеся в угловом операторе

$$\hat{\mathcal{L}}^{II}\,(J\,\ell_1'\,\ell_2'\,j\,{}^1/_2\,\ell\,{}^1/_2)=\sum_{\mu'=-1/2}^{1/2}\sum_{\mu=-1/2}^{1/2}\mathcal{L}^{II}_{\mu'\mu}\,|{}^1/_2\,\mu'\rangle\langle{}^1/_2\,\mu| \qquad /7/$$

угловые коэффициенты $\mathcal{L}^{II}_{\mu\mu}$, в отличие от $\mathcal{L}^{I}_{\mu'\mu}$, содержат не одну, а две суммы /именно по $M = -\mathcal{J}, \ldots, +\mathcal{J}$ и по $m = -j, \ldots +j$ /, в результате чего после выбора специальной системы координат все же в выражении останется одна сумма, вычисление которой приводит к значительно большему числу членов чем в первом случае. Однако можно показать, что процесс можно рассматривать как упругое рассеяние одной частицы на нуклоне, который, образно говоря, в результате процесса превращается в частицу со спином j, где $\vec{j} = \vec{\ell_1'} + \vec{\sigma}$, и уносит весь момент $\vec{j}$. В самом деле, угловой оператор можно привести к виду

$$\hat{\mathcal{L}}^{II}(\mathcal{J}\ell_1'\ell_2' j\, {}^1\!/_2\, \ell\, {}^1\!/_2) = \sum_{m=-j}^{j}\sum_{\mu=-1/2}^{1/2} \mathcal{K}_{m\mu}\, |j\, m\, \ell_1' \, {}^1\!/_2\rangle\langle {}^1\!/_2\, \mu| \qquad /8/$$

где

$$\mathcal{K}_{m\mu} = \sum_{M=-\mathcal{J}}^{\mathcal{J}} C^{\ell_2\, M-m\, jm}_{\mathcal{J}M}\, C^{\ell\, M-\mu\, {}^1\!/_2 \mu}_{\mathcal{J}M}\, Y_{\ell_2, M-m}(\vec{n})\, Y^*_{\ell, M-\mu}(\vec{p}) \qquad /9/$$

Сравним выражения /7/ и /8/ для угловых операторов $\hat{\mathcal{L}}^{II}$. Видно, что оба содержат четыре суммы, а именно две "маленьких" по $\mu = \pm 1/2$ и $\mu' = \pm 1/2$, и две "больших", по $M = -\mathcal{J} \ldots +\mathcal{J}$ и $m = -j \ldots +j$. В формуле /6/ маленькие суммы содержатся явно и "большие"–неявно, именно в выражении $\mathcal{L}^{II}_{\mu'\mu}$ через сферические гармоники. С другой стороны, выражение /8/ содержит явно одну "большую" и одну маленькую сумму /по m и μ / и неявно-вторую большую и вторую маленькую сумму. В самом деле, сумма по M, содержится в $K_{m\mu}$/см./9// и сумма по M-в $|j m \ell_1'\, 1/2\rangle$. Ввиду того, что устранение "больших" сумм приносит большее упрощение, чем устранение "маленьких", выражение /8/ более выгодно, чем /7/, так как в /8/ суммы по M и по m разделены: сумма по m содержится в /6/ явно и сумма по M неявно, через $K_{m\mu}$ в /7/. Если теперь выбрать ось z параллельно $\vec{p}$, то сумма по M в /9/ сводится к одному члену. Аналогично, если в /8/ выбрать ось z параллельно $\vec{q}$, то сумма по m тоже сводится к одному члену. Единственная трудность заключается в том, что /9/ дает вид $K_{m\mu}$ в системе $z \parallel \vec{p}$, между тем как в /8/ необходимо подставить $K_{m\mu}$ вычисленное в системе $z \parallel \vec{q}$. Следовательно, задача сводится к проведению вращения углового коэффициента от одной системы к другой. Для того, чтобы найти связь между коэффициентами в той и другой системе, рассмотрим фиктивный процесс, который описывается следующим угловым оператором $\hat{K}$:

$$\hat{\mathcal{K}}(\mathcal{J}\ell_2' j\, \ell\, {}^1\!/_2) = \sum_{m=-j}^{j}\sum_{\mu=-1/2}^{1/2} \mathcal{K}_{m\mu}\, |j\, m\rangle\langle {}^1\!/_2\, \mu| \qquad /10/$$

Этот оператор отличается от /8/ только тем, что $|jm\rangle$ есть чистая спиновая функция, между тем как $|jm\ell_1' \, {}^1/_2\rangle$ возникло как комбинация $Y_{\ell_1' m-\mu'}$ и спиновой функции $|{}^1/_2\, \mu'\rangle$. Оператор $|jm\rangle\langle {}^1/_2\mu|$ описывает превращение нуклона в частицу со спином j и имеет т ензорную структуру. Его можно выразить через спин- тензоры Рака, которые преобразуются согласно представлениям группы вращений размерности $j+{}^1/_2$ и $j-{}^1/_2$.

Метод вычисления теперь состоит в следующем: коэффициенты $K_{m\mu}$ найдем по формулам /9/ в системе $z \parallel \vec{p}$ и подставим их в /10/. Так получим явный вид оператора $\hat{\mathcal{K}}$. Теперь проектируем $\hat{K}$ с помощью спин-тензоров Рака /написанных в системе $z \parallel \vec{q}$ /

$$|jm\,(z\parallel\vec{q})\rangle\langle {}^1/_2\mu\,(z\parallel\vec{q})|$$

в систему $z\parallel\vec{q}$ и полученные коэффициенты $\mathcal{K}_{m\mu}(z\parallel\vec{q})$ подставим в /7/, где сумма по m сводится в $z\parallel\vec{q}$ к одному члену.

"Проектирование" представляет собой вычисление шпуров типа

$$\mathcal{K}_{\bar{m}\bar{\mu}}\,(z\parallel\vec{q}) = Sp\,\left(\hat{K}^{+}|\bar{\mu}\,(\vec{q})\rangle\langle\bar{m}\,(\vec{q})|\right). \qquad /11/$$

При этом как $\hat{\mathcal{K}}$, так и $|\bar{\mu}\,(\vec{q})\rangle\langle\bar{m}\,(\vec{q})|$ содержат линейно спин-тензоры Рака T. Для шпуров из квадратичных выражений по T имеются простые соотношения ортогональности типа

$$Sp\,(T_i^{+}T_k) = \delta_{ik}$$

$$Sp\,(T_{ik}^{+}\;T_{\ell m}) = {}^1/_2\,(\delta_{i\ell}\,\delta_{km} + \delta_{im}\,\delta_{k\ell})$$

$$i,k,\ell,m = x,y,z$$

благодаря которым вычисления довольно просты. Получившееся выражение /11/ следует подставить в /8/ и результат записать в инвариантном виде.

Практические вычисления были сделаны для $j={}^1/_2$ и $j={}^3/_2$. Для $j={}^1/_2$ спин-тензоры Рака совпадают с операторами /6/ и представляются квадратными матрицами 2-го порядка. Для $j={}^3/_2$ они представлены прямоугольными матрицами порядка /2 x 4/. Их явный вид здесь приводить не будем.

В качестве примера приведем опять один из полученных угловых операторов:

$$\mathcal{J} = \ell_2' + 3/2 = \ell - 1/2 \qquad \ell_1' = 1 \qquad j = 3/2$$

$$\hat{\mathcal{L}}^{II}(\mathcal{J}\ell_1'\ell_2' j\, 1/2\, \ell\, 1/2) = \frac{\sqrt{3/2}}{\sqrt{(2\ell_2'+2)(2\ell_2'+3)}} \Big\{ -(\ell_2'+1)(\ell_2'+2)(3(\vec{p}\vec{q})(\vec{p}\cdot\vec{\sigma}) - (\vec{\sigma}\vec{q}))\mathcal{P}_{\ell_2'} +$$

$$+ 2(\ell_2'+2)((\vec{p}\vec{q})(\vec{\sigma}\cdot\vec{P}_x) - (\vec{P}_x\vec{q})(\vec{\sigma}\cdot\vec{p}))\mathcal{P}'_{\ell_2} - ((\vec{P}_x\vec{q})(\vec{\sigma}\cdot\vec{P}_x) - (\vec{P}_y\vec{q})(\vec{\sigma}\cdot\vec{P}_y))\mathcal{P}''_{\ell_2} \Big\}$$

где $\qquad \vec{P}_x = \vec{\tau} - \vec{p}\,(\vec{p}\,\vec{n}), \qquad \vec{P}_y = [\vec{p}\cdot\vec{n}]$

и полиномы Лагранжа $\mathcal{P}_{\ell_2}$ являются функциями $(\vec{p}\cdot\vec{n})$.

Результаты вычислений можно найти в более подробной статье, которая будет опубликована позже.

§ 3. Заключение

В работе дан метод вычисления угловых операторов для реакций, содержащих большее число частиц.

Вычислением угловых операторов данного процесса сделан первый шаг по пути изучения S - матрицы. Вторым шагом является проведение того же самого анализа в изотопическом пространстве. Таким анализом мы в настоящее время и занимаемся. Метод получения соответствующих "изотопических угловых операторов" аналогичен. Разница заключается в том, что при наличии фотонов S-матрица не скаляр, а сумма скаляра и третьей компоненты вектора. В результате этого там, где в обычном пространстве есть один угловой оператор, в изотопическом пространстве имеется один скаляр и три векторных оператора. Это увеличивает число формул, однако методика вычислений этим не усложняется, так как вычисление можно проводить совершенно автоматически.

Третьим шагом является построение теории взаимодействия и оно, конечно, выходит за рамки настоящей работы и применяемых в ней методов. Для этого построения применяют разнообразную методику, в настоящее время-чаще всего дисперсионные соотношения или уравнения Чу-Лоу. Однако следует подчеркнуть, что для полного анализа реакции необходимо сделать первые два шага, так как только тогда можно сравнить теорию с экспериментом. В самом деле, если угловой анализ дает явный вид оператора $\hat{\mathcal{L}}(\mathcal{J}(f)(i))$ /см./3// и теория взаимодействия дает вид S - матрицы, то наблюдаемый на эксперименте коэффициент $a(\mathcal{J}(f)(i))$ определяется теоретически формулой

$$a(\mathcal{J}(f)(i)) = \int S^{+} \hat{\mathcal{L}}(\mathcal{J}(f)(i)),$$

где $\int$ обозначает интеграл по всем непрерывным и сумму по всем дискретным переменным. Аналогичное положение имеется в изотопическом пространстве.

Авторы благодарны Г.В.Ефимову за обсуждение ряда вопросов и проф.Ху Нину, проф.Ш.Цицейка, проф.Я.С.Смородинскому за многочисленные полезные дискуссии.

Литература

1. В.И. Ритус. ЖЭТФ, 32 , 1536, /1957/.

Работа поступила в издательский отдел 22 октября 1958 года.