

С 324
Е-912

Журн., 1966, т. 4, в. 2,
с. 432-442.

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P-2485



Г.В. Ефимов

АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА
ЕВКЛИДОВЫХ АМПЛИТУД

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

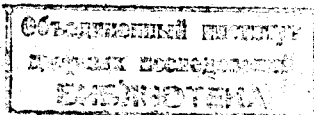
1965

P-2485

Г.В. Ефимов

АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА
ЕВКЛИДОВЫХ АМПЛИТУД

Направлено в журнал "Ядерная физика"



1. Введение. Постановка задачи

В недавно предложенной автором процедуре регуляризации неперенормируемых теорий^{/1/}, а также в исследовании теорий с существенно нелинейным взаимодействием^{/2/} главной задачей является доказательство унитарности в высших приближениях теории возмущений. Для решения этой проблемы нам будет достаточно рассмотреть следующую задачу. Пусть задан некоторый произвольный граф Фейнмана с n внешними линиями. Построим в четырехмерном евклидовом импульсном пространстве амплитуду, соответствующую этому графу. Будем считать n внешних импульсов q_i евклидовыми, удовлетворяющими закону сохранения $q_1 + \dots + q_n = 0$. Каждой внутренней линии поставим в соответствие пропагатор:

$$D(\ell^2) = \frac{V(\ell^2)}{\ell^2 + m^2}. \quad (1.1)$$

Здесь ℓ — евклидов 4-импульс. Функция $V(\zeta)$ является целой в плоскости комплексного ζ , убывающей достаточно быстро при $\text{Re } \zeta \rightarrow +\infty$. Тогда амплитуда, соответствующая заданному графу, описывается интегралом вида

$$F = \int \dots \int \prod_i d^4 \ell_i \prod_j \frac{V_j(k_j^2)}{k_j^2 + m_j^2}. \quad (1.2)$$

Здесь k_j — евклидов 4-импульс, соответствующий данной линии в диаграмме; m_j — масса соответствующей частицы. Интегрирование в (1.2) проводится по четырехмерному евклидовому импульсному пространству; ℓ_i — 4-импульсы, по которым проводится интегрирование.

Этот интеграл хорошо сходится, так как предполагается, что функции $V_j(k^2)$ достаточно быстро убывают при $k^2 \rightarrow +\infty$.

Мы будем считать, что евклидова амплитуда F (1.2) совпадает (с точностью до постоянного множителя) с реальной амплитудой, которая соответствует процессу, описываемому тем же самым графом Фейнмана, в евклидовой области пространственно-подобных внешних импульсов p_i , от которых зависит реальная амплитуда, т.е. в той области, где можно считать

$$p_i p_j = -q_i q_j, \quad (1.3)$$

Здесь

$$p_i p_j = (p_i)_0 (p_j)_0 - (p_i)_1 (p_j)_1 - (p_i)_2 (p_j)_2 - (p_i)_3 (p_j)_3,$$

$$q_i q_j = (q_i)_1 (q_j)_1 + (q_i)_2 (q_j)_2 + (q_i)_3 (q_j)_3 + (q_i)_4 (q_j)_4.$$

Переход в физическую область внешних импульсов p_j должен осуществляться аналитическим продолжением амплитуды по соответствующим инвариантным импульсным переменным. При этом необходимо помнить, что все массы имеют отрицательные мнимые добавки $m_j = m_j - i\epsilon$.

Необходимо подчеркнуть, что в случае, когда $V_j(k^2) = 1$ или являются просто полиномами по k^2 , амплитуда F в (1.2) совпадает с реальной псевдоевклидовой амплитудой в указанной выше области пространственно-подобных внешних импульсов, поскольку в этом случае евклидова и псевдоевклидова формулировки эквивалентны^{/3/}. Заметим, что анализ Ландау^{/4/} особенностей амплитуд в теории возмущений начинается именно с выражения для амплитуды в евклидовой метрике.

Итак, наша задача состоит в изучении аналитических особенностей амплитуды F в (1.2) по инвариантным импульсным переменным. Легко показать, что по сравнению с аналогичной амплитудой скалярной теории амплитуда F не имеет дополнительных особенностей, связанных с наличием функций $V(k^2)$. Действительно, после параметризации Фейнмана получим:

$$F = (N-1)! \int_0^1 \dots \int_0^1 d\alpha_1 \dots d\alpha_N \delta(1 - \sum_{i=1}^N \alpha_i) \int \dots \int \frac{\prod_i d^4 \ell_i \prod_j V_j(k_j^2)}{[\sum_j \alpha_j (k_j^2 + m_j^2)]^N}, \quad (1.4)$$

где N - число внутренних линий.

Путем преобразования переменных интегрирования из выражения, стоящего в знаменателе, всегда можно устранить члены, линейные по отношению к ℓ_i , после чего получим (мы точно следуем рассуждениям Ландау^{/4/})

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j (k_j^2 + m_j^2) = \phi(\alpha, q_1, q_2, m^2) + K(\alpha, \ell'). \quad (1.5)$$

Здесь K - однородная квадратичная форма от новых переменных интегрирования ℓ' с коэффициентами, зависящими только от параметров α ; а ϕ - неоднородная квадратичная форма от векторов q_j , характеризующих свободные концы рассматриваемой диаграммы.

Так как квадратичная форма ϕ зависит от скалярных произведений $q_i q_j$, то с учетом (1.3) получаем в точности исходное выражение, с которого начинал Ландау при выводе своих известных уравнений^{/4/}.

Зависимость числителя от внешних импульсов не может привести ни к каким дополнительным особенностям в конечной области инвариантных импульсных переменных, поскольку в числителе стоит целая функция от скалярных произведений $q_i q_j$ и параметров α_j .

Остается, однако, очень важный вопрос о величине скачков на соответствующих разрезах у функции F . Этот вопрос непосредственно связан с унитарностью S -матрицы теории. Мы докажем следующее свойство амплитуды F , известное как правило Кутхосского^{/5/}. Пусть граф, соответствующий амплитуде F , может быть разбит на два блока F_I и F_{II} , соединенных r внутренними линиями (см. рис. 1).

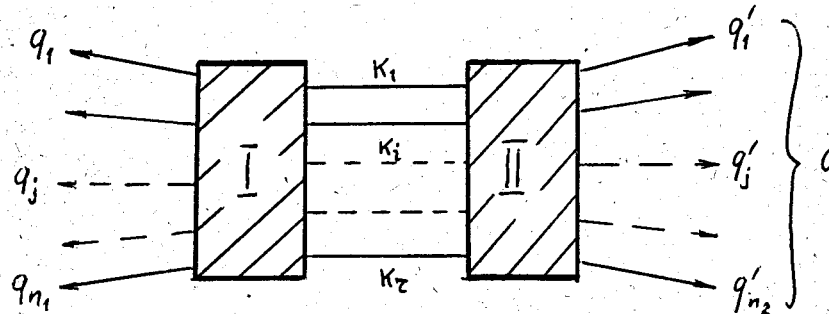


Рис. 1.

$$F = \int \dots \int dk_1 \dots dk_r F_I(q, k_1) \prod_{\nu=1}^r \frac{V_\nu(k_\nu^2)}{k_\nu^2 + m_\nu^2} F_{II}(q', k_1) \delta(q - k_1 - \dots - k_r). \quad (1.6)$$

Здесь через q_j ($j=1, \dots, n_1$) и q'_j ($j=1, \dots, n_2$) обозначены внешние импульсы соответствующих блоков I и II, при этом выполняется $q = q'_1 + \dots + q'_{n_2} = -(q_1 + \dots + q_{n_1})$ ($n = n_1 + n_2$ - число внешних линий). Функции $F_I(q_j, k_1)$ и $F_{II}(q'_j, k_1)$ описывают блоки I и II; они зависят от скалярных произведений векторов q_j , q'_j и k_1 .

Тогда амплитуда F , рассматриваемая как функция от комплексного переменного $z = -q^2$, имеет связанную с данным разбиением линию ветвления, начинающуюся в точке

$$z = (m_1 + \dots + m_n)^2, \quad (1.7)$$

а скачок функции F на этом разрезе дается формулой:

$$\Delta F(z) = i(2\pi)^n \prod_{\nu=1}^n V_{\nu}(-m_{\nu}^2) \int d^4 k_1 \dots \int d^4 k_r \prod_{\nu=1}^r \theta(k_{\nu 0}) \delta(m_{\nu}^2 + k_{\nu}^2) \times \\ \times \delta^{(4)}(q - \vec{k}_1 - \dots - \vec{k}_r) F_I(q_j, \vec{k}_1) F_{II}(q'_j, \vec{k}_1). \quad (1.8)$$

Здесь под \vec{k}_1 понимаются четырехмерные векторы с компонентами $(k_1, i k_{10})$, так что $k_1^2 = k_1^2 - k_{10}^2$ и $(\vec{k}_1, q_j) = k_1 q_j + i k_{10} q_{j4}$, а $d^4 k_1 = d k_1 d k_{10}$. Вектор $\vec{q} = (q, i q_0)$ удовлетворяет соотношению $q^2 = q^2 - q_0^2 = -z$. Под функциями $F_I(q_j, \vec{k}_1)$ и $F_{II}(q'_j, \vec{k}_1)$ следует понимать аналитическое продолжение к соответствующим значениям скалярных аргументов (q_j, \vec{k}_1) , (q'_j, \vec{k}_1) исходных функций $F_I(q_j, k_1)$ и $F_{II}(q'_j, k_1)$, описывающих блоки I и II.

Если эта формула справедлива, тогда унитарность в вышеупомянутых теориях /1,2/ доказывается чрезвычайно просто.

При доказательстве мы воспользуемся методом, по идее сходным с методом, предложенным в работе /8/.

Мы сначала докажем формулу (1.8) для амплитуды с двумя промежуточными линиями, а затем по индукции докажем ее для амплитуд с произвольным числом промежуточных линий.

2. Диаграмма с двумя промежуточными линиями

В этом параграфе рассмотрим амплитуду F , которая может быть представлена в виде двух блоков, соединенных двумя промежуточными линиями, как показано на рис. 2. Этой диаграмме соответствует следующая амплитуда:

$$F = \int d^4 k_1 \int d^4 k_2 \frac{V_1(k_1^2)}{k_1^2 + m_1^2} \frac{V_2(k_2^2)}{k_2^2 + m_2^2} \delta^{(4)}(q - k_1 - k_2) \times \\ \times F_I(q_j, k_1, k_2) F_{II}(q'_j, k_1, k_2). \quad (2.1)$$

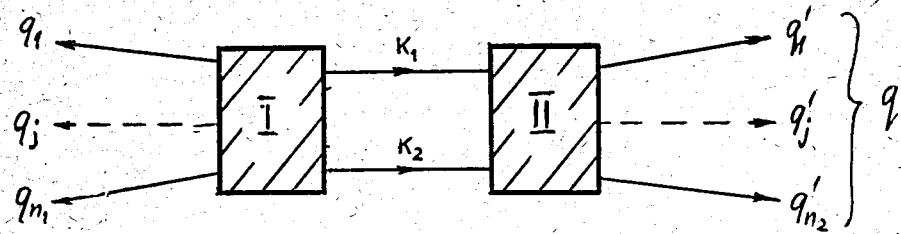


Рис. 2.

Удобно ввести обозначение:

$$\Phi(\vec{k}_1, k_2) = F_I(q_j; k_1, k_2) F_{II}(q'_j; k_1, k_2), \quad (2.2)$$

поскольку $k_1 + k_2 = q$. Здесь через \vec{k}_1 и k_{14} обозначены соответственно три пространственных и четвертая компоненты вектора k_1 .

Нам будет интересовать особенность амплитуды F по переменной $z = -q^2$, возникающая только из-за наличия у диаграммы двух промежуточных линий. Особенности, связанные с аналитическими свойствами блоков I и II, учитываться не будут. Ниже мы коснемся вопроса, как особенности блоков I и II могут повлиять на ход нашего доказательства.

Сделаем в интеграле (2.1) замену переменных, положив $x_1 = k_1^2$ и $x_2 = k_2^2$. Получим после некоторых вычислений:

$$F(z) = \int_0^{\infty} \frac{dx_1 V_1(x_1)}{x_1 + m_1^2} f(x_1, z), \quad (2.3)$$

$$f(x_1, z) = \int_{x_2}^{x_2^+} \frac{dx_2 V_2(x_2)}{x_2 + m_2^2} B(x_1, x_2, z), \quad (2.4)$$

$$B(x_1, x_2, z) = \int d^4 k_1 \int d^4 k_2 \delta(x_1 - k_1^2) \delta(x_2 - k_2^2) \delta^{(4)}(q - k_1 - k_2) \Phi(\vec{k}_1, k_2) = \quad (2.5)$$

$$= \frac{\lambda(x_1, x_2, -z)}{8(-z)} \int d\Omega_n \Phi\left(\vec{n} \sqrt{\frac{\lambda(x_1, x_2, -z)}{4(-z)}}, \frac{x_2 - x_1 + z}{2(-z)}\right),$$

$$z = -q^2 \quad (2.6)$$

$$x_2^\pm = (\sqrt{x_1} \pm \sqrt{-z})^2 \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \lambda(a, b, c) &= 2ab + 2bc + 2ca - a^2 - b^2 - c^2 = \\ &= [(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 - c]^2 [c - (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2]. \end{aligned} \quad (2.8)$$

При интегрировании в (2.5) координатные оси выбраны таким образом, что вектор q имеет только четвертую компоненту ($q_1 = 0, q_4 = \sqrt{q^2}$). Интегрирование в последнем интеграле в (2.5) проводится по всем направлениям трехмерного единичного вектора \hat{n}

Функции $B(x_1, x_2, z)$, $f(x_1, z)$ и $F(z)$ зависят от других аргументов, связанных со структурой блоков I и II. Мы не будем явно указывать эту зависимость, так как эта зависимость нас сейчас интересовать не будет.

Все выписанные выше выражения определены лишь в области $z < 0$. Наша задача — аналитически продолжить функцию $F(z)$ в область $z > 0$ и найти особенности этой функции, связанные только с наличием двух выделенных промежуточных линий.

Прежде всего рассмотрим особенности подинтегрального выражения в (2.3). У подинтегральной функции имеется полюс в точке $x_1 = -m_1^2$, а функция $f(x_1, z)$ имеет особенности в комплексной плоскости x_1 . Эти особенности возникают, когда один из пределов интегрирования в (2.4) совпадает с полюсом в точке $x_2 = -m_2^2$, что приводит к соотношению

$$(\sqrt{x_1} \pm \sqrt{-z})^2 = -m_2^2 \quad (2.9)$$

откуда

$$x_1^\pm = -(m_2 \pm i\sqrt{-z})^2 \quad (2.9a)$$

Проследим, как движутся особенности x_1^+ и x_1^- в плоскости комплексного переменного x_1 и как они приводят к появлению особенности у функции $F(z)$. При z отрицательном x_1^+ и x_1^- комплексны. Когда z начинает увеличиваться, достигает нулевого значения и становится положительным, особенности x_1^+ и x_1^- опускаются на отрицательную вещественную ось: $x_1^\pm = -(m_2 \pm \sqrt{z})^2$ (мы принимаем $\sqrt{-z} = i\sqrt{z}$

при $z > 0$). С увеличением z точка x_1^+ движется вдоль вещественной оси налево и никак не влияет на особенности функции $F(z)$. Точка x_1^- движется вдоль вещественной оси направо, при $z = m_2^2$ достигает точки $x_1 = 0$, огибает ее по часовой стрелке (поскольку масса m_2 имеет отрицательную мнимую добавку $m_2 - i\epsilon$), захватывает контур интегрирования и при $z > m_2^2$ движется налево. Все вышесказанное показано на рис. 3. Заметим, что точка $z = m_2^2$ не является особенностью функции $F(z)$, так как оба направления обхода точки $x_1 = 0$ особенностью x_1

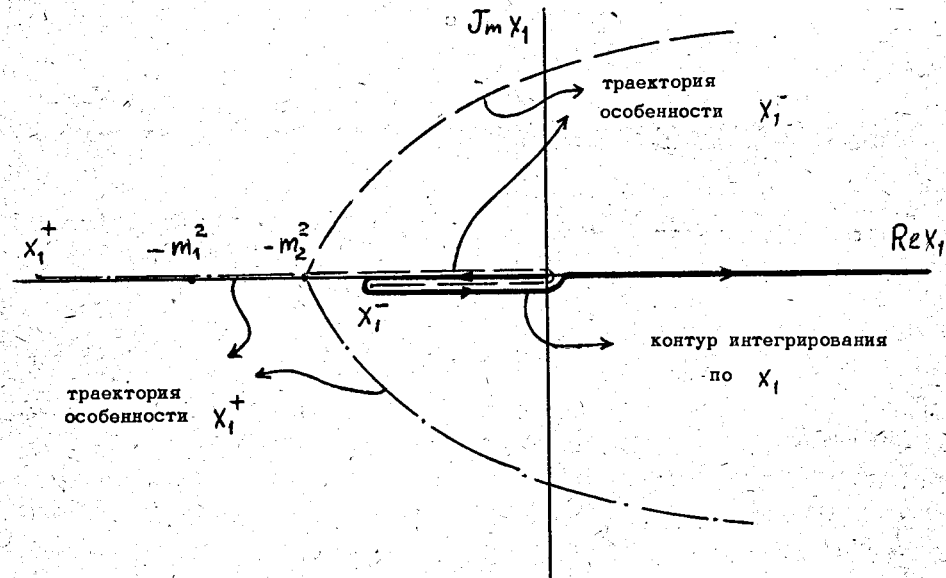


Рис. 3.

приводит к одинаковому результату. Особенность у функции $F(z)$ возникает, когда точка x_1^- , ведущая контур интегрирования, совпадает с полюсом $x_1 = -m_1^2$; происходит так называемый зажим контура интегрирования. Имеем:

$$-(m_2 - \sqrt{z})^2 = -m_1^2 \quad (z > m_2^2), \quad (2.10)$$

^{x)} Заметим, что особенности у функции $F(z)$ при $z=0$ не существует, так как другой выбор знака $\sqrt{-z} = i\sqrt{z}$ приводит к тому же самому результату.

откуда

$$z = (m_1 + m_2)^2. \quad (2.10a)$$

Это и есть положение особенности у амплитуды $F(z)$, связанной с наличием двух промежуточных линий у графа, показанного на рис. 2. При $z > (m_1 + m_2)^2$ контур интегрирования по x_1 показан на рис. 4. Обозначим этот контур через L_+ .

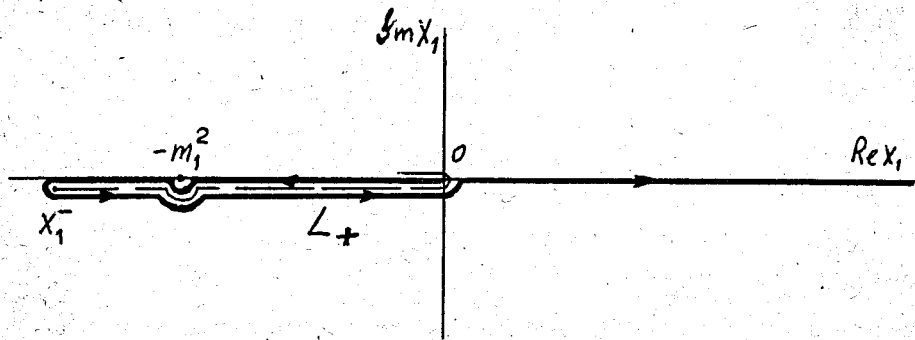


Рис. 4.

Для вычисления скачка функции $F(z)$ на разрезе, начинающемся в точке $z = (m_1 + m_2)^2$, необходимо вычислить функцию на другом берегу разреза. Для этого следует взять интеграл для $F(z)$ с другим обходом особенности. Этот контур, который мы обозначим через L_- , показан на рис. 5. Для дальнейшего удобно представить

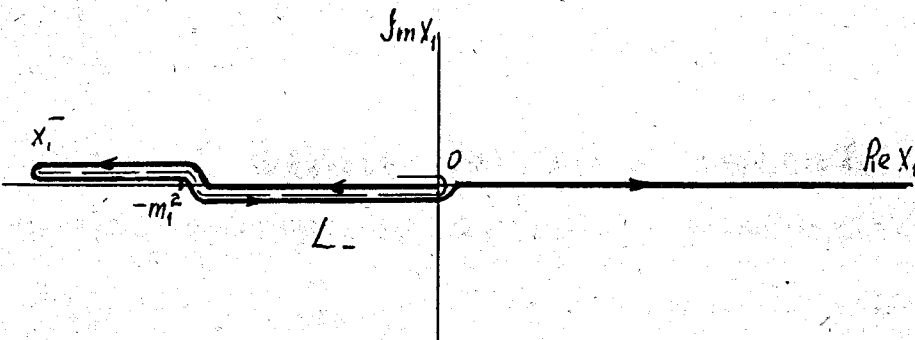


Рис. 5.

функцию $F(z)$ на верхнем и нижнем берегах разреза в виде:

$$F_{\pm}(z) = \int_{l_{\pm}} \frac{dx_1 V_1(x_1)}{x_1 + m_1^2} \Delta f(x_1, z) + \int_0^{\infty} \frac{dx_1 V_1(x_1)}{x_1 + m_1^2} f(x_1, z), \quad (2.11)$$

$$\Delta f(x_1, z) = f_+(x_1, z) - f_-(x_1, z). \quad (2.11a)$$

Здесь через l_{\pm} обозначены контуры, показанные на рис. 6, а через $f_{\pm}(x_1, z)$ обозначены значения функции $f(x_1, z)$ на верхнем и нижнем берегу разреза этой функции, начинающегося в точке x_1^- .

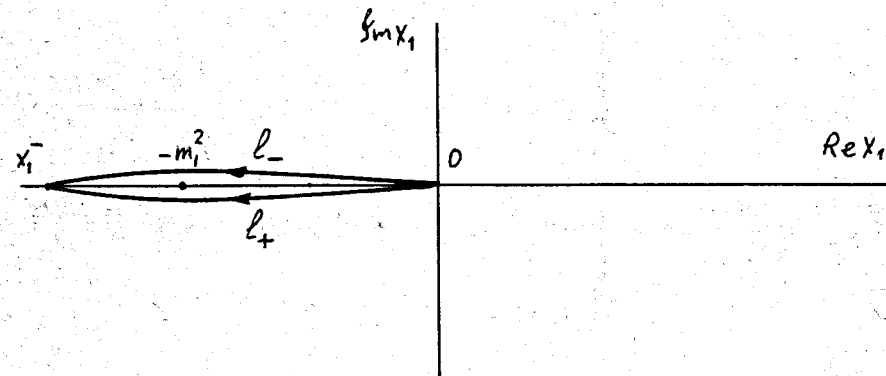


Рис. 6.

Из (2.11) легко вычислить скачок функции $F(z)$. Имеем

$$\Delta F(z) = F_+(z) - F_-(z) = \int_l \frac{dx_1 V_1(x_1)}{x_1 + m_1^2} \Delta f(x_1, z), \quad (2.12)$$

где через l обозначена разность контуров $l_+ - l_-$. Таким образом интеграл (2.12) представляет собой интеграл по замкнутому контуру вокруг полюса $x_1 = -m_1^2$. Это дает

$$\Delta F(z) = -2\pi i \theta(z - (m_1 + m_2)^2) V_1(-m_1^2) \Delta f(-m_1^2, z). \quad (2.13)$$

Займемся теперь вычислением $\Delta f(-m_1^2, z)$. Для этого вернемся к выражению (2.4). При $z > 0$ имеем $x_2 = (\sqrt{x_1} - i\sqrt{z})^2$. Нас интересует скачок функции $f(x_1, z)$ при отрицательных значениях x_1 . Полагая $\sqrt{x_1} = -i\sqrt{-x_1}$, поскольку контур интегрирования по x_1 мы поворачивали по часовой стрелке около точки $x_1 = 0$,

имеем $x_2^+ = -(\sqrt{-x_1} + \sqrt{z})^2$. На рис. 7 показано движение точек x_2^+ и соответственно контура интегрирования.

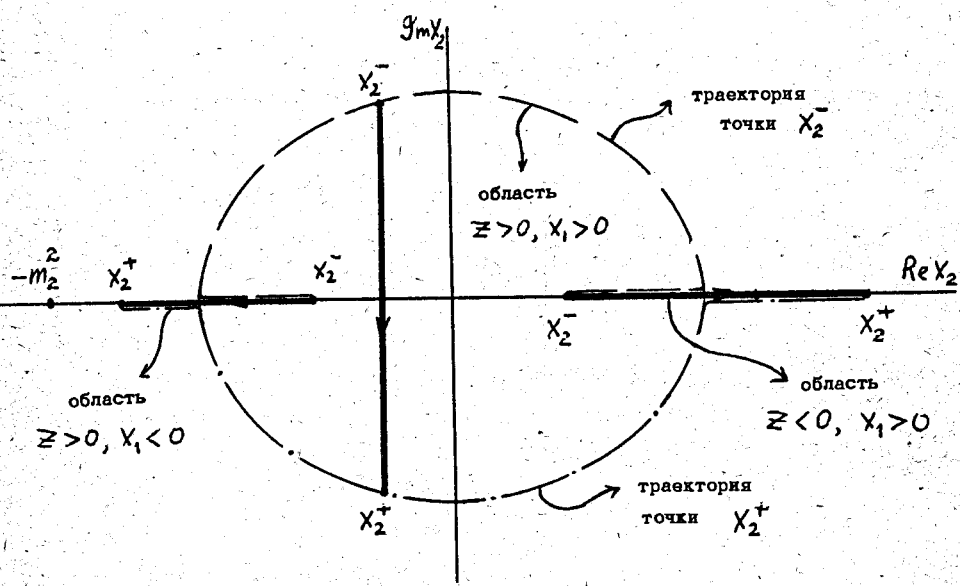


Рис. 7.

Особенность x_1^- возникает, когда верхний предел $x_2^+ = -(\sqrt{-x_1} + \sqrt{z})^2$ совпадает с полюсом $x_2 = -m_2^2$:

$$-(\sqrt{-x_1} + \sqrt{z})^2 = -m_2^2 \quad \text{или} \quad x_1 = -(m_2 - \sqrt{z})^2. \quad (2.14)$$

Значения функции $f(x_1, z)$ на верхнем и нижнем берегах разреза получаются, если интегралы для $f(x, z)$ вычислять по контурам C_+ и C_- , связанным с двумя возможными обходами особенности. Эти контуры показаны на рис. 8. Имеем в итоге

$$f_{\pm}(x_1, z) = \int_{C_{\pm}} \frac{dx_2 V_2(x_2)}{x_2 + m_2^2} V(x_1, x_2, z). \quad (2.15)$$

Отсюда легко можно найти

$$\Delta f(x_1, z) = f_+(x_1, z) - f_-(x_1, z) = \int_C \frac{dx_2 V_2(x_2)}{x_2 + m_2^2} V(x_1, x_2, z) = -2\pi i V_2(-m_2^2) V(x_1, -m_2^2, z), \quad (2.16)$$

где контур $C = C_+ - C_-$ является замкнутым контуром вокруг полюса $x_2 = -m_2^2$. Поэтому интеграл равен вычету подынтегральной функции в точке $x_2 = -m_2^2$.

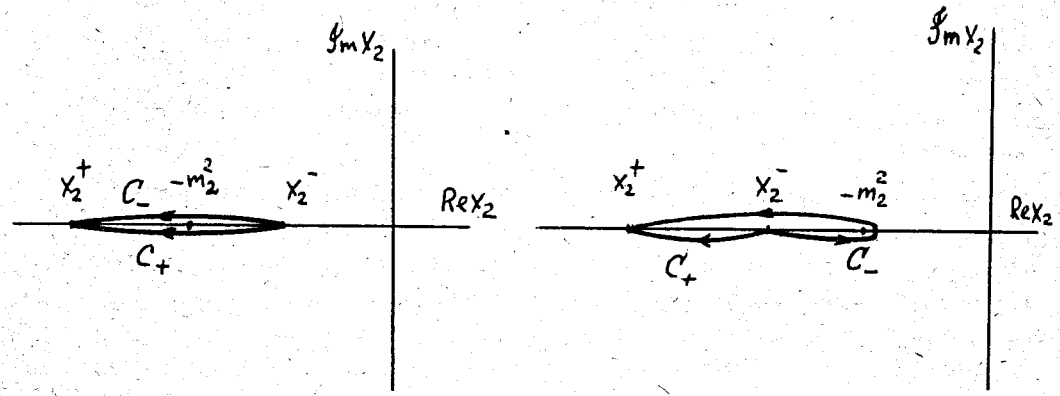


Рис. 8.

Подставляя (2.16) в (2.13), получаем

$$\Delta F(z) = -(2\pi)^2 (z - (m_1 + m_2)^2) V_1(-m_1^2) V_2(-m_2^2) V(-m_1^2, -m_2^2, z). \quad (2.17)$$

Преобразуем $V(-m_1^2, -m_2^2, z)$. Возвращаясь к (2.5), можно заметить, что функция $\sqrt{\lambda(x_1, x_2, -z)}$ меняет знак, когда происходит движение контура интегрирования, как показано на рис. 7. Это связано с тем, что можно записать:

$$\sqrt{\lambda(x_1, x_2, -z)} = \sqrt{(x_2^+ - x_2)(x_2 - x_2^-)} = \sqrt{x_2^+ - x_2} \sqrt{x_2 - x_2^-}$$

в области $x_1 > 0$ и $z < 0$. Легко видеть, что при переходе в область $z > 0$ и $x_1 < 0$ происходит вращение контура интегрирования около точек ветвления этой функции, что приводит к появлению множителя $(-i)^2 = -1$. Итак,

$$\sqrt{\lambda(x_1, x_2, -z)} = -|\sqrt{\lambda(x_1, x_2, -z)}| \quad (2.18)$$

при $x_1 < 0$, $x_2 < 0$ и $0 < z < (m_1 + m_2)^2$. При переходе по переменной z через порог $z = (m_1 + m_2)^2$ получим

$$\sqrt{\lambda(-m_1^2, -m_2^2, -z)} = -i \sqrt{-\lambda(m_1^2, m_2^2, z)} \quad (z > (m_1 + m_2)^2), \quad (2.18)$$

так как нас интересует значение функции на верхнем берегу разреза. Окончательно с учетом (2.18) и (2.19) функция $B(-m_1^2, -m_2^2, z)$ может быть записана в виде:

$$B(-m_1^2, -m_2^2, z) = \frac{-i \sqrt{-\lambda(m_1^2, m_2^2, z)}}{8z} \int d\Omega_{\alpha} \Phi(\vec{n} \sqrt{\frac{-\lambda(m_1^2, m_2^2, z)}{4z}}, i \frac{z + m_1^2 - m_2^2}{2\sqrt{z}}). \quad (2.20)$$

Подставляя (2.20) в выражение для скачка (2.17), легко убедиться, что полученная формула совпадает с (1.8) в случае $r=2$, если выбрать систему координат, где вектор \vec{q} имеет только четвертую компоненту отличной от нуля ($q=0, q_0=\sqrt{z}$). Таким образом, мы доказали формулу (1.8) для случая диаграмм с двумя промежуточными линиями.

Заметим, что для нашего доказательства достаточно считать, что аналитические свойства блоков I и II таковы, что особенности функций F_I и F_{II} не совпадают с изучаемыми особенностями, или существует способ, благодаря которому их можно разделить, например, в случае, если совпадение особенностей происходит только при определенных значениях масс или инвариантных импульсных переменных, от которых зависят функции F_I и F_{II} , а при других значениях этих переменных особенности разделяются. Такое положение как раз имеет место в каждом порядке теории возмущений для каждой отдельной диаграммы Фейнмана.

Выпишем еще одну формулу, которая нам понадобится в дальнейшем. Так как нами показано, что функция $F(z)$ имеет разрез, начинающийся в точке $z=(m_1+m_2)^2$ и скачок $\Delta F(z)$ на этом разрезе известен и, кроме того, $F(z)$ обладает конечным числом особых точек, то функция $F(z)$ может быть представлена в следующем виде:

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(m_1+m_2)^2}^{\infty} \frac{dz' \Delta F(z')}{z' - z - i\epsilon} + \frac{A(z)}{A(z')}, \quad (2.21)$$

где через $A(z)$ и $B(z)$ обозначены некоторые функции, которые обладают всеми особенностями функции $F(z)$, кроме данного разреза. Конкретный вид функций $A(z)$ и $B(z)$ в дальнейшем для нас не будет существенен.

Еще заметим, что функции $F(z)$, $\Delta F(z)$, $A(z)$ и $B(z)$ зависят от других импульсных переменных, которые мы для простоты не ввели в обозначения.

3. Диаграмма с произвольным числом промежуточных линий

В предыдущем параграфе мы доказали формулу (1.8) для случая $r=2$. Рассмотрим теперь диаграмму Фейнмана, которая может быть разбита на два блока, соединенных $(r+1)$ промежуточными линиями (рис. 1). Этой диаграмме соответствует амплитуда (1.8), где вместо r надо подставить $(r+1)$. Перепишем это выражение в виде:

$$F = \int \frac{d^4 k_{r+1} V_{r+1}(k_{r+1})}{k_{r+1}^2 + m_{r+1}^2} \int d^4 k P(q_j, q'_j, k_{r+1}, k) \delta^{(4)}(q - k_{r+1} - k), \quad (3.1)$$

$$P(q_j, q'_j, k_{r+1}, k) = \int d^4 k_1 \dots \int d^4 k_r \prod_{\nu=1}^r \frac{V_{\nu}(k_{\nu})}{k_{\nu}^2 + m_{\nu}^2} \delta^{(4)}(k - k_1 - \dots - k_r) \times$$

$$\times F_I(q_j, k_1) F_{II}(q'_j, k_1).$$

Обозначения здесь те же, что и прежде.

Предположим теперь, что функция $P(q_j, q'_j, k_{r+1}, k)$, рассматриваемая как функция комплексного переменного $\zeta = -k^2$, имеет линию разреза, начинающуюся в точке $\zeta = (m_1 + \dots + m_r)^2$, связанную с наличием r промежуточных линий, причем скачок на этой линии разреза дается формулой (1.8). В случае $r=2$ это утверждение было доказано в предыдущем параграфе. Наша задача состоит в том, чтобы показать, что, если формула (1.8) справедлива для r промежуточных линий, то она будет справедлива и в случае $(r+1)$ линий.

Согласно замечанию в конце предыдущего параграфа, функцию $P(q_j, q'_j, k_{r+1}, k)$ можно записать в виде:

$$P(q_j, q'_j, k_{r+1}, k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(m_1+\dots+m_r)^2}^{\infty} \frac{d\sigma^2 \Delta P(\sigma^2)}{\sigma^2 + k^2 - i\epsilon} \frac{A(-k^2, \dots)}{A(\sigma^2, \dots)} B(-k^2, \dots); \quad (3.3)$$

Функции $A(-k^2, \dots)$ и $B(-k^2, \dots)$ имеют ту же природу, что и в (2.21). Для простоты мы не вводим никаких дополнительных индексов и не указываем всех переменных, от которых эти функции зависят.

Подставим (3.3) в (3.1), получим

$$F = \int \frac{d^4 k_{r+1} V_{r+1}(k_{r+1}^2)}{k_{r+1}^2 + m_{r+1}^2} \int d^4 k \delta^{(4)}(q - k - k_{r+1}) \times$$

$$\times \left\{ \frac{1}{2\pi i} \int \frac{d\sigma^2 \Delta P(\sigma^2)}{\sigma^2 + k^2 - i\epsilon} \frac{A(-k^2, \dots)}{A(\sigma^2, \dots)} + B(-k^2, \dots) \right\}.$$

(3.4)

Интеграл с функцией $B(-k^2, \dots)$ не дает вклада в особенность, происходящую из-за наличия $(r+1)$ промежуточных линий, которые мы рассматриваем. Опуская этот член, перепишем амплитуду в виде:

$$F = \frac{1}{2\pi i} \int_{(m_1 + \dots + m_r)^2}^{\infty} d\sigma^2 R(\sigma^2, q^2),$$

(3.5)

$$R(\sigma^2, q^2) = \int \frac{d^4 k_{r+1} V_{r+1}(k_{r+1}^2)}{k_{r+1}^2 + k_{r+1}^2} \int \frac{d^4 k \Delta P(\sigma^2)}{k^2 + \sigma^2} \frac{A(-k^2, \dots)}{A(\sigma^2, \dots)} \delta^{(4)}(q - k - k_{r+1}).$$

(3.6)

Легко видеть, что функция $R(\sigma^2, q^2)$ имеет в точности структуру диаграммы с двумя промежуточными линиями, которая была рассмотрена в предыдущем параграфе. Поэтому для нее справедлива формула (2.21):

$$R(\sigma^2, q^2) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{d\kappa^2 \Delta R(\kappa^2, \sigma^2)}{\kappa^2 + q^2 - i\epsilon} \frac{A'(-q^2, \dots) + B'(-q^2, \sigma^2, \dots)}{A'(\kappa^2, \dots)},$$

(3.7)

где

$$\Delta R(\kappa^2, \sigma^2) = i(2\pi)^2 \theta(\kappa^2 - (\sigma + m_{r+1})^2) V_{r+1}(-m_{r+1}^2) \times$$

$$\times \int d^4 \bar{k}_{r+1} \int d^4 \bar{k} \theta(k_{r+1,0}) \delta(\bar{k}_{r+1}^2 + m_{r+1}^2) \theta(k_0) \delta(\bar{k}^2 + \sigma^2) \delta^{(4)}(p - \bar{k}_{r+1} - \bar{k}) \times$$

$$\times \Delta P(\sigma^2),$$

$$\text{где } p^2 = \kappa^2.$$

Подставляя (3.7) в (3.5) и меняя порядок интегрирования по σ^2 и κ^2 , полу-

чим

$$F = \frac{1}{2\pi i} \int_{(m_1 + \dots + m_{r+1})^2}^{\infty} \frac{d\kappa^2 \Delta F(\kappa^2)}{\kappa^2 + q^2 - i\epsilon} \frac{A'(-q^2, \dots)}{A'(\kappa^2, \dots)} + B''(-q^2, \dots),$$

(3.8)

где

$$\Delta F(\kappa^2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(m_1 + \dots + m_r)^2}^{(\kappa - m_{r+1})^2} d\sigma^2 \Delta R(\kappa^2, \sigma^2).$$

(3.10)

Воспользовавшись формулами (3.8) и (1.8), получим:

$$\Delta F(\kappa^2) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(m_1 + \dots + m_r)^2}^{(\kappa - m_{r+1})^2} d\sigma^2 i(2\pi)^2 \theta(\kappa^2 - (\sigma + m_{r+1})^2) V_{r+1}(-m_{r+1}^2) \times$$

$$\times \int d^4 \bar{k}_{r+1} \int d^4 \bar{k} \theta(k_{r+1,0}) \delta(\bar{k}_{r+1}^2 + m_{r+1}^2) \theta(k_0) \delta(\bar{k}^2 + \sigma^2) \delta^{(4)}(p - \bar{k}_{r+1} - \bar{k}) \times$$

$$\times i(2\pi)^4 \prod_{\nu=1}^r V_{\nu}(-m_{\nu}^2) \int d^4 k_1 \dots \int d^4 k_r \prod_{\lambda=1}^r \theta(k_{\lambda 0}) \delta(k_{\lambda}^2 + m_{\lambda}^2) \times$$

(3.11)

$$\times \delta^{(4)}(k - \bar{k}_1 - \dots - \bar{k}_r) F_I(q, k_1) F_{II}(q', k_1) =$$

$$= i(2\pi)^{r+1} \prod_{\nu=1}^{r+1} V_{\nu}(-m_{\nu}^2) \int d^4 k_1 \dots \int d^4 k_{r+1} \prod_{\lambda=1}^{r+1} \theta(k_{\lambda 0}) \delta(k_{\lambda}^2 + m_{\lambda}^2) \times$$

$$\times \delta^{(4)}(p - \bar{k}_1 - \dots - \bar{k}_{r+1}) F_I(q, k_1) F_{II}(q', k_1),$$

так как

$$\int_{(m_1 + \dots + m_r)^2}^{(\kappa - m_{r+1})^2} d\sigma^2 \int d^4 \bar{k} \theta(k_0) \delta(\bar{k}^2 + \sigma^2) \delta^{(4)}(p - \bar{k}_{r+1} - \bar{k}) = 1.$$

Окончательное выражение для $\Delta F(k^2)$ полностью совпадает с формулой (1.8), где вместо γ взято $(\gamma+1)$. Это доказывает справедливость формулы (1.8).

Следует заметить, что проделанные здесь вычисления справедливы с точностью до оговорок, сделанных в конце предыдущего параграфа.

З а к л ю ч е н и е

Итак, нами доказано правило Кутковского для нормальных порогов в случае произвольных диаграмм Фейнмана, когда диаграммы записываются в евклидовом импульсном пространстве, а в качестве функций обрезания выбираются целые функции.

Отметим еще раз, что в случае $V_1(k^2)=1$ проведенное доказательство является доказательством правила Кутковского для обычных диаграмм квантовой теории поля, поскольку псевдоевклидовы интегралы для амплитуд физических процессов в евклидовой области пространственно-подобных внешних импульсов всегда могут быть записаны в евклидовом пространстве, а переход в физическую область всегда можно рассмотреть как аналитическое продолжение по инвариантным импульсным переменным.

Что касается аномальных особенностей диаграмм, то как следует из раздела 1, они возникают обычным образом при учете аналитических свойств блохов I и II. Например, появление аномальной особенности для обыкновенной треугольной или четырехугольной диаграммы можно проследить методом, аналогичным использованному в /7/, представляя соответствующую амплитуду в виде (2.21) и изучая затем особенности функции $\Delta F(z)$ по другим инвариантам, от которых она зависит.

Наконец, отметим, что, как следует из приведенного доказательства, введение в целой функции обрезания $V(k^2)$, нарушающей эквивалентность евклидовой и псевдоевклидовой формулировок теории, не нарушает аналитических свойств теории в любой конечной области импульсных переменных. Справедливость правила Кутковского делает довольно простым доказательство унитарности в упоминавшихся выше теориях /1,2/.

В заключение автор выражает глубокую благодарность Б.Н.Валуеву, В.П.Павлову, И.Т.Годорову за полезные обсуждения.

Л и т е р а т у р а

1. Г.В.Ефимов. ЯФ, 2, 180 (1965).
2. Г.В.Ефимов. Препринт ОИЯИ Р-1960, Дубна 1965.

3. J. Schwinger. Phys. Rev. 115, 721 (1959).

4. Л.Д.Ландау. ЖЭТФ, 37, 82 (1959).

5. R. E. Kutkosky, J. Math. Phys., 1, 429 (1960).

6. А.П.Рудик, Ю.А.Симонов. ЖЭТФ, 45, 1017 (1963).

7. В.Н.Грибов, Г.С.Данилов, И.Т.Дятлов. ЖЭТФ, 41, 924 (1961); ЖЭТФ 41, 1215 (1961).

Рукопись поступила в издательский отдел
4 декабря 1965 г.