ЯФ, 1966, т. 4, в. 4, с. 846-849.
5/II-66г.

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
Дубна

Р - 2474

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Као Тя

"ОБЩИЙ ПРОПАГАТОР" ДЛЯ МЕЗОНОВ СО СПИНАМИ 2, 1, 0 В ТЕОРИИ СИММЕТРИИ

1965

Р-2474

Као Ти

"ОБЩИЙ ПРОПАГАТОР" ДЛЯ МЕЗОНОВ СО СПИНАМИ 2, 1, 0 В ТЕОРИИ СИММЕТРИИ

Направлено в ЯФ

Пропагатор для частицы со спином 2 был найден в работах [1]. В настоящем письме мы покажем, что можно получить этот пропагатор и в теории симметрии, пользуясь формализмом, изложенным в работах [2,3]. Кроме того, мы покажем, что пропагаторы мезонов, обладающих разными спинами 2,1,0, но принадлежащих к одному и тому же представлению, можно объединить в одном "общем пропагаторе". Это новое обстоятельство появляется только в теории симметрии.

Как известно, низшими представлениями группы $\tilde{U}(12)$, содержащими мезоны со спином 2, являются 4212^{+} и 5940^{+} [4,5]. Для определенности мы рассматриваем представление 5940^{+} (для представления 4212^{+} можно применить показанную ниже процедуру с некоторыми несущественными изменениями при симметризации). Было показано в работе [4], что представление 5940^{+} имеет следующее разложение относительно подгруппы $SU(3)\times\tilde{U}(4)$:

$$\phi^{(CD)}_{(AB)} = \frac{1}{8}[1-\frac{1}{m}\hat{p})\gamma\rho C^{-1}]^{\gamma\delta}[C\gamma_{\theta}(1+\frac{1}{m}\hat{p})]_{\alpha\beta}[F^{(cd)}_{(ab)}]_{\rho\theta}+\dots \qquad (1)$$

где ... обозначает опущенные члены, описывающие только мезоны со спинами 1,0. Написанный выше член интересен тем, что он содержит мезоны со всеми спинами 2,1,0. В (1) $A \equiv (\alpha, a)$, $B \equiv (\beta, b)$, $C \equiv (\gamma, c)$, $D \equiv (\delta, d)$; $\alpha, \beta, \gamma, \delta, a, b, c, d$ – спиновые и унитарные индексы; $\hat{p} \equiv \gamma_{\mu} p_{\mu}$. Тензор $F_{\rho\theta}$ удовлетворяет следующему уравнению [4,5]:

$$p_{\rho} F_{\rho\theta} = p_{\theta} F_{\rho\theta} = 0 \qquad (2)$$

и имеет следующий явный вид [5]:

$$F_{\rho\theta} = S_{(\rho\theta)} + A_{[\rho\theta]} + \frac{1}{\sqrt{3}}(\delta_{\rho\theta} + \frac{p_{\rho}p_{\theta}}{m^2})\phi , \qquad (3)$$

где симметричный тензор $S_{(\mu\nu)}$ (со шпуром, равным нулю) описывает мезон со спином 2, антисимметричный тензор $A_{[\mu\nu]}$ – мезон со спином 1 и скаляр ϕ –мезон со спином 0.

Следуя работе [2], напишем "пропагатор" для волновой функции частицы, состоящей из n кварков, в следующем виде:

$$\langle \phi\bar{\phi} \rangle_+ = \frac{P_+(p)}{p-m} + \frac{P_-(p)}{-p-m} + \frac{P_0(p)}{-m}, \tag{4}$$

где

$$P_\pm(p) = \tfrac{1}{2}\left(1 \pm \frac{i\hat{p}}{p}\right)_1 \times \tfrac{1}{2}\left(1 \pm \frac{i\hat{p}}{p}\right)_2 \times \dots \times \tfrac{1}{2}\left(1 \pm \frac{i\hat{p}}{p}\right)_n ,$$

$$P_0(p) = 1 - P_+(p) - P_-(p); \quad p = (p^2)^{1/2} . \tag{5}$$

В нашем случае $n = 4$. Подставив (5) в (4), получим:

$$\langle \phi\bar{\phi} \rangle_+ = \frac{(m+i\hat{p})_1(m+i\hat{p})_2(m-i\hat{p})_3(m-i\hat{p})_4}{8m^3(p^2-m^2)} - \frac{\hat{p}_1\hat{p}_2\hat{p}_3\hat{p}_4}{8p^2m^3} + \tag{6}$$
$$+ \frac{\hat{p}_1\hat{p}_2\hat{p}_3 + \hat{p}_1\hat{p}_2\hat{p}_4 - \hat{p}_1\hat{p}_3\hat{p}_4 - \hat{p}_2\hat{p}_3\hat{p}_4}{8p^2m^2} - \frac{7}{8m} .$$

В (6) индексы 1,2 относятся к кваркам и индексы 3,4 – к антикваркам. Три последних члена в (6) дают так называемые контактные члены в пропагаторе. Эти контактные члены можно исключить путем доопределения хронологического произведения (Т-произведения) в точке $x = y$ в конфигурационном пространстве [6]. Таким образом, только первый член в (6) представляет физический интерес. Из (6) имеем:

$$(p^2-m^2)\langle \phi^{(CD)}_{(AB)} \bar{\phi}^{(GH)}_{(EF)} \rangle_+ \Big|_{p^2=m^2} = 2m\,\tfrac{1}{2}[\Lambda^G_{+A}\Lambda^H_{+B} + \Lambda^H_{+A}\Lambda^G_{+B}][\Lambda^C_{-E}\Lambda^D_{-F} + \Lambda^D_{-E}\Lambda^C_{-F}] , \tag{7}$$

где

$$\Lambda_\pm = \tfrac{1}{2}\left(1 \pm \frac{i}{m}\hat{p}\right).$$

Формула (7) дает числитель "общего пропагатора" для всего представления 5940^+. Чтобы получить истинный пропагатор для мезона с определенным спином, мы должны проектировать (7) на нужное состояние. Сначала исключим опущенные члены, изображаемые точками в (1). Это можно сделать с помощью оператора:

$$(P^{BA,\,c'd'}_{DC,\,a'b'})_{\mu'\nu'} = \frac{1}{8}\left[\left(1+\frac{i}{m}\hat{p}\right)\gamma_{\nu'}C^{-1}\right]^{\beta a}\left[C\gamma_{\mu'}\left(1-\frac{i}{m}\hat{p}\right)\right]_{\delta\gamma}\delta^a_{a'}\delta^b_{b'}\delta^{c'}_c\delta^{d'}_d . \tag{8}$$

Пользуясь (8), получим

$$[F^{(c'd')}_{(a'b')}]_{\mu'\nu'} = (P^{BA,c'd'}_{CD,a'b'})_{\mu'\nu'}\,\phi^{(CD)}_{(AB)} .$$

Чтобы проектировать (3) на состояние с определенным спином, мы введем три оператора P_2, P_1, P_0 (нижний индекс означает значение спина). Эти операторы определяются с помощью следующих условий:

$$P_i P_j = \delta_{ij} P_j \quad ; \quad \sum_{i=0}^{2} P_i = 1 .$$

Учитывая (2) и (3), имеем:

$$(P_2)_{\mu\nu\mu'\nu'} = -\frac{1}{3}\delta_{\mu\nu}\,\delta_{\mu'\nu'} + \tfrac{1}{2}(\delta_{\mu\mu'}\,\delta_{\nu\nu'} + \delta_{\mu\nu'}\delta_{\nu\mu'}) - \frac{1}{3}\delta_{\mu'\nu'}\frac{p_\mu p_\nu}{m^2} , \tag{9}$$

$$(P_1)_{\mu\nu\mu'\nu'} = \tfrac{1}{2}(\delta_{\mu\mu'}\,\delta_{\nu\nu'} - \delta_{\mu\nu'}\delta_{\nu\mu'}) , \tag{10}$$

$$(P_0)_{\mu\nu\mu'\nu'} = \frac{1}{3}\delta_{\mu\nu}\,\delta_{\mu'\nu'} + \frac{1}{3}\delta_{\mu'\nu'}\frac{p_\mu p_\nu}{m^2} . \tag{11}$$

Теперь мы уже можем из (1) получить только тензор $S_{(\mu\nu)}$, описывающий мезон со спином 2. Легко проверить, что

$$[S^{(c'd')}_{(a'b')}]_{(\mu\nu)} = (P_2)_{\mu\nu\mu'\nu'}\,(P^{BA,c'd'}_{DC,a'b'})_{\mu'\nu'}\,\phi^{(CD)}_{(AB)} .$$

Проектируя (7) на состояние мезона со спином 2 с помощью операторов (8), (9), мы получим после длинных, но элементарных вычислений:

$$(p^2 - m^2) < [S^{(c'd')}_{(a'b')}]_{(\mu\nu)}\,[\bar S^{(g'h')}_{(e'f')}]_{(\lambda\sigma)} >_+ \Big|_{p^2=m^2} =$$

$$= [-\frac{1}{3}\theta_{\mu\nu}\,\theta_{\lambda\sigma} + \tfrac{1}{2}(\theta_{\mu\lambda}\theta_{\nu\sigma} + \theta_{\mu\sigma}\theta_{\nu\lambda})]\,\Delta^{(g'h')(c'd')}_{(a'b')(e'f')} \tag{12}$$

где

$$\theta_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} + \frac{p_\alpha p_\beta}{m^2} ,$$

$$\Delta^{(g'h')(c'd')}_{(a'b')(e'f')} = (\delta^{g'}_{a'}\,\delta^{h'}_{b'} + \delta^{h'}_{a'}\,\delta^{g'}_{b'})(\delta^{c'}_{e'}\,\delta^{d'}_{f'} + \delta^{d'}_{e'}\,\delta^{c'}_{f'}) .$$

Пeрвый множитель формулы (12) является как раз числителем пропагатора для частицы со спином 2. Перейдем к пропагатору для частицы со спином 1. Учитывая (2), имеем

$$A_{[\rho\theta]} = \frac{1}{\sqrt{2}}\,\epsilon_{\rho\theta\lambda\sigma}\,\frac{1}{m}\,p_\lambda\,A_\sigma ,$$

отсюда

$$A_\sigma = \frac{1}{2\sqrt{2}}\,\epsilon_{\rho\theta\lambda\sigma}\,\frac{1}{m}\,p_\lambda\,A_{[\rho\theta]} . \tag{13}$$

Проектируя (7) на состояние мезона со спином 1 с помощью (8) (10) и (13), получаем известную формулу

$$(p^2 - m^2) < [A^{(c'd')}_{(a'b')}]_\sigma \, [\bar{A}^{(g'h')}_{(e'f')}]_\lambda >_+ \Big|_{p^2 = m^2} = \theta_{\sigma\lambda} \, \Delta^{(g'h')(c'd')}_{(a'b')(e'f')}$$

Для скалярного мезона можно получить тривиальный пропагатор $\frac{1}{p^2 - m^2}$ (унитарная часть опущена) с помощью (7), (8), (11). Понятно, что можно получить пропагаторы для мезонов со спином 1,0 из опущенных членов в (1) подходящими проекционными операторами.

В заключение автор искренне благодарит Нгуен Ван Хьеу за ценные замечания.

Литература

1. C.Fronsdal. Suppl. Nuovo Cim., 9, 416 (1958); G.Monan, S.C.Agarwal. Nuovo Cim., 37, 430 (1965); K.I.Barnes. J.Math. Phys. 6, 788 (1965).

2. G.S.Guralnik, T.W.B.Kibble. Phys.Rev., 139, B712 (1965).
3. Нгуен Ван Хьеу. ЯФ, 2, 517 (1965).
4. A.Salam, R.Delbourgo, J.Strathdee, M.A.Rashid. Proc. Roy. Soc., 385,312 (1965).
5. Као Ти, Нгуен Ван Хьеу, Бронислав Средниава. Препринт ОИЯИ, Р-2400, Дубна,1965.
6. Н.Н. Боголюбов, Д.В. Ширков. Введение в теорию квантованных полей, Москва, 1957.

Рукопись поступила в издательский отдел
27 ноября 1965 г.