

СЗ41.а

Б-21

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Узв. АИ ССЕР, сер. Узв.,
1966, т. 30, № 7, с. 1118-1123



P-2473

ЛАБОРАТОРИЯ ГЕОРЕГИОНАЛЬНОЙ ФИЗИКИ

Е.Б. Бальбуцев, И.Н. Михайлов

О РАВНОВЕСНОЙ ДЕФОРМАЦИИ
ТЯЖЕЛЫХ ЯДЕР

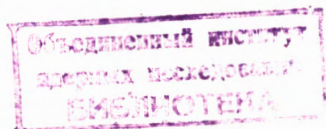
1965

P-2473

Е.Б. Бальбуев, И.Н. Михайлов

О РАВНОВЕСНОЙ ДЕФОРМАЦИИ
ТЯЖЕЛЫХ ЯДЕР

Направлено в Изв. АН СССР



В настоящей работе изучается точность расчетов равновесной деформации ядер, в которых пробные функции, аппроксимирующие функцию основного состояния, не обладают вращательной симметрией. Такие функции используются при рассмотрении вопроса о деформации тяжелых ядер (см., например, /1/, /2/) по отношению к которым весьма трудно применять операцию проектирования функций на состояние с фиксированным моментом количества движения. Ниже приведены оценки, основанные на приближенном учете проектирования функций, показывающие, что восстановление вращательной симметрии волновых функций может заметно изменить теоретические предсказания как относительно параметров равновесной деформации ядер (в частности, привести к изменению в определении переходной области от сферических к деформированным ядрам), так и данные о форме и глубине минимума энергии.

Для отыскания желаемых приближенных выражений рассмотрим формальное разложение функции, аппроксимирующей волновую функцию ядра, по точным собственным функциям системы (гамильтониан ядра H считаем известным)

$$\Psi = \sum_{I, M; \alpha} C_{I, M; \alpha} \Psi_{I, M; \alpha} \quad (1)$$

(Здесь I, M - квантовые числа момента количества движения в с.п.м. ядра; α - прочие квантовые числа, характеризующие состояние ядра $\Psi_{I, M; \alpha}$).

Предположим, что в гамильтониане ядра H можно выделить часть, описывающую вращение, т.е. что оператор H представим в виде:

$$H = H_0 + \frac{\hbar^2 I^2}{2J} \quad (2)$$

Для точных собственных значений энергии ядра можно при этом написать выражение

$$E_{I, \alpha} = E_{\alpha} + \frac{\hbar^2}{2J} I(I+1) \quad (3)$$

Собственные функции оператора H_0 вырождены по значениям квантовых чисел I и M и описывают свойства внутреннего движения нуклонов в ядрах. Приближенные выражения для них могут быть получены варьированием среднего значения энергии

$$\epsilon = \langle \Psi, H_0 \Psi \rangle = \sum_{I, \alpha} P_{I, \alpha} E_{\alpha} \quad (4)$$

$$\left(P_{I, \alpha} = \sum_M |C_{I, M; \alpha}|^2 \right),$$

которое отличается от среднего $E = \langle \Psi, H \Psi \rangle$, рассматриваемого обычно, на величину

$$\Delta E = E - \epsilon = \langle \Psi, \frac{\hbar^2}{2J} \vec{I}^2 \Psi \rangle = \sum_{I, \alpha} P_{I, \alpha} \frac{\hbar^2 I(I+1)}{2J(I, \alpha)} \quad (5)$$

(формула написана для четно-четного ядра, основное состояние которого обладает моментом $I=0$ и в предположении, что $\langle \Psi, \vec{I} \Psi \rangle = 0$; обобщение результатов, представленных ниже, на другие случаи тривиально).

Выражение для ΔE определяет энергию, которую следует затратить, чтобы образовать волновой пакет, описывающий ориентированное состояние ядра. Эта энергия складывается из энергии вращения ядра в состояниях с разными значениями момента количества движения I , из которых образовано состояние Ψ . Величина этой энергии существенно зависит от деформации ядра и значения моментов инерции ротационных полос, а поэтому определение параметров волновой функции внутреннего движения нуклонов на основании вариационного уравнения $\delta \bar{E} = 0$ может оказаться неточным.

Простую оценку для ΔE можно получить, если предположить, что волновые функции Ψ , приближенно описывающие волновую функцию деформированного ядра, таковы, что все значения $J(I, \alpha)$, входящие в формулу (5), равны моменту инерции основной ротационной полосы J_0 . Иными словами, мы предполагаем, что волновой пакет, описывающий деформированное и ориентированное ядро, включает не очень большое число ротационных состояний одной-двух ротационных полос. Тогда формула (5) может быть переписана в виде^{x)}

$$\Delta E = \frac{\hbar^2}{2J_0} \langle \Psi, \vec{I}^2 \Psi \rangle. \quad (6)$$

Эта величина может быть связана с поправкой, возникающей при проектировании волновых функций на состояния с фиксированными значениями квантовых чисел I, M . При сделанных предположениях относительно функции Ψ , проектирование на состояние с моментом I дает выражение для энергии

$$E_I = \frac{\sum_{\alpha} E_{\alpha} P_{I, \alpha}}{\sum_{\alpha} P_{I, \alpha}} + \frac{\hbar^2 I(I+1)}{2J_0}. \quad (7)$$

^{x)} Этот результат вполне аналогичен полученному в работе /3/ для оценки эффекта проектирования бардиновских функций на состояния с фиксированным числом частиц.

Если $p_{1,\alpha} = p_1 p'_\alpha(I)$, причем $\sum_\alpha p'_{1,\alpha} = 1$, т.е. если состояния с разными значениями I включают одинаковую примесь внутренних возбуждений, то

$$E_1 - \frac{\hbar^2 I(I+1)}{2J_0} = \epsilon.$$

В этом случае ту же величину поправки ΔE можно получить, проектируя функцию Ψ на состояние с моментом $I=0$ и вычисляя $E - E_0$.

Формула (6) позволяет следующим образом оценить эффект проектирования снизу. Пусть функция Ψ соответствует наилучшему разделению вращения ядра и внутреннего движения нуклонов. Тогда для момента инерции ядра может быть использована формула Инглиса

$$J_0 = 2\hbar^2 \sum_\gamma \frac{|\langle 0 | I_x | \gamma \rangle|^2}{E_\gamma - E_0} \quad (8)$$

(для простоты обозначений рассматривается вращение аксиально симметричного ядра относительно оси x), где $\langle 0 | = \Psi^*$, а $|\gamma\rangle (E_\gamma)$ - набор внутренних возбужденных состояний системы (и их энергии) полный вместе с $|0\rangle$. Используя свойства полноты функций $|0\rangle$ и $|\gamma\rangle$ и сравнивая формулы (5) и (8), легко видеть, что ΔE - больше половины энергии возбуждения первого состояния в (8).

Действительно:

$$\Delta E = \frac{1}{2} \frac{\sum_\gamma |\langle 0 | I_x | \gamma \rangle|^2}{\sum_\gamma \frac{|\langle 0 | I_x | \gamma \rangle|^2}{E_\gamma - E}} \geq \frac{1}{2} \min(E_\gamma - E). \quad (9)$$

Оценку величину ΔE для тяжелых ядер можно получить при помощи расчетов для случая, когда волновая функция ядра Ψ аппроксимируется собственной функцией одночастичного оператора H_0 с потенциалом анизотропного гармонического осциллятора

$$H_0 = \sum_{i=1}^A H_i \quad H_i = \frac{p_i^2}{2m} + \frac{m\omega_x^2}{2} x_i^2 + \frac{m\omega_y^2}{2} y_i^2 + \frac{m\omega_z^2}{2} z_i^2. \quad (10)$$

Эффективный метод вычисления средних для такой функции предложен в работе ^{14/}.

Введем обычные обозначения для параметров деформации δ , γ ,

$$\begin{aligned} \omega_x^2 &= \frac{\omega_0^2(\delta)}{1 - \frac{4}{3}\delta \cos(\gamma + \pi/3)} \\ \omega_y^2 &= \frac{\omega_0^2(\delta)}{1 - \frac{4}{3}\delta \cos(\gamma - \pi/3)} \\ \omega_z^2 &= \frac{\omega_0^2(\delta)}{1 + \frac{4}{3}\delta \cos \gamma} \end{aligned} \quad (11)$$

причем $\omega_0(\delta) = \omega_0^0 \left(1 - \frac{4}{3} \delta^2 - \frac{16}{27} \delta^3\right)^{-1/6}$, $\omega_0^0 = \frac{41}{A^{1/3}}$ Мэв.

Стационарные состояния системы A частиц в рассматриваемой модели определяются A известными квантовыми числами n_x , n_y , n_z , а основное состояние характеризуется соотношениями

$$N_x \omega_x = N_y \omega_y = N_z \omega_z, \quad (12)$$

где

$$N_i = \sum_{(A)} (n_i + \frac{1}{2}),$$

а суммирование проводится по всем A частицам. Числа N_i определяют энергию системы с гамильтонианом H_0 , равную $\hbar \sum_{i=1}^3 N_i \omega_i$, которая, таким образом, не зависит в первом приближении от δ и γ .

Величина момента инерции, соответствующая вращению относительно оси x , в рассматриваемом случае равна

$$J_x = \left(1 + \frac{1}{3} \delta\right) J_{\text{ТВ}}^{(x)} \quad (13)$$

$$J_{\text{ТВ}}^{(x)} = \sum_{i=1}^A m \overline{(y_i^2 + z_i^2)}$$

и аналогичные формулы справедливы для J_y и J_z . Для поправки к энергии имеем (с точностью до членов $O(\delta^3)$)

$$\Delta E = \frac{\hbar \omega_0^0}{2} \delta \left(\cos \gamma + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \gamma + \frac{1}{\sqrt{3}} \delta \cos \gamma \sin \gamma + \delta \sin^2 \gamma \right). \quad (14)$$

В частности, для случая аксиальной симметрии ($\gamma = 0$) имеем

$$\Delta E = -\frac{\hbar \omega_0^0}{2} \delta, \quad (14')$$

откуда видно, что неравенство, упоминавшееся выше, в рассматриваемом случае превращается в равенство с точностью до членов $O(\delta^3)$.

Характер полученных оценок поясняют рис. 1-6. Из рассмотрения первых двух рисунков видно, что учет симметрии функции уменьшает энергию системы тем больше, чем больше деформация ядра: поправка возрастает с ростом δ , а при фиксированном δ она увеличивается при переходе от аксиально-симметричной формы к форме без аксиальной симметрии. Таким образом, сравнивая результаты расчетов, проделанных

без учета свойств симметрии функции, с более сложными расчетами, в которых сохранение момента учтено точно, можно утверждать следующее: наличие у определенного ядра деформации (по δ или по γ), установленное в расчетах без учета симметрии функции, будет подтверждено расчетами с учетом этой симметрии. Если по расчетам без учета симметрии деформация отсутствует, но барьер перехода в деформированное состояние невелик, то учет симметрии функции может изменить этот вывод. Во всяком случае учет симметрии приводит к увеличению параметров δ , γ равновесной деформации.

Переходя к обсуждению масштаба эффектов обсудим соответствие полученных выражений и поправок ΔE , которые могут возникнуть при работе с функциями, аппроксимирующими ядра в реальных расчетах (см., например ^{1/1}). Ниже мы ограничиваемся обсуждением ядер с аксиальной симметрией. Оставив вначале вопрос учета остаточного взаимодействия частиц, обсудим результаты введения членов \vec{l}^2 и \vec{l}_s^2 в гамильтониан самосогласованного поля. Известно, что результат расчета момента инерции системы независимых частиц не чувствителен к характеру поля и всегда близок к $J_{ТВ}$. Поэтому нам достаточно обсудить изменение среднего $\langle 0 | \vec{j}^2 | 0 \rangle$. Это среднее определяется только функцией основного состояния $|0\rangle$, а последняя остается неизменной в асимптотическом (при больших δ) приближении при включении \vec{l}^2 и \vec{l}_s^2 членов. При всяком δ изменение $\langle 0 | \vec{l}^2 | 0 \rangle$ от включения \vec{l}_s^2 взаимодействия должно быть меньшим, чем изменение момента инерции J и, следовательно, не является существенным. Для тяжелых ядер, в которых нуклоны заполняют оболочки с большими значениями орбитального момента, спин нуклонов не должен существенно изменять средние параметры, подобные $\langle 0 | \vec{l}^2 | 0 \rangle$.

Таким образом, есть основания считать, что формула (14) достаточно верно передает масштаб поправок и при более реальных предположениях о характере самосогласованного поля ядер. Для того, чтобы оценить эффект взаимодействия частиц, воспользуемся известной формулой теории "парных корреляций", давшей хорошее описание вращательных свойств ядер. Согласно этой теории, момент инерции ядра

$$J = 2 \hbar^2 \sum_{ij} \frac{|\langle i | \hat{J}_x | j \rangle|^2}{E_{ij} - E_0} (u_i v_j - v_i u_j)^2 \quad (15)$$

отличается от соответствующей формулы для системы независимых частиц (1) наличием множителя $(u_i v_j - v_i u_j)^2$ в числителе и (2) заменой энергии состояния частица-дырка энергией (большей) соответствующего двухквазичастичного состояния. Оба эти фактора уменьшают значение J . На величину $\langle 0 | \vec{l}^2 | 0 \rangle$, для которой справедливо разложение

$$\langle 0 | \vec{l}^2 | 0 \rangle = 2 \sum_{ij} |\langle i | \hat{J}_x | j \rangle|^2 (u_i v_j - v_i u_j)^2 \quad (16)$$

действует лишь первый из перечисленных факторов, а поэтому отношение $\Delta E = \frac{\hbar^2 \bar{\Gamma}^2}{2J}$ должно увеличиться в результате замены слэтеровского детерминанта функцией Бардина.

Как показано выше, взаимодействие нуклонов увеличивает поправку к энергии. Ясно также, что роль остаточных взаимодействий должна возрасти с уменьшением деформации ядер (уже в силу возрастания степени вырождения одночастичных состояний). Простую оценку эффекта можно получить, рассмотрев роль остаточных взаимодействий в системе с самосогласованным полем (10). Предполагая, что парные корреляции смешивают только состояния, принадлежащие двум ближайшим к поверхности ферми уровням (многократно вырожденным), получим

$$\Delta E \geq \sqrt{C^2 + \left(\frac{\hbar \omega_0 \delta}{2}\right)^2} = \frac{\hbar \omega_0 \delta}{2} \sqrt{1 + \left(\frac{2C}{\hbar \omega_0 \delta}\right)^2} \quad (17)$$

$$J = J \left[1 + \left(\frac{2C}{\hbar \omega_0 \delta}\right)^2 \right]^{-1/2}$$

Рассматриваемая система далека от реальных ядер, однако можно надеяться, что разумный выбор величины корреляционной функции C даст правильную величину эффекта. Критерием для выбора может служить экспериментальное значение момента инерции какого-либо ядра, равновесная деформация которого известна. Так для W^{182} $\delta_0 = 0,22$, $J/J_{ТВ} = 1/3$. Величина C_0 , найденная подстановкой в (17) $J/J_{ТВ} = 1/3$, равна $C = 0,114 \hbar \omega_0$, что находится в хорошем согласии с вычислениями, приведенными для этого ядра (см., например, ^{15/}). Для поправки к энергии в этом случае получаем $\Delta E_{W^{182}} = 1,24$ Мэв, что на 30% больше результата, полученного по формуле (14').

При уменьшении δ , согласно формуле (17), ΔE стремится к конечной величине, что связано с обращением в нуль выражения (15) для момента инерции. Существенные отклонения от оценок, приведенных выше, для ΔE и, в частности, нарушение неравенства (9), можно ожидать при столь малых деформациях, когда значение момента инерции по формуле (15) не удовлетворяет условию адиабатичности вращения. При характерной для сверхтекучей модели ядра зависимости $J = \delta$ нарушение адиабатичности наступает однако лишь при столь малых значениях δ , когда квадратичные флуктуации этой величины значительно превосходят ее равновесное значение.

Характер полученных нами оценок можно видеть из рис. 7. Формула для ΔE , полученная без учета парных корреляций, явно неточна при малых значениях δ . С другой стороны, поправка, полученная с учетом корреляций (формула (17)), может рассматриваться только как дающая порядок величины эффекта. Точная зависимость ΔE от δ может быть установлена лишь путем трудоемких расчетов. Чтобы продемон-

стрировать чувствительность расчетов к обсуждаемым эффектам на рис. 3-6 приведено сравнение эквипотенциальных поверхностей, полученных по данным работы /1/ с учетом поправки на проектирование (формула (14)) и без нее. Во всех приведенных примерах приближенный учет симметрии функции вызывает появление у деформации с барьером до 0,43 Мэв (Oz^{194}) и увеличивает значение δ , соответствующее равновесной деформации. Интересно проследить зависимость поправки на пространственную симметрию функции при малых δ . В силу неравенства (9) в ядрах с хорошо выраженными парными корреляциями зависимость энергии системы от деформации может иметь резкий спад в окрестности малых δ . Поэтому такие ядра должны обладать отличной от нуля статической деформацией. Однако сделать оценку величины этой деформации на основании приведенных результатов невозможно.

В заключение работы авторы выражают благодарность сотрудникам группы теории ядра Лаборатории теоретической физики ОИЯИ.

Л и т е р а т у р а

1. Preston. Phys. Lett. 13, 246 (1964).
2. D.R.Bes, Z. Szymanski. Nucl. Phys. 28, 42 (1961).
3. S.G.Nilsson. Nucl. Phys. 55, 97 (1964).
4. H.J.Lipkin. Phys. Rev. 108, 191 (1957)
5. Е.М.Бал, И.Н.Михайлов. Известия АН СССР, сер. физ. XXIX, 113 (1965).

Рукопись поступила в издательский отдел
27 ноября 1965 г.

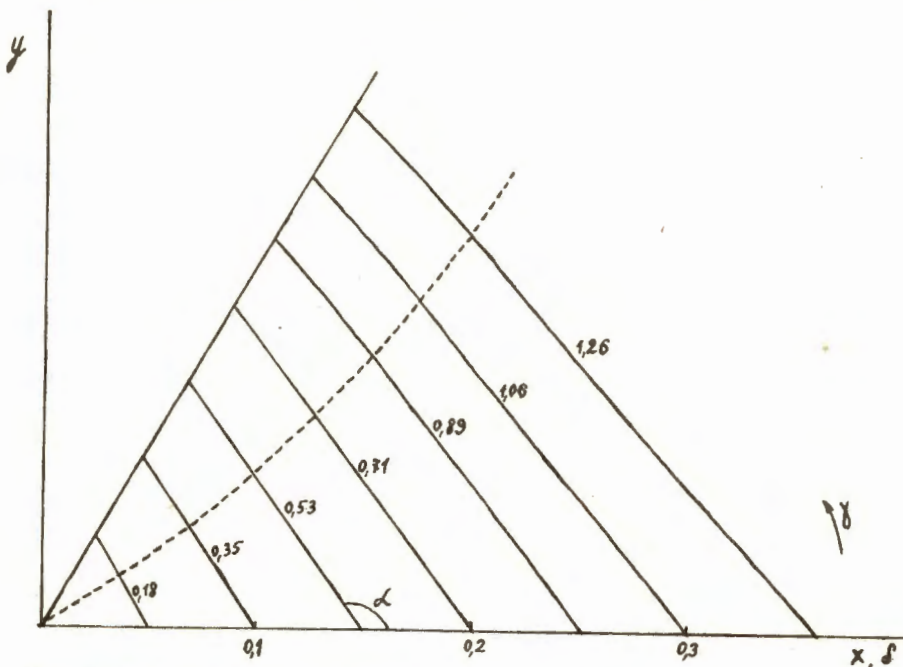


Рис. 1. Сплошные линии - кривые одинаковой величины ΔE (Мэв). Пунктирная линия - кривая, где величина ΔE максимальна в полярных координатах γ , δ .

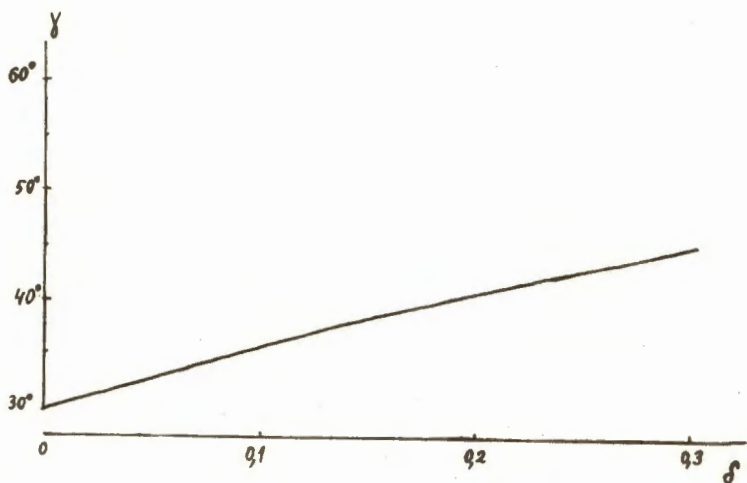


Рис. 2. Зависимость угла $\gamma_0(\delta)$, при котором величина ΔE максимальна.

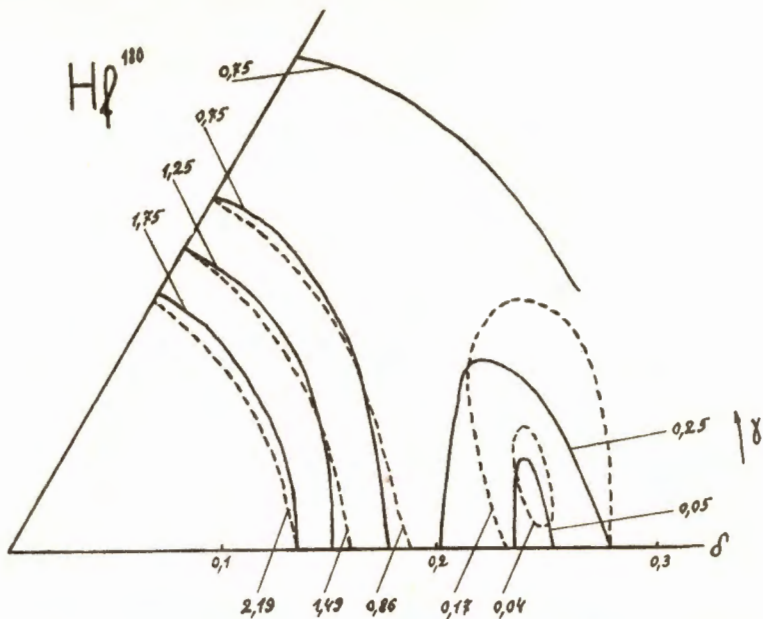


Рис. 3. Эквипотенциальные кривые энергии ядра в Мэв. Минимальная энергия положена равной нулю. Сплошные линии - из работы /1/ (схема 1). Пунктирные линии получены путем построения новых эквипотенциальных кривых, которые получаются при вычитании ΔE из энергий, соответствующих сплошным линиям.

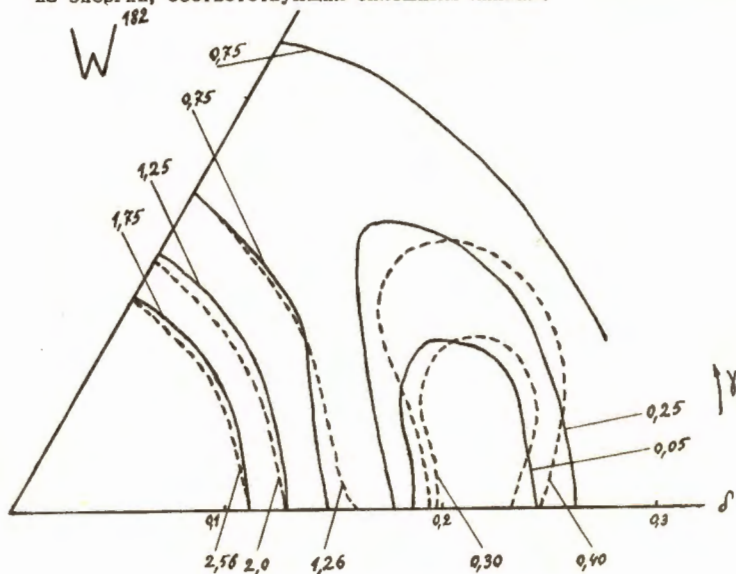


Рис. 4. Эквипотенциальные кривые энергии ядра в Мэв. Минимальная энергия положена равной нулю. Сплошные линии - из работы /1/ (схема 1). Пунктирные линии получены путем построения новых эквипотенциальных кривых, которые получаются при вычитании ΔE из энергий, соответствующих сплошным линиям.

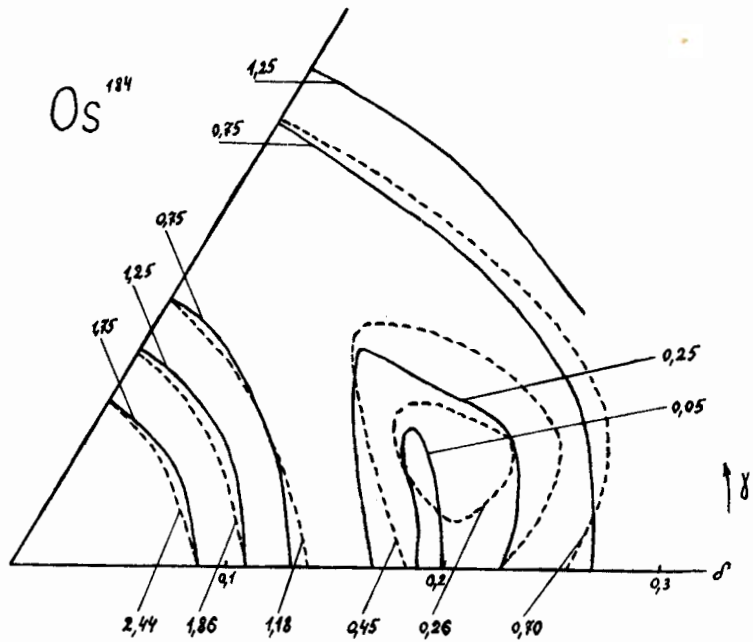


Рис. 5. Эквипотенциальные кривые энергии ядра в Мэв. Минимальная энергия положена равной нулю. Сплошные линии — из работы ^{71/} (схема 1). Пунктирные линии получены путем построения новых эквипотенциальных кривых, которые получаются при вычитании ΔE из энергий, соответствующих сплошным линиям.

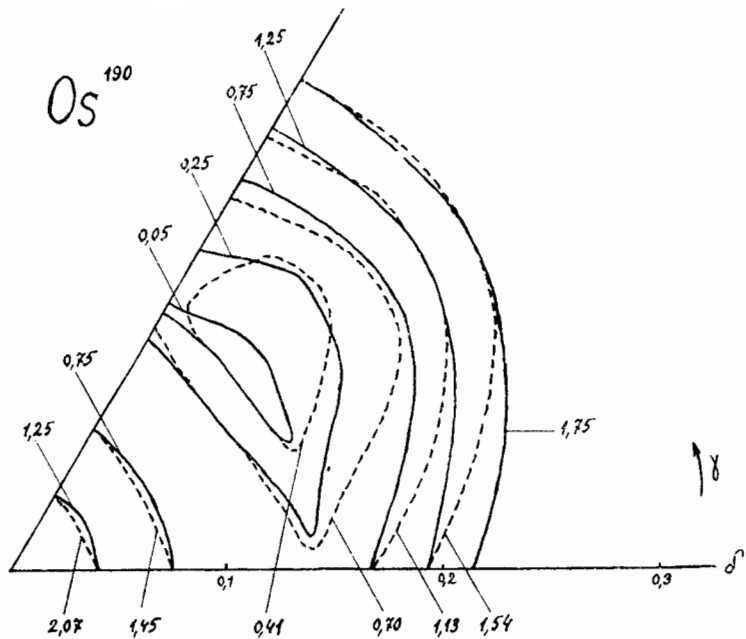


Рис. 6. Эквипотенциальные кривые энергии ядра в Мэв. Минимальная энергия положена равной нулю. Сплошные линии - из работы (схема 1). Пунктирные линии получены путем построения новых эквипотенциальных кривых, которые получаются при вычитании ΔE из энергий, соответствующих сплошным линиям.

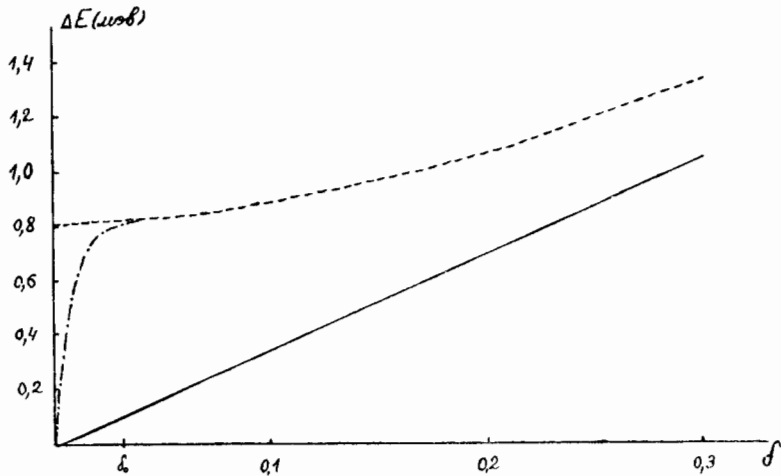


Рис. 7. Зависимость ΔE от параметра деформации δ . Сплошная кривая построена по формуле (14). Пунктирная кривая - по формуле (17). Штрих-пунктирная кривая - предполагаемый ход величины ΔE при точном проектировании на состояние с нулевым моментом количества движения.