ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P-2443

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Д. Стоянов

ОБ ОБЪЕДИНЕНИИ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ И ВНУТРЕННЕЙ СИММЕТРИЙ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

1965

P-2443

Д. Стоянов

ОБ ОБЪЕДИНЕНИИ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ И ВНУТРЕННЕЙ СИММЕТРИЙ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

Введение

В настоящее время существуют в основном два метода объединения группы внутренних S и пространственных P симметрий. В ряде работ, как, например, в работе /1/, алгебра Ли объединенной группы получалась путем тензорного умножения алгебр Ли групп S и P после их дополнения до ассоциативных алгебр. В рамках такого объединения, группы S и P являются подгруппами более общей группы, чем $S \times P$ и содержащей последнюю.

Наряду с этим были сделаны попытки /5/ объединить S и P путем их полупрямого произведения так, чтобы S являлась нормальным делителем объединенной группы G, а $P = G/S$. Подобная возможность была широко исследована в работах Мишеля /2/ и использована в работе /3/. Особенность такого объединения заключается в том, что любое представление группы P является также и представлением группы G. В этом смысле G можно рассматривать как обобщение группы пространственной симметрии. Этот подход не требует, чтобы G содержала подгруппу, изоморфную группе P. Поэтому здесь возникает вопрос классификации представлений группы S в рамках данного неприводимого представления G по фактор-группе $P = G/S$.

В настоящей работе мы изучаем возможности такой дополнительной классификации представлений группы S, включенной как нормальный делитель в G.

§ 1.

При рассмотрении элементарных частиц как чисто пространственных объектов их волновые функции преобразуются по неприводимым представлениям пространственной группы P. При этом частицы с одинаковыми характеристиками (т.е. преобразующиеся, вообще говоря, по эквивалентным представлениям группы внутренней симметрии S) преобразуются по различным представлениям P. Так, например, мультиплеты π -мезонов и Σ -гиперонов осуществляют эквивалентные представления $SU(2)$, соответствующие числу полного изотопического спина $I=1$ и поэтому в рамках этой группы они неразличимы. После введения пространственной группы, однако, ситуация изменяется. Именно после этого как будто появляются две совокупности эквивалентных представлений $SU(2)$ с $I=1$. Они хотя и содержат одни и те же элементы, все-таки различаются значением пространственного спина, который для π равен нулю, а для Σ равен 1/2.

Таким образом, видно, что представления группы S, по которым преобразуются мультиплеты π и Σ, дополнительно классифицируются по значениям пространственного спина, т.е. по отношению пространственной группы P. Подобные примеры показывают, что объединение групп S и P может оказаться связанным с вопросом о дополнительной классификации эквивалентных представлений группы S в указанном на примере смысле. Здесь мы займемся исследованием последнего вопроса.

Пусть T – группа операторов, действующих в некотором линейном пространстве R. Группа T, как известно, называется точным представлением S в пространстве R, если между S и T задан изоморфизм f.

$$S \xrightarrow{f} T \tag{1.1}$$

В этом случае мы говорим, что пространство R преобразуется с помощью группы S. Если между S и T задан другой изоморфизм $f' \neq f$, то пространство R преобразуется снова с помощью группы S, но другим образом. Поэтому мы определим пространство $R_{f'}$, которое как линейное пространство совпадает с R, но в нем осуществляется представление группы S с помощью изоморфизма f. В силу нашего определения, если $f' \neq f$, то $R_{f'}$ и R_f различны.

Пусть $s', s \in S$ и

$$s' \xrightarrow{f} t(s') \in T$$

$$s \xrightarrow{f} t(s) \in T.$$

Если, кроме того, для каждого $s \subset S$, s и s' связаны автоморфизмом g на S, т.е.

$$s' \xrightarrow{g} s,$$

то получаем

$$s' \xrightarrow{g} s \xrightarrow{f} t(s) \equiv t'(s') \in T_1$$

т.е. между S и T задали другой изоморфизм и тем самым получили другое представление T_1. Оно содержит те же самые элементы, что и начальное представление T, но изоморфизмы между S и T и S и T_1 в обоих случаях разные. Любые два представления группы S, связанные между собой некоторым

автоморфизмом на S как в случае рассмотренных T и T_1, будем называть эквивалентными.

Пусть G группа, содержащая S и последняя является нормальным делителем первой. Тогда любой внутренний автоморфизм на G задает некоторый автоморфизм на S. Видно, что каждому элементу G соответствует пара эквивалентных представлений группы S. Пусть T_1 и T_2 получены из T с помощью двух автоморфизмов $g_1, g_2 \in G$ на S.

Именно,

$$
\begin{aligned}
&s \xrightarrow{f} t(s) \in T \\
&s' \xrightarrow{g_1} s \xrightarrow{f} t_1(s') \in T_1 \\
&s'' \xrightarrow{g_2} s \rightarrow t_2(s'') \in T_2,
\end{aligned}
\tag{1.2}
$$

где

$$s' = g_1^{-1} s\, g_1 \qquad s'' = g_2^{-1} s\, g_2.$$

В силу нашего определения T, T_1 и T_2 являются эквивалентными. T_1 и T_2 мы будем называть неразличимыми, если существует такое $s_0 \in S$, не зависящее от s, s' и s'', что

$$s' = s_0^{-1} s'' s_0. \tag{2.3}$$

Очевидно, что, если $g_2^{-1} g_1 \in S$, то T_1 и T_2 неразличимы и, наоборот, если T_1 и T_2 неразличимы, то $s_0 = g_2^{-1} g_1 \in S$. Определенная нами неразличимость удовлетворяет условиям рефлексивности, симметрии и транзитивности. Поэтому каждому смежному классу G по S соответствует некоторое множество неразличимых представлений: множество всех эквивалентных представлений распадается на классы неразличимости. Тогда легко увидеть, что каждой паре классов неразличимости соответствует некоторый элемент фактор-группы G/S. Это означает, что из T мы можем получить два не неразличимых представления T_1' и T_2' только с помощью двух элементов g_1 и $g_2 \in G$, принадлежащих двум разным смежным классам G по S. Тогда переход из T_1' в T_2' будет совершаться при помощи элемента $g_2^{-1} g_1 \notin S$. T_1' и T_2' задают два класса неразличимости и переход из элемента одного класса к элементу другого совершается с помощью некоторого элемента вида $g_2^{-1} g_1 \notin S$, где все g_2 принадлежат одному и все g_1 –другому смежному классу. Тогда $g_2^{-1} g_1$ принадлежат третьему классу, не зависящему от g_2 и g_1, и поэтому паре классов неразличимости, в которые входят T_1' и T_2', соответствует смежный класс G по S, в котором лежит $g_2^{-1} g_1$ и который является элементом фактор-группы G/S.

Фиксируя начальный изоморфизм f, мы будем говорить, что каждому элементу группы G соответствует эквивалентное представление. Тогда каждому элементу фактор-группы G/S будет соответствовать некоторый класс неразличимости. Вместе с этим пространство, которое преобразуется по представлению T группы S, соответствующему элементу $g \in G$, будем обозначать через R_g. Два пространства R_{g_1} и R_{g_2}, для которых $g_2^{-1} g_1 \in S$, назовем неразличимыми (в них действуют неразличимые представления группы G). Тогда легко увидеть, что совокупность $\{R_g\}$ всех пространств R_g можно разбить на классы неразличимости M_k. Пусть U – множество всех классов неразличимости. Теперь легко показать, что в множестве $\{R_g\}$ можно определить представление группы G, а в множестве U - представление группы G/S. Действительно, пусть в $R_{g'}$ и $R_{g''}$ действуют представления группы S: T' и T'' соответственно. Так как T'' и T'' эквивалентны, то

$$T' \xrightarrow{g} T'' \qquad g \in G$$

и, следовательно,

$$R_{g'} \xrightarrow{g} R_{g'''}$$

Последнее соответствие определяет оператор ϕ_g, соответствующий элементу $g \in G$ и действующий во множестве $\{R_g\}$. В силу того, что, если

$$T' \xrightarrow{g_1} T \qquad \text{и} \qquad T \xrightarrow{g_2} T'',$$

то

$$T' \xrightarrow{g_1 g_2} T''.$$

Итак, получаем, что

$$\phi_{g_1 g_2} = \phi_{g_1} \phi_{g_2}, \qquad (1,4)$$

где произведение операторов ϕ_{g_1} и ϕ_{g_2} определено как их последовательное применение.

Аналогично получаем представление группы G/S во множестве U, только везде T и R_g следует заменить на классы неразличимости, а вместо группы G брать элементы группы G/S.

Таким образом, для каждого R_g мы можем сказать, в какой класс неразличимости оно входит. Тем самым мы получаем дополнительную классификацию всех эквивалентных пространств R_g по отношению группы G/S, которая является группой преобразования множества U классов неразличимости. Так как в задаче о классификации элементарных частиц нам было необходимо классифицировать эквивалентные представления группы внутренней симметрии S по пространственной группе P, то такую классификацию естественным образом можно получить, полагая $P = G/S$.

§ 2.

Если суммировать результаты предыдущего пункта, то видно, что мы должны построить группу G по заданным нормальному делителю S и фактор- группе P. Эта задача известна под названием расширения группы S при помощи группы P /6/. Вообще, решение этой задача не является однозначным. Так, например, одно решение получается, если G является прямым произведением S и P. Как уже было отмечено, в работах /2/ широко обсуждается вопрос о так называемых центральных расширениях S при помощи P. Нашей задачей будет привести некоторые общие предположения, касающиеся существования группы G при заданных общих условиях для S.

До сих пор группа внутренних симметрий S преимущественно предполагалась простой и компактной группой Ли. В терминах соответствующей алгебры Ли A_S группы S компактность означает, что в A_S существует положительно определенная квадратичная форма, инвариантная относительно группы G_A всех автоморфизмов A_S. Как доказывается, G_A изоморфна фактор-группе S/Z (Z центр группы S), т.е. каждый автоморфизм простой компактной алгебры A_S является внутренним.

Каждому автоморфизму S соответствует автоморфизм алгебры A_S. Произвольная группа G, содержащая S своим нормальным делителем, является группой автоморфизмов S. Поэтому группа G гоморфно отображается в группе G_A. Если N ядро этого гомоморфизма, то группа G/N изоморфна некоторой подгруппе $G^* \subset G_A$. В силу простоты и компактности нормального делителя S оказывается, что либо

$$\begin{aligned} &1)\ N \cap S = Z, \quad \text{либо} \\ &2)\ N \cap S = N. \end{aligned} \qquad (2,1)$$

Легко убедиться, что в первом случае G изоморфна прямому произведению $\frac{N}{Z} \times S$.

Второй случай сложнее. Если N содержит S, то поскольку S является нормальным делителем G, очевидно, что S является также нормальным делителем N, и, следовательно, сама группа N есть группа автоморфизмов S. Поэтому она также должна быть гомоморфной некоторой подгруппе $G^{**} \subset G_A$. Это означает, что само N является некоторым расширением группы S. Таким образом, второй случай сводится к тому, чтобы из полученного уже расширения N группы S снова расширить на этот раз группу N с помощью G^*, изоморфной G/N, так, чтобы в полученном расширении (это и есть сама G) S осталось нормальным делителем. При проведении этой конструкции оказывается, что группа G/S имеет примерно такую же структуру, как и сама G, а именно – как бы полученную путем расширения некоторой группы с помощью $G^* \subset G_A$. Следовательно, $P = G/S$ гомоморфна группе $G^* \subset G_A$.

В результате получаем следующее утверждение: возможно объединить компактную простую группу S с группой P тогда и только тогда, когда P можно отобразить гомоморфно в G_A. Если образ группы P в G_A является единичным элементом G_A, то тогда объединение G изоморфно прямому произведению групп P и S.

Следствием этого результата является утверждение, что любое объединение группы Пуанкаре P с компактной простой группой S в указанном смысле всегда изоморфно прямому произведению $S \times P$.

§ 3.

Пусть G – группа с нормальным делителем S; R – пространство неприводимого представления T_g группы G и T_s – представление группы S в R, которое получается из T_g, если все параметры в нем, не относящиеся к S, положим равными нулю. Тогда имеет место следующая теорема.

Если T_s в R приводимо, то оно вполне приводимо. Кроме того, инвариантные подпространства F_i на которые распадается при этом R, имеют одинаковую мощность в том смысле, что для каждой пары F_1 и F_2 можно найти неособый оператор A, такой что

$$F_1 = A F_2 \quad \text{и} \quad F_2 = A^{-1} F_1. \tag{3.1}$$

Оператор A осуществляет топологическое (или гомоморфное) отображение пространства F_2 на F_1.

Доказательство: Через Δ_s обозначим совокупность всех операторов T_s. Очевидно, что Δ_s есть нормальный делитель группы Δ_g операторов T_g. Так как R приводимо, то в нем существует неприводимое замкнутое подпространство F_1 инвариантное по отношению к Δ_s:

$$T_s \ell_0 \in F_1 \quad \text{если} \quad \ell_0 \in F_1 \subset R; \quad T_s \subset \Delta_s.$$

Все операторы представления группы G, принадлежащие одному смежному классу по Δ_s, будем обозначать через T_{gs} с индексами, а сам класс – через Δ_{gs}. Составим прямое произведение множеств Δ_{gs} и F_1

$$F_2 = \Delta_{gs} \times F_1.$$

Каждый элемент $f_2 \in F_2$ записывается в виде

$$f_2 = T_{gs} f_1; \quad T_{gs} \in \Delta_{gs}; \quad f_1 \in F_1.$$

Легко проверить, что F_2 является линейным пространством. В самом деле, пусть $f_2' = T_{gs}' f_1'$ и $f_2'' = T_{gs}'' f_2'$, тогда

$$c_1 f_2' + c_2 f_2'' = T_{gs}' \left[c_1 f_1' + c_2 (T_{gs}')^{-1} T_{gs}'' f_1'' \right],$$

но так как T_{gs}' и $T_{gs}'' \in \Delta_{gs}$, то

$$(T_{gs}')^{-1} T_{gs}'' \in \Delta_s$$

и, следовательно, (в силу инвариантности и линейности F_1) получаем, что

$$c_1 f_2' + c_2 f_2'' \in F_2.$$

Далее, пусть $\bar{T}_{gs}$ – представитель смежного класса Δ_{gs} и

$$F_2' = \bar{T}_{gs} F_1.$$

Очевидно, что $F_2' \subset F_2$.

Теперь, если f_2 – произвольный элемент F_2, имеем:

$$f_2 = T_{gs} f_1 = \bar{T}_{gs} (\bar{T}_{gs})^{-1} T_{gs} f_1 = \bar{T}_{gs} f_1' \in F_2'; \quad f_1' \in F_1,$$

т.е.

$$F_2 \subset F_2'$$

и, следовательно,

$$F_2 \equiv F_2' = \bar{T}_{gs} F_1. \tag{3.2}$$

Из последнего равенства вытекает, что F_1 и F_2 замкнуты в силу непрерывности преобразования $\bar{T}_{gs}$, а также, что F_2 и F_1 имеют одинаковую мощность. Роль оператора A в (3.1) выполняет $\bar{T}_{gs}$. F_2 инвариантно по Δ_s. Действительно, пусть дано произвольное $T_s \subset \Delta_s$, тогда

$$T_s F_2 = T_s \bar{T}_{gs} F_1 = \bar{T}_{gs} (\bar{T}_{gs})^{-1} T_s \bar{T}_{gs} F_1,$$

но

$$(\bar{T}_{gs})^{-1} T_s \bar{T}_{gs} = T_s' \in \Delta_s.$$

Из

$$T_s F_2 = \bar{T}_{gs} T_s' F_1$$

и

$$T_s' F_1 \subset F_1$$

получаем

$$T_s F_2 \subset F_2,$$

чем инвариантность F_2 доказана. Очевидно, что F_2 также неприводимо, как и F_1.

Найдем пересечение $F' = F_1 \cap F_2$. F' также будет замкнутым пространством, инвариантным по Δ_s и в силу неприводимости, например, F_1, получаем

$$F' = 0 \quad \text{или} \quad F' = F_1 = F_2 .$$

Теперь, взяв все смежные классы представления группы G в R по Δ_s и проводя подобную процедуру с F_1, получим последовательность μ_F замкнутых пространств F_i одинаковой мощности, инвариантных по Δ_s. Из этой последовательности всегда можно выделить пару несовпадающих между собой пространств. Действительно, если этого нельзя сделать, то значит все F_i между собой совпадают и тогда пространство F, которому они равны, окажется инвариантным по всем T_g и в силу неприводимости R получим либо $F=0$, либо $F=R$. Но эти два случая фактически означают, что T_s неприводимо в пространстве R. Это противоречит условию теоремы. Тогда пусть F_1 и F_2 – два несовпадающих пространства. Пространство

$$R_{(1)} = F_1 \oplus F_2$$

($F_1 \oplus F_2$ означает прямую сумму) также замкнутое и инвариантно по Δ_s. $R_{(1)}$ либо содержит некоторое F_i последовательности μ_F, либо с ним пересекается в нуле. Тогда подобные рассуждения можно провести и для пространства

$$R_{(2)} = F_1 \oplus F_2 \oplus F_3 .$$

Продолжаем таким образом пока в некотором

$$R_{(N)} = \sum_i \oplus F_i$$

будут включены все элементы последовательности μ_F. $R_{(N)}$ замкнуто и уже инвариантно по отношению ко всем T_g. Из того что $R_{(N)} \subset R$ в силу неприводимости пространства R, получаем

$$R \equiv R_{(N)} = \sum_i \oplus F_i , \qquad (3.3)$$

чем и доказывается наша теорема.

Заключение

Мы рассматриваем алгебру A_g группы G. Поскольку последняя содержит своим идеалом алгебру A_s группы S, то перестановочные соотношения для генераторов G будут иметь вид:

$$[I_i\, I_k] = d^{\ell}_{ik}\, I_\ell$$

$$[I_i\, J_\alpha] = \epsilon^{\ell}_{i\alpha}\, I_\ell \qquad (4.1)$$

$$[J_\alpha\, J_\beta] = f^{\delta}_{\alpha\beta}\, J_\delta + g^{\ell}_{\alpha\beta}\, I_\ell$$

Латинские индексы пробегают значения от 1 до n

Греческие индексы пробегают значения от $n+$ до m.

$m > n$

где I_i являются элементами базиса идеала A_s и, следовательно, d^{ℓ}_{ik} – структурные постоянные группы S. Остальные генераторы J_α вместе с I_i образуют базис алгебры A_g. Перейдя к касательному пространству в точке $g=e$ группы G (e – единичный элемент), легко показать, что $f^{\delta}_{\alpha\beta}$ должны быть структурными постоянными фактор-группы G/S, которая по предположению совпадает с P. Таким образом, в (4.1.) остается неизвестным $\epsilon^{\ell}_{i\alpha}$ и $g^{\ell}_{\alpha\beta}$. Для них, однако, можно выписать соотношения, которые получаются из тождества Якоби для структурных констант всей группы G. Если введем следующие обозначения

$$(O^k)_{\ell i} = d^{\ell}_{ik} \qquad (E^\alpha)_{\ell i} = \epsilon^{\ell}_{i\alpha} \qquad (F^\beta)_{\delta\alpha} = f^{\delta}_{\alpha\beta} , \qquad (4.2)$$

то

$$[D^k\, D^\ell] = d^{i}_{\ell k}\, D^i \qquad [E^\alpha\, D^k] = \epsilon^{\ell}_{k\alpha}\, D_\ell$$

$$[E^\beta\, E^\alpha] = f^{\delta}_{\alpha\beta} E^\delta + g^{\ell}_{\alpha\beta}\, D^\ell \qquad (4.3)$$

$$[F^\beta\, F^\alpha] = f^{\delta}_{\alpha\beta} F^\delta .$$

Из последнего соотношения видно, что $f^{\delta}_{\alpha\beta}$ сами собой удовлетворяют тождества Якоби и, следовательно, задают некоторую алгебру, именно, – алгебру фактор-группы G/S. Кроме выписанных соотношений, существует еще одно связывающее

$f^{\delta}_{\alpha\beta}$, $\epsilon^{\ell}_{k\alpha}$ $g^{\ell}_{\alpha\beta}$:

$$f^{\delta}_{\beta j}\, g^{k}_{\alpha\delta} + f^{\delta}_{j\alpha}\, g^{k}_{\beta\delta} + f^{\delta}_{\alpha\beta}\, g^{k}_{j\delta} = \qquad (4.4)$$

$$= g^{\ell}_{\beta j}\, \epsilon^{k}_{\ell\alpha} + g^{\ell}_{j\alpha}\, \epsilon^{k}_{\ell\beta} + g^{\ell}_{\alpha\beta}\, \epsilon^{k}_{\ell j} .$$

Коммутационные соотношения (4.1) имеют следующее частное решение

$$I_i = 0 \quad \text{и} \quad J_\alpha = X_\alpha , \ \text{где}$$
$$[X_\alpha\, X_\beta] = f^{\delta}_{\alpha\beta} X_\delta$$

для всех X_a, удовлетворяющих последнему соотношению. Как раз это и есть совокупность всех представлений группы P . Поэтому любое представление группы P является также представлением группы G .

Наконец, можно сделать следующее замечание. Везде в изложении мы считали, что S – группа внутренней симметрии и P – пространственная группа. Мы могли бы, однако, искать дополнительную классификацию группы P по группе S и тогда они поменялись бы местами, т.е. объединение G' в этом случае содержало бы P своим нормальным делителем, а $G/P = S$. Тогда любое представление группы S было бы одновременно и представлением G'/S . Эти представления получаются, когда все генераторы P равны нулю и тогда S выступает как статический предел объединенной группы G' . Хотя сейчас в связи с работами /4/ принята такая постановка задачи, которой мы следовали в изложении, все-таки рассуждения первого параграфа настоящей работы не исключают и обратную возможность.

Автор выражает благодарность профессору А.Н.Тавхелидзе, И.Т.Тодорову, а также А.Николову за интерес к работе и подробные рассуждения.

Литература

1. В.Г.Кадышевский, Р.М.Мурадян, А.Н.Тавхелидзе, И.Т.Тодоров. Препринт ОИЯИ Д-1929, Дубна 1964.
2. L.Michel – Le Centre de Physique Theorique de l'Ecole Polytechnique. Preprints no. A54, 1264 (134); Nn. A54, 1264 (35); no. A60, 265 (37) etc.
3. Budini and Fronsdal. Preprint ICPT 1c/65/29, Trieste.
4. L.O'Raifertaigh. Department of Physics Syracuse University Syracuse, New York, preprints NYO 3399-23, 1206-SU-23; NYO 3399-7, 1206-SU-27.
5. U.Ottoson, A.Kihlberg and I.Nilsson. Department of Mathematical Physics Chalmers University of Technology Gothenburh, Sweden – Internal and Space Time Symmetries. Preprint (1964).
6. А.Г.Курош. Теория групп. Государственное издательство технико-теоретической литературы, Москва, 1953 СССР, II издание, стр. 311.

Рукопись поступила в издательский отдел
18 ноября 1965 г.