Изв. АН СССР, сер. физ., 1966, т. 30, №7, с. 1095-1100

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р - 2432

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

П. Фогель

КОЛЛЕКТИВНЫЕ СОСТОЯНИЯ ЯДЕР В МЕТОДЕ ТАММА-ДАНКОВА

1965

P – 2432

П. Фогель

КОЛЛЕКТИВНЫЕ СОСТОЯНИЯ ЯДЕР В МЕТОДЕ ТАММА-ДАНКОВА

Направлено в Известия АН СССР

1. Введение

В последнее время ряд свойств коллективных неротационных состояний в деформированных [1,2] и сферических ядрах [3] был с успехом объяснен в рамках микроскопической модели атомного ядра. В этой модели исходным обычно является модельный гамильтониан H, содержащий среднее поле и взаимодействие частиц. На первом этапе решения задачи переходят от частиц к квазичастицам при помощи канонического преобразования Боголюбова. Точность такого подхода исследовалась во многих работах (например, в [4,5]), в частности, вопрос поправок к обычным выражениям в случае модели спаривание + мультипольное взаимодействие был исследован Беляевым [6] и Зарецким и Уриным [7]. В стандартной процедуре далее применяется квазибозонное приближение, т.е. считается, что пара квазичастичных операторов имеет коммутационные свойства бозевского оператора. Гамильтониан в этом случае является квадратичной формой в новых операторах и может быть диагонализирован или унитарным преобразованием (приближение Тамма-Данкова), или преобразованием Боголюбова (метод приближенного вторичного квантования).

Настоящая работа посвящена решению задачи в модели спаривание + мультипольное взаимодействие в случае, когда энергия коллективного уровня несильно отличается от энергии двухквазичастичного состояния. Из результатов работ [1,2] видно, что с этим случаем встречаемся сравнительно часто в четно-четных деформированных ядрах.

2. Сравнение метода Тамма-Данкова (ТД) и метода приближенного вторичного квантования (RPA)

В дальнейшем будет удобно работать в рамках метода Тамма-Данкова, т.е. считать, что основное состояние четного ядра является квазичастичным вакуумом. Покажем сначала, что в интересующем нас случае малых κ, т.е. $\omega \to \epsilon_t + \epsilon_{t'}$, методы ТД и RPA эквивалентны. Секулярное уравнение для определения энергии коллективного состояния имеет вид: в методе RPA

$$1 = 2\kappa \sum_{ss'} \frac{f^2_{ss'} U^2_{ss'} (\epsilon_s + \epsilon_{s'})}{(\epsilon_s + \epsilon_{s'})^2 - \omega^2} , \qquad (1)$$

в методе ТД

$$1 = \kappa \sum_{ss'} \frac{f^2_{ss'} U^2_{ss'}}{\epsilon_s + \epsilon_{s'} - \omega} \quad ; \tag{2}$$

здесь $f_{ss'}$ – одночастичные матричные элементы оператора $r^{\lambda} Y_{\lambda\mu}$, $U_{ss'} = u_s v_{s'} + v_s u_{s'}$, ϵ_s – энергия квазичастицы на уровене s. Уравнение (1) можно переписать в форме

$$1 = \frac{\kappa}{1 - \kappa \sum_{ss'} \frac{f^2_{ss'} U^2_{ss'}}{\epsilon_s + \epsilon_{s'} + \omega}} \sum_{ss'} \frac{f^2_{ss'} U^2_{ss'}}{\epsilon_s + \epsilon_{s'} - \omega} = \kappa' \sum_{ss'} \frac{f^2_{ss'} U^2_{ss'}}{\epsilon_s + \epsilon_{s'} - \omega} \; ,$$

в случае $\omega \to \epsilon_t + \epsilon_{t'}$ κ' является практически постоянной. На рисунке 1 показано типичное поведэние функций

$$\frac{\kappa'}{\kappa} = \frac{1}{1 - \kappa \sum_{ss'} \frac{f^2_{ss'} U^2_{ss'}}{\epsilon_s + \epsilon_{s'} + \omega}} \quad \text{(кривая 1)}; \quad \kappa \sum_{ss'} \frac{f^2_{ss'} U^2_{ss'}}{\epsilon_s + \epsilon_{s'} - \omega} \quad \text{(кривая 2)},$$

в случае $K\pi = 0^-$ состояния в ядре U^{234} ($\kappa = 0{,}00039\,\hbar\omega_0^0$).

Таким образом, видно, что разница метода RPA и ТД в случае $\omega \to \epsilon_t + \epsilon_{t'}$ заключается только в перенормировке эффективных констант, которые подбираются из эксперимента. Заметим, что такого результата следовало ожидать, так как при слабом взаимодействии корреляции в основном состоянии тоже должны быть слабыми.

3. Уравнения для энергии коллективного состояния

Гамильтониан системы в операторах квазичастиц имеет вид:

$$H = H_0 + H_{int} \; , \quad H_{int} = H_{40} + H_{31} + H_{22} \; , \tag{3}$$

где H_0 –свободные квазичастицы, H_{int} – взаимодействие (число квазичастиц не сохраняется). Данный гамильтониан будем диагонализировать в пространстве двухквазичастичных функций и полученное уравнение сравним с уравнением (2). Таким образом получим границы применимости уравнения (2), а также найдем возможные пути его уточнения. Для получения уравнений воспользуемся вариационным принципом, т.е. потребуем, чтобы

$$\delta(\Psi, H, \Psi> - \omega <\Psi, \Psi>) = 0 \, , \tag{4}$$

где $\phi = \sum_{ss'} \Psi_{ss'} a^+_s a^+_{s'} |0>$ – суперпозиция двухквазичастичных функций. Если обозначить

$$A = \sum_{tt'} U_{tt'} f_{tt'} \Psi_{tt'} \quad , \quad B_{ss'} = \sum_{tt'} f_{ts} V_{ts} f_{t's} V_{t's'} \Psi_{tt'} \; , \tag{5}$$

где

$$V_{tt'} = u_t u_{t'} - v_t v_{t'} \, ,$$

то для неизвестных коэффициентов разложения $\Psi_{ss'}$ получаем выражение

$$\Psi_{ss'} = \frac{f_{ss'} U_{ss'}}{\epsilon_s + \epsilon_{s'} - \omega} \kappa A + \frac{\kappa B_{ss'}}{\epsilon_s + \epsilon_{s'} - \omega} \tag{6}$$

и для A, $B_{ss'}$ –систему однородных линейных уравнений

$$\begin{aligned} A &= \kappa \sum_{tt'} \frac{f^2_{tt'} U^2_{tt'}}{\epsilon_t + \epsilon_{t'} - \omega} A + \kappa \sum \frac{f_{tt'} U_{tt'} B_{tt'}}{\epsilon_t + \epsilon_{t'} - \omega} \, , \\ B_{ss'} &= \kappa \sum_{tt'} f_{ts} V_{ts} f_{t's} V_{t's'} \frac{f_{tt'} U_{tt'}}{\epsilon_t + \epsilon_{t'} - \omega} A + \kappa \sum_{tt'} f_{ts} V_{ts} f_{t's} V_{t's'} \frac{B_{tt'}}{\epsilon_t + \epsilon_{t'} - \omega} \, . \end{aligned} \tag{7}$$

Секулярное уравнение для энергии ω получается из условия равенства нулю определителя системы (7).

Заметим, что величины $U_{ss'}$, $V_{ss'}$ и $f_{ss'}$ – порядка единицы (матричные элементы в безразмерных единицах Нильссона). Тогда для получения уравнения (2), т.е. уравнения метода Тамма–Данкова, необходимо, хотя и недостаточно, чтобы

$$\text{a)} \quad \frac{\kappa}{\epsilon_s + \epsilon_{s'} - \omega} \ll 1 \, , \tag{8}$$

$$\kappa \sum_{tt'} f_{ts} V_{ts} f_{t's} V_{t's'} \frac{f_{tt'} U_{tt'}}{\epsilon_t + \epsilon_{t'} - \omega} \ll 1 \, , \tag{9}$$

т.е. приближение метода Тамма–Данкова является правильным, если а) расстояние коллективного уровня от любого двухквазичастичного намного больше константы взаимодействия κ, б) если можно пренебречь некогерентными суммами типа (9) в сравнении с единицей. Таким образом, в квазибозонном приближении учитываются все когерентные части, а все некогерентные, знакопеременные части отбрасываются.

Заметим еще, что простое уравнение можно получить также в случае, который на практике часто встречается, когда условие (8) не выполняется для одного изолированного полюса (скажем, $\epsilon_\ell + \epsilon_m$), тогда получаем

$$1 = \kappa \sum_{ss' \neq (\ell m)} \frac{f^2_{ss'} U^2_{ss'}}{\epsilon_s + \epsilon_{s'} - \omega} + \frac{2\kappa f^2_{\ell m} U^2_{\ell m}}{\epsilon_\ell + \epsilon_m - \kappa V^2_{\ell m} f^2_{\ell m} - \omega}, \tag{10}$$

т.е. при более точном рассмотрении ω "отталкивается" от полюса. Если не выполняется условие (9), то можно ввести поправки в виде итераций, сохраняя простую форму уравнения

$$1 = \kappa \sum_{ss'} \frac{f^2_{ss'} U^2_{ss'}}{\epsilon_s + \epsilon_{s'} - \omega} + \kappa^2 \sum_{\substack{ss' \\ tt'}} f_{st} V_{st} f_{s't'} V_{s't'} \frac{f_{ss'} U_{ss'}}{\epsilon_s + \epsilon_{s'} - \omega} \frac{f_{tt'} U_{tt'}}{\epsilon_t + \epsilon_{t'} - \omega} + \dots \tag{11}$$

4. Точность расчета свойств коллективных состояний четно-четных деформированных ядер

В работе [1] исследовались квадрупольные и в работе [2] октупольные состояния четных деформированных ядер. В связи с вышеизложенными рассуждениями возникает вопрос: насколько соблюдались в этих работах условия (8) и (9). Заметим, что наши заключения не будут касаться β-колебательных состояний ввиду специальных трудностей, возникающих в этом случае.

Применяемая константа квадрупольного взаимодействия составляет $\kappa^{(2)} \approx 80$ кэв в редкоземельной и $\kappa^{(2)} \approx 40$ кэв в трансурановой области, константа октупольного взаимодействия в десять раз меньше (но нужно иметь в виду, что матричные элементы в этом случае немного больше). Понижение энергий γ-колебательных и октупольных $K\pi = 0^-$ состояний составляет 0,5 – 1,0 Мэв, так что условие (8) выполняется хорошо. Однако надо отметить, что расчеты октупольных состояний с $K \neq 0$ лежат на границе применимости метода, хотя заключение об их малой коллективности, сделанное в [2], остается в силе. Выполнение условия (9) показано на типичном при-

мере состояния $K\pi = 0^-$ ядра U^{234} на рисунке 1. Кривая 3 показывает поведение (умноженного на множитель 25) максимального по величине выражения типа (9); видно, что, кроме области, совсем близкой к полюсу, (9) хорошо выполняется.

Специально надо оговорить состояния с $K\pi = 2^+$ в ядрах Yb^{172}, U^{238} и Pu^{240}, в этих случаях условие (8) не выполняется для изолированного полюса и надо пользоваться уравнением (10). Но матричный элемент, соответствующий первому полюсу, пренебрежимо мал, и вводимая поправка несущественна.

Таким образом, можно сделать заключение, что для реальных значений параметров в случае четных деформированных ядер "опасности" из-за приближение к полюсу нет и метод приближенного вторичного квантования работает с хорошей точностью.

5. Коллективные состояния в нечетных ядрах

В связи с вышеизложенными результатами возникает вопрос, можно ли получить уравнение, аналогичное (2), т.е. учитывающее когерентную часть взаимодействия, в случае нечетного ядра, и какие приближения для этого нужны? Следует ожидать, что положение в нечетных ядрах будет намного сложнее, но поскольку ряд "колебательных" состояний в нечетных ядрах обнаружен на опыте и поскольку расчеты при помощи квазибозонного приближения проводятся [3,8,9], представляет интерес получить соответствующие уравнения методом данной работы.

Пробную функцию естественно выбрать в виде суперпозиции одно- и трехквазичастичных состояний, т.е. низших возбужденных состояний, точно так же, как для четного ядра.

$$\Psi = \Big(\sum_s C_s a^+_s + \sum \Psi_{stu} a^+_s a^+_t a^+_u\Big)|0>. \tag{12}$$

Так как нас интересует качественный ответ, будем задачу решать в самом простом приближении, будем предполагать, что одноквазичастичные состояния с данным спином и четностью расположены достаточно далеко друг от друга и что из всех "двухквазичастичных" состояний важно лишь одно фононное состояние соседнего четного ядра (его энергию ω и волновую функцию $\Psi_{ss'}$ считаем известной). Таким образом, мы не учитываем интерференции фононов разных мультипольностей и проекций, а также высших корней уравнения (2), их учет ведет к несущественному усложнению соответствующих выражений. Итак, наша пробная функция имеет вид:

$$\Psi = \Big(C_{s_0} a_{s_0} + \sum_t D_t Q^+ a^+_t\Big)|0>, \tag{13}$$

здесь C, D_t -неизвестные параметры,

$$Q^{+} = \sum_{ss'} \Psi_{ss'} a^{+}_{s} a^{+}_{s'}$$

(мы взяли ради простоты октупольный фонон с нулевой проекцией и частотой ω).

Имеем $\langle \Psi, H\Psi \rangle - \eta \langle \Psi, \Psi \rangle =$

$$= C^2_{s_0}(\epsilon_{s_0} - \eta) + \sum_r (\omega + \epsilon_r - \eta) D_r^2 - \sum_{s,r} (\omega + \epsilon_r - \eta) T_{sr} D_r D_s -$$

$$- \frac{2C_{s_0}}{Y^{1/2}} \sum (f_{r s_0} V_{v s_0} - B_{v s_0}) D_r + \kappa \sum_{sr} E_{sr} D_r D_s ,$$

где

$$Y = \sum_{ss'} \frac{f^2_{ss'} U^2_{ss'}}{(\epsilon_s + \epsilon_{s'} - \omega)^2} , \qquad T_{rs} = \sum_t \Psi_{st} \Psi_{rt} ,$$

$$B_{rs_0} = \kappa \sum_{tt'} \frac{f_{tt'} U_{tt'}}{\epsilon_t + \epsilon_{t'} - \omega} f_{rt} U_{rt} f_{t's_0} V_{t's_0} ,$$

$$E_{rs} = \sum_{tt'k} \{ f_{rk} U_{rk} \Psi_{tt'} (f_{tt'} U_{tt'} \Psi_{sk} - f_{st'} U_{st'} \Psi_{tk}) +$$

$$+ 2 f_{rf} V_{rk} f_{tt'} V_{tt'} \Psi_{kt'} \Psi_{ts} \} - \delta_{rs} \sum_{tt'} f_{kk'} V_{kk'} f_{tt'} V_{tt'} \Psi_{kt} \Psi_{k't'} .$$

После варьирования по C и D_t, переходя к новым неизвестным переменным, определенным аналогично (5)

$$A = \sum_t D_t (f_{ts_0} V_{ts_0} - B_{ts_0}) ,$$

$$P_t = \sum_s \left\{ \frac{\omega + \frac{\epsilon_s + \epsilon_r}{2} - \eta}{\omega + \epsilon_t - \eta} T_{st} + \frac{\kappa}{2} \frac{E_{st} + E_{ts}}{\omega + \epsilon_t - \eta} \right\} D , \qquad (15)$$

получим систему линейных однородных уравнений, аналогичную (7):

$$A = \frac{1}{Y(\epsilon_{s_0} - \eta)} \sum_t \frac{(f_{ts_0} V_{ts_0} - B_{ts_0})^2}{\omega + \epsilon_t - \eta} A + \sum_t (f_{ts_0} V_{ts_0} - B_{ts_0}) P_t , \qquad (16)$$

$$P_t = \sum_r \left\{ \frac{\omega + \frac{\epsilon_r + \epsilon_s}{2} - \eta}{\omega + \epsilon_t - \eta} T_{tr} + \frac{\kappa}{2} \frac{E_{rt} + E_{tv}}{\omega + \epsilon_t - \eta} \right\} \left\{ \frac{f_{rs_0} V_{rs_0} - B_{rs_0}}{Y(\epsilon_{s_0} - \eta)(\omega + \epsilon_1 - \eta)} A + P_r \right\} ,$$

и для определения неизвестной частоты η условие равенства нулю определителя системы (16).

Сохраняя только когерентные части, получаем уравнение

$$1 = \frac{1}{Y(\epsilon_{s_0} - \eta)} \sum_t \frac{f_{ts_0} V_{ts_0} - B_{ts_0}}{\omega + \epsilon - \eta} . \qquad (17)$$

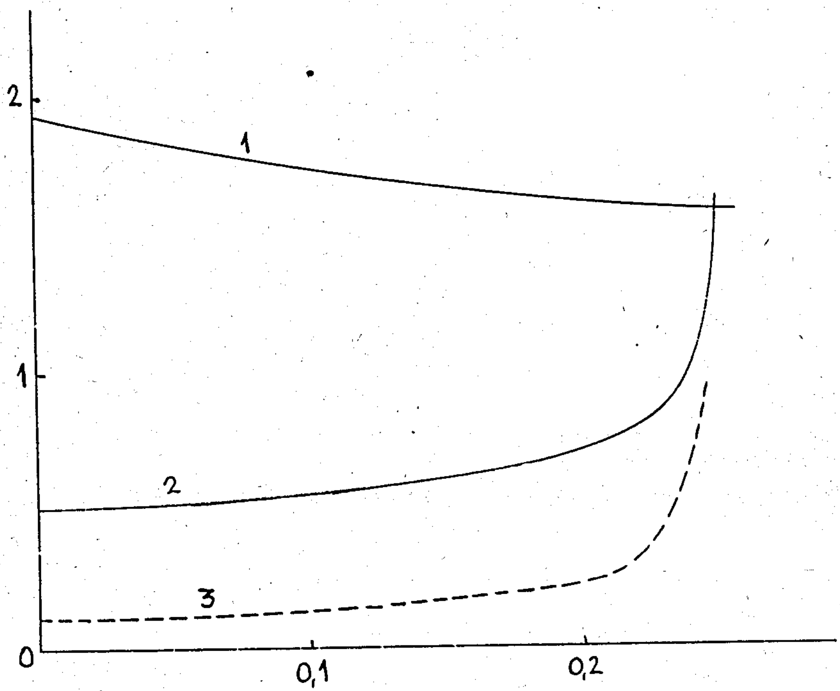
Это уравнение сходно с уравнением, полученным в квазибозонном приближении в работе /9/, если не считать наличия в числителе члена B_{ts_0}, который возникает из-за более точного учета антисимметрии во втором слагаемом волновой функции (13); занятый уровень не может участвовать в образовании фонона. Заметим, что из сложного уравнения в виде определителя системы (16) можно получить простое уравнение, аналогичное (10), с точным учетом изолированного полюса одноквазичастичного типа $(\epsilon_{s_0} - \eta)$ или типа квазичастица + фонон $(\epsilon_t + \omega - \eta)$. Заметим, далее, что малость некогерентных частей в случае системы (16) не является столь очевидной, как в случае четного ядра; при конкретном счете надо всегда убедиться в правильности этого предположения.

В заключение автор выражает благодарность В.Г. Соловьеву за полезные дискуссии и А.А. Корнейчуку за помощь в проведении численных расчетов.

Литература

1. Лю Юань, В.Г. Соловьев, А.А. Корнейчук. ЖЭТФ, 47, 252 (1964); В.Г. Соловьев. Nucl.Phys., 69, 1 (1965).
2. В.Г. Соловьев, П. Фогель, А.А. Корнейчук. Изв, АН СССР, сер. физ. 28, 1599 (1964).
3. L.S.Kisslinger, R.A.Sorensen. Rev.Mod.Phys., 35, 853 (1963).
4. М.К. Волков, А. Павликовски, В. Рыбарска, В.Г. Соловьев. Изв. АН СССР, сер.физ. 27, 878 (1963).
5. М.Н.Михайлов. ЖЭТФ, 45, 1102 (1963).
6. С.Т.Беляев. Selected Topics in Nucl. Theory, IAEA, Vienna (1963).
7. М.Ф. Зарецкий, М.Г. Урин. Nucl.Phys., 47, 97 (1963).
8. G.Do Dang. Nucl.Phys., 62, 153 (1965).
9. В.Г.Соловьев. Phys.Lett. 16, 308 (1965).

Рукопись поступила в издательский отдел
19 ноября 1965 г.



Р и с. 1. $K\pi = 0$- состояние в ядре U^{234} . 1- величина κ'/κ ,
2- правая сторона уравнения (2), 3- максимальное из выражений типа (9) (умноженное на 25 для наглядности).