ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория теоретической физики

Р-242

И. Т. Тодоров

Дисперсионные соотношения для виртуального фоторождения нескольких бозонов

Научные доклады высшей школы. Физ.-мат. науки, 1958, N 5, с 131-138.

г. Дубна, 1958 г.

Р-242

И. Т. Тодоров

Дисперсионные соотношения для виртуального фоторождения нескольких бозонов

1. В в е д е н и е

В недавних работах А.А.Логунова и др.[1] были получены дисперсионные соотношения для процессов рассеяния электрона на нуклоне с рождением π -мезона или γ -кванта:

$$\mathcal{N}+e \to \mathcal{N}+e+\pi, \qquad \mathcal{N}+e \to \mathcal{N}+e+\gamma.$$

В этих работах электромагнитное взаимодействие электрона с протоном учитывается в первом приближении теории возмущений по e. При таком рассмотрении рождение π -мезона /или γ -кванта/ вызывается как будто одним виртуальным фотоном /отсюда название "виртуальное фоторождение"/.

В настоящей работе, аналогичным образом, получаются дисперсионные соотношения для процессов типа

$$\mathcal{N}+e \to \mathcal{N}+e+a+b, \tag{1.1}$$

где "а" и "в" могут быть π -мезоны или γ -кванты. Задача сводится /методом использованным в [1] / к написанию дисперсионных соотношений для процесса $\mathcal{N}+v \to \mathcal{N}+a+b$, где v -фиктивная частица /виртуальный фотон с пространственно-подобным импульсом/. Аналогичные задачи /с реальными частицами в начале и конце процесса/ рассматривались в ряде работ [2,3,4]. В § 3 настоящей работы исследован общий случай кинематики процессов такого типа.

Показано /§ 4а/, как можно обобщить доказательство дисперсионных соотношений, изложенное в [4], для рассматриваемого здесь случая.

В § 4б показывается, что в процессах виртуального фоторождения нескольких частиц всегда существует ненаблюдаемая область.

§ 2. Амплитуда виртуального фоторождения

Пусть p и p_e / p' и p_e' / 4-импульсы нуклона и электрона в начальном /конечном/ состоянии, а q', q'', ρ', ρ'' - соответственно импульсы и изотопические /или спиновые/ координаты двух рожденных частиц. Обозначим далее через $b_s^{(-)}, (b_s^{*(+)})$, и $a_{\rho'}^{(-)}$, $a_{\rho''}^{(-)}$ операторы уничтожения /рождения/ электрона и мезона или γ -кванта, а соответствующие операторы поля в координатном представлении через $\psi_e(x)$ и $\varphi_\rho(x)$.

Процессу /11/ соответствует матричный элемент

$$\langle f|S|i\rangle = \langle p'|a_{\rho'}^{(-)}(\vec{q}')\, a_{\rho''}^{(-)}(\vec{q}'')\, b_{r'}^{(-)}(\vec{p}_e')\, S\, b_r^{*(+)}(\vec{p}_e)|p\rangle.$$

Пользуясь известными перестановочными соотношениями между операторами рождения и уничтожения и оператором S /см.напр.[5]/, получим

$$(2\pi)^3 \langle f|S|i\rangle = \bar{v}^{r'}(\vec{p}_e{}') \iint d_4x\, d_4x'\, e^{i(p_e' x' - p_e x)} \langle p'| a^{(-)}_{p'}(\vec{q}')\, a^{(-)}_{p''}(\vec{q}'') \frac{\delta^2 S}{\delta\bar{\psi}_e(x')\,\delta\psi_e(x)} |p\rangle v^{r}(p_e). \qquad /2.1/$$

Здесь $d_4x = dx_0\, dx_1\, dx_2\, dx_3$, интегрирование производится по всему четырехмерному пространству. Спиноры v нормированы /следуя [5]/ условием.

$$\bar{v}^{r'}(\vec{p}_e)\, v^{r}(\vec{p}_e) = m_e \frac{\delta_{rr'}}{p_{e_0}}$$

Подсчитаем среднее значение $\frac{\delta^2 S}{\delta\bar{\psi}_e(x')\,\delta\psi_e(x)}$ в первом приближении по электрическому заряду e. Для этого учетм, что S зависит от $\psi_e(x)$ через "хронологический" экспонент

$$T(e^{i\int \mathcal{L}_e(z)\, d_4 z}),$$

где

$$\mathcal{L}_e(z) = e : \bar{\psi}_e(z)\gamma_\nu \psi_e(z) A_\nu(z) : .$$

Здесь $A_\nu(z)$ – электромагнитный 4 –потенциал, : : – знак нормального произведения /по повторному индексу ν производится суммирование/.

В первом приближении по " e " получаем

$$\frac{\delta^2 S}{\delta\bar{\psi}_e(x')\,\delta\psi_e(x)} = i e\, \delta(x-x')\, \gamma^\nu\, T(A_\nu(x) S). \qquad /2.2/$$

Согласно обобщенной теореме Вика /[5б] с.285/ в среднем значении по фотонному вакууму от правой части /2.2/ хронологическое произведение можно заменить хронологическим спариванием:

$$\langle T(A_\nu(x)\, S)\rangle_0 = \langle T(\overbrace{A_\nu(x)\, S})\rangle_0 =$$

$$= i g^{\rho\nu} \int \mathcal{D}_0^c(x-y) \langle \frac{\delta S}{\delta A_\rho(y)} \rangle_0\, d_4 y,$$

где

$$\mathcal{D}_0^c(z) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \lim_{\epsilon\to+0} \int \frac{e^{ikz}}{k^2 + i\epsilon}\, d_4 k$$

причинная функция Грина для электромагнитного поля,

$$g^{00}=-g^{11}=-g^{22}=-g^{33}=1\,,\qquad g^{\alpha,\beta}=0\quad(\alpha\neq\beta).$$

Подставляя /2.2/ в /2.1/ и применяя обощенную теорему Вика, после интегрирования по x' , x и K получим

$$\langle f|S|i\rangle=\frac{e}{(2\pi)^3}\bar{v}^{z'}(\vec{p}_e')\gamma_\nu g^{\nu\nu}\int d_4y\,\frac{e^{-iqy}}{q^2}\langle p'|a^{(-)}_{p'}(\vec{q}')a^{(-)}_{p''}(\vec{q}'')\frac{\delta S}{\delta A_\nu(y)}|p\rangle v^z(p_e),$$

где

$$q\equiv p_e-p_e'. \qquad /2.3/$$

Благодаря устойчивости однонуклонного состояния, выражаемой соотношением $\overset{+}{S}|p\rangle=|p\rangle$, находим

$$\langle p'|a^{(-)}_{p'}(\vec{q}')a^{(-)}_{p''}(\vec{q}'')\frac{\delta S}{\delta A_\nu(y)}|p\rangle=-i\langle p'|a^{(-)}_{p'}(\vec{q}')a^{(-)}_{p''}(\vec{q}'')\,i_\nu(y)|p\rangle,$$

где

$$i_\nu(y)\equiv i\,\frac{\delta S}{\delta A_\nu(y)}\overset{+}{S} \qquad /2.4/$$

оператор электромагнитного тока.

Перенося операторы уничтожения $a^{(-)}$ направо, для матричного элемента процесса /1.1/ получаем окончательно

$$\langle f|S|i\rangle=\frac{e}{(2\pi)^9}\,g^{\nu\nu}\,\frac{\bar{v}^{z'}(\vec{p}_e')\gamma_\nu v^z(\vec{p}_e)}{i\sqrt{4q_0'q_0''}\,q^2}\times$$

$$\times\iiint d_4x'\,d_4x''\,d_4y\,\langle p'|\frac{\delta^2 i_\nu(y)}{\delta\varphi_{p'}(x')\delta\varphi_{p''}(x'')}|p\rangle\cdot e^{i(q'x'+q''x''-qy)}$$

/2.5/

В рассматриваемом приближении этому матричному элементу соответствует следующая диаграмма Файнмана:

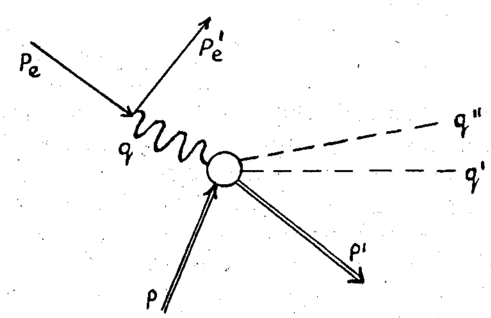

Рис. 1.

В силу трансляционной инвариантности, интеграл в правой части /2.5/ может быть преобразован к виду:

$$\iiint d_4 x' \, d_4 x'' \, d_4 y < p' | \frac{\delta^2 i_\nu (y)}{\delta \varphi_{p'}(x') \delta \varphi_{p''}(x'')} | p > e^{i(q'x' + q''x'' - qy)} =$$

$$= -(2\pi)^4 \delta (p + q - p' - q' - q'') \, T^{ret}, \qquad /2.6/$$

где

$$T^{ret}(q', q''; q) = \iint d_4 x' \, d_4 x'' \, F^{ret}(x', x'') \, e^{i(q'x' + q''x'')}, \qquad /2.7/$$

$$F^{ret}(x', x'') = - < p' | \frac{\delta^2 i_\nu (0)}{\delta \varphi_{p'}(x') \delta \varphi_{p''}(x'')} | p > . \qquad /2.8/$$

В силу причинности /в форме данной Н.Н.Боголюбовым[6]/

$$F^{ret}(x', x'') = 0 \quad \text{если} \quad x' \lesssim 0 \quad \text{или} \quad x'' \lesssim 0 .^{x/} \qquad /2.9/$$

Для написания дисперсионных соотношений по методу Н.Н.Боголюбова[5] необходимо, вместе с запаздывающей амплитудой T^{ret}, рассматривать и эрмитово-сопряженную величину, равную опережающей амплитуде T^{adv}. По определению

$$\frac{e}{(2\pi)^5} g^{\nu\nu} \frac{\bar{v}^{r'}(\vec{p}_e') \gamma_\nu v^r(\vec{p}_e)}{\sqrt{4 q_0' q_0''} \; q^2 i} \delta (p + q - p' - q' - q'') \, T^{adv} = < f | \overset{+}{S} | i > \qquad /2.10/$$

Чтобы представить T^{adv} в виде аналогичном /2.7/, /2.8/ введем вспомогательную величину типа тока[xx/]

$$\tilde{i}_\nu (x) = -i \frac{\delta \overset{+}{S}}{\delta A_\nu (x)} S = i \, \overset{+}{S} \frac{\delta S}{\delta A_\nu (x)} = \overset{+}{S} i_\nu (x) S . \qquad /2.11/$$

---

x/ Здесь, как обычно, неравенство $x < 0$ для четырехмерного вектора x, является сокращенным обозначением неравенств $x_0 < 0, \; x^2 \equiv x_0 - \vec{x}^2 \geq 0$, а знак $x \sim 0$ означает, что $x^2 < 0$ или $x = 0$.

xx/ Здесь мы пользуемся обозначениями Кибла[2]. У Логунова и Тавхелидзе[3] вспомогательный ток отличается знаком.

Из соотношения

$$\frac{\delta \tilde{\iota}_\nu(x)}{\delta \varphi_\rho(y)} = \overset{+}{S} \frac{\delta j_\rho(y)}{\delta A_\nu(x)} S, \qquad /2.12/$$

где

$$j_\rho(y) \equiv i \frac{\delta S}{\delta \varphi_\rho(y)} \overset{+}{S}, \qquad /2.13/$$

и из условия причинности для тока $j_\rho(y)$ следует, что

$$\frac{\delta \tilde{\iota}_\nu(x)}{\delta \varphi_\rho(y)} = 0 \quad \text{для} \quad y \gtrsim x. \qquad /2.14/$$

Повторяя рассуждения, которые привели нас к выражениям /2.7/, /2,8/ для T^{ret}, из /2.10/ получим

$$T^{adv}(q', q''; q) = \iint d_4 x' d_4 x'' F^{adv}(x', x'') e^{i(q'x' + q''x'')}, \qquad /2.15/$$

где

$$F^{adv}(x', x'') = -\langle p' | \frac{\delta^2 \tilde{\iota}_\nu(0)}{\delta \varphi_{\rho'}(x') \delta \varphi_{\rho''}(x'')} | p \rangle. \qquad /2.16/$$

В силу /2.14/

$$F^{adv}(x', x'') = 0 \quad \text{если} \quad x' \gtrsim 0 \quad \text{или} \quad x'' \gtrsim 0. \qquad /2.17/$$

Так как, согласно /2.10/ $\overset{+}{T}{}^{ret} = T^{adv}$, величины

$$\mathcal{D} \equiv \frac{1}{2}(T^{ret} + T^{adv}), \qquad A \equiv \frac{1}{2i}(T^{ret} - T^{adv}) \qquad /2.18/$$

являются эрмитовыми и выражают эрмитовую и антиэрмитовую части амплитуды рассматриваемого процесса.

§ 3. Кинематика

В настоящем параграфе мы следуем в основном работам [3,4] /где изучается кинематика процессов $N + \gamma \to N + 2\gamma$ и $N + \pi \to N + 2\pi$ /. Подобный подход к кинематике намечен в работе Полкинхорна [7].

В пункте а/ рассматривается кинематика процесса

$$N + v \longrightarrow N' + b + c \qquad /3.1/$$

в общем случае, когда v может быть виртуальная или реальная частица, а " b " и " c " имеют, вообще говоря, разные массы. В конце этого пункта общие формулы конкретизируются для интересующих нас частных случаев.

В пункте б/ показано, как можно выразить все введенные /в специальной системе отсчета/ величины через лоренц-инвариантные параметры.

а / Кинематика процесса $N+\nu \to N'+b+c$

4-импульсы частиц участвующих в этом процессе связаны законом сохранения

$$p+q=p'+q'+q''. \qquad /3.2/$$

В рассматриваемом нами процессе /1.1/ этот закон вытекает из /2.6/.

Кроме того, квадраты всех импульсов фиксированы:

$$p^2=p'^2=M^2, \qquad q^2,\ q'^2,\ q''^2 \leq \mu^2, \qquad /3.3/$$

/ M -масса нуклона, μ -масса π -мезона, $M \approx 6{,}8\mu$ /.

Будем работать в системе Брайта для нуклонов:

$$\vec{p}+\vec{p}'=0. \qquad /3.4/$$

В этой системе положим

$$q'_0=e^{\xi}\omega, \qquad q''_0=e^{-\xi}\omega, \qquad /3.5/$$

где параметр ξ не зависит от ω. Введем вектор

$$\Delta=\frac{1}{2}(e^{-\xi}q'-e^{\xi}q'')=(0,\vec{\Delta}) \qquad /3.6/$$

и обозначим его квадрат через $-m_\Delta^2$:

$$-\Delta^2=\vec{\Delta}^2=m_\Delta^2. \qquad /3.7/$$

Введем еще сокращенные обозначения

$$\tau_0=ch\xi\cdot\frac{1}{2}(q'^2e^{-\xi}+q''^2e^{\xi})+m_\Delta^2, \qquad /3.8/$$

$$\sigma=\frac{q'^2-q''^2}{2\tau_0 ch\xi}, \qquad /3.9/$$

$$\eta=\frac{e^{2\xi}q''^2-e^{-2\xi}q'^2}{4m_\Delta^2}=th\xi\cdot\left(\frac{\tau_0}{m_\Delta^2}-1\right)-\frac{\sigma}{2m_\Delta^2}ch\xi\cdot\tau_0, \qquad /3.10/$$

$$\beta=sh\xi+\eta ch\xi=\frac{2sh\xi-\sigma ch^2\xi}{2m_\Delta^2}\tau_0, \qquad /3.11/$$

$$M_\Delta^2=\tau_0-\frac{1}{4}q^2. \qquad /3.12/$$

Определим 4-вектор Q равенством

$$Q = \frac{1}{2}\left\{ e^{-\xi}(1-\eta)q' + e^{\xi}(1+\eta)q'' \right\} = \frac{1}{2}(e^{-\xi}q' + e^{\xi}q'') - \eta\Delta . \qquad /3.13/$$

Константа η /3.10/ выбрана так, чтобы векторы Q и Δ были ортогональны друг другу

$$Q\Delta = -\vec{Q}\vec{\Delta} = 0. \qquad /3.14/$$

В силу /3.5/ $Q_0 = \omega$.

В дальнейшем вместо векторов q' и q'' будем пользоваться векторами Δ и Q :

$$q' = e^{\xi}\left\{ Q + (1+\eta)\Delta \right\}, \qquad q'' = e^{-\xi}\left\{ Q - (1-\eta)\Delta \right\}. \qquad /3.15/$$

Возведя любое из этих равенств в квадрат и учитывая /3.14/ и определения /3.8/–/3.11/, получим

$$ch^2\xi . Q^2 = m_\Delta^2 \beta^2 + \tau_0 = (sh\xi - \frac{1}{2}\delta ch^2\xi)^2 \left(\frac{\tau_0}{m_\Delta}\right)^2 + \tau_0 . \qquad /3.16/$$

Закон сохранения 4-импульса /3.2/ в системе /3.4/ выразится следующим образом через введенные векторы:

$$2\vec{p} + \vec{q} = 2\, ch\xi . \vec{Q} + 2\beta\vec{\Delta} , \qquad /3.17/$$

$$q_0 = 2\, ch\xi . Q_0 = 2\, ch\xi . \omega . \qquad /3.18/$$

Равенство /3.18/ может быть преобразовано к виду

$$\frac{1}{2}(\vec{q} - 2\, ch\xi . \vec{Q})\frac{1}{2}(\vec{q} + 2\, ch\xi \cdot \vec{Q}) = ch^2\xi . Q^2 - \frac{q^2}{4} . \qquad /3.19/$$

Пусть $\vec{e}$ единичный вектор ортогональной плоскости $(\vec{p}, \vec{\Delta})$, а $\vec{\tau}$ единичный вектор в плоскости / $\vec{p}, \vec{\Delta}$ / ортогональный к $\vec{\Delta}$ и пусть α угол между $\vec{p}$ и $\vec{\Delta}$:

$$(\vec{\tau}, \vec{p}) = \tilde{p}\sin\alpha , \ (\vec{p}, \vec{\Delta}) = \tilde{p}\, m_\Delta \cos\alpha , \ (\vec{\tau}, \vec{\Delta}) = 0,$$

$$\vec{\tau}^2 = \vec{e}^2 = 1 , \ (\vec{e}, \vec{\tau}) = (\vec{e}, \vec{\Delta}) = 0 , \ \tilde{p} \equiv |\vec{p}| . \qquad /3.20/$$

Из /3.17/ и /3.19/ после элементарных вычислений находим

$$\vec{Q} = \lambda \vec{e} - L\vec{\tau},$$

$$\vec{q} = 2\,ch\xi . \lambda \vec{e} + 2\left(\beta - \frac{\widetilde{p}}{m_\Delta}\cos\alpha\right)\vec{\Delta} - 2S.\vec{\tau}, \qquad /3.21/$$

где

$$2\,ch\xi . \sin\alpha . \widetilde{p} L = M_\Delta^2 - \widetilde{p}^2 + 2\beta m_\Delta \widetilde{p}\cos\alpha,$$

$$\lambda^2 = \omega^2 - Q^2 - L^2, \qquad /3.22/$$

$$2\widetilde{p}\sin\alpha . S = M_\Delta^2 - \widetilde{p}^2\cos 2\alpha + 2\beta m_\Delta \widetilde{p}\cos\alpha .$$

/Мы исключаем случаи, когда $\alpha = 0$ или $\alpha = \pi$, т.е. когда $\sin\alpha = 0$ /. Важно отметить, что в этих выражениях только вектор $\lambda\vec{e}$ зависит от энергии.

В итоге, мы выразили все интересующие нас величины через независимые параметры ξ, $\widetilde{p}$, m_Δ, α и через энергетическую переменную ω. В случае виртуального процесса к числу независимых параметров нужно добавить еще величину q^2, которая, в силу /2.3/ меньше нуля.

Если массы рожденных частиц одинаковы

$$q'^2 = q''^2 = \mu^2, \qquad /3.23/$$

$\delta = 0$ и формулы /3.8/–/3.11/ упрощаются:

$$\tau_0 = \mu^2 ch^2\xi + m_\Delta^2, \qquad \delta = 0,$$

$$\eta = th\xi . \left(\frac{\tau_0}{m_\Delta^2} - 1\right), \qquad \beta = sh\xi . \frac{\tau_0}{m_\Delta^2} . \qquad /3.24/$$

Наиболее простым является случай, когда в конце процесса рождаются два γ-кванта / $q'^2 = q''^2 = 0$ /. 3

В случае же, когда рождаются π-мезон и фотон / $q'^2 = \mu^2$, $q''^2 = 0$ /

$$\delta = \frac{\mu^2}{2\,ch\xi . \tau_0}, \qquad \tau_0 = ch\xi . \frac{e^{\xi}}{2}\mu^2 + m_\Delta^2 .$$

б/ Введение инвариантных параметров

Введение лоренц-инвариантных переменных целесообразно в качестве предварительного шага для перехода в дисперсионных соотношениях в систему центра масс с учетом отдачи [1]. Оно полезно также и для строгого доказательства дисперсионных соотношений по методу Боголюбова /см. [5а] математическое дополнение, а также и [2], Обсуждение теоремы /7.1//.

Отметим сначала, что можно ввести инвариантным образом параметр ξ, определяя его из первого равенства /3.6/ и уравнения

$$\Delta(p+p')=0; \qquad /3.25/$$

это даст

$$e^{2\xi}=\frac{q'(p+p')}{q''(p+p')}, \qquad /3.26/$$

/величина /3.26/ положительна, так как произведение двух ненулевых временно-подобных векторов с положительными нулевыми компонентами всегда положительно/.

После определения ξ из /3.26/ можно ввести инвариантным образом векторы Δ и Q, а значит и параметр $m_\Delta=\sqrt{-\Delta^2}$ /параметр q^2 инвариантен по определению/. Для того, чтобы выразить инвариантным образом величины $\omega, \tilde{p}$ и α удобно пользоваться еще инвариантами

$$\nu_0\equiv\frac{p+p'}{2}Q, \qquad \nu_1\equiv\frac{qQ}{2}, \qquad \nu_2\equiv\frac{1}{2}q\Delta. \qquad /3.27/$$

Из закона сохранения /3.2/ записанного в форме

$$p-p'=2(\operatorname{ch}\xi\cdot Q+\beta\Delta)-q$$

получаем

$$\tilde{p}^2\equiv-\left(\frac{p-p'}{2}\right)^2=-\operatorname{ch}^2\xi\cdot Q^2+\beta^2 m_\Delta^2-\frac{q^2}{4}+2(\operatorname{ch}\xi\cdot\nu_1+\beta\nu_2)$$

или, пользуясь /3.12/ и /3.16/

$$\tilde{p}^2=-M_\Delta^2+2(\operatorname{ch}\xi\cdot\nu_1+\beta\nu_2); \qquad /3.28/$$

$$\omega=\frac{\nu_0}{\sqrt{M^2+\tilde{p}^2}}, \qquad \tilde{p}m_\Delta\cos\alpha=-(p\Delta)=\beta m_\Delta^2+\nu_2. \qquad /3.29/$$

Другие скалярные произведения легко выражаются через ν_i. Например:

$$\vec{p}\vec{Q} \equiv \frac{p-p'}{2} Q = ch\xi \cdot Q^2 - \nu_1 ,$$

$$q \frac{p-p'}{2} = 2(ch\xi \cdot \nu_1 + \beta\nu_2 - \frac{q^2}{4}).$$

Отметим, что только инвариант ν_0 зависит от энергии ω и его можно рассматривать как энергетическую переменную, а параметры ν_1, ν_2, ξ, q^2 считать фиксированными.

Для дальнейшего нам понадобится также и обратная связь - выражения инвариантных скалярных произведений через параметры, использованные в пункте а/:

$$2\, ch\xi . \nu_1 \equiv ch\xi \cdot q Q = 2\tau_0 + 2\beta^2 m_\Delta^2 - 2\beta m_\Delta \tilde{p} \cos\alpha - M_\Delta^2 + \tilde{p}^2 ; \qquad /3.30/$$

$$\nu_2 \equiv \frac{1}{2} q\Delta = -\beta m_\Delta^2 + \tilde{p} m_\Delta \cos\alpha ;$$

$$ch\xi \cdot q q' = 2 ch\xi \cdot \tau_0 + 2\tilde{p} m_\Delta \cos\alpha - e^{\xi}(M_\Delta^2 - \tilde{p}^2) + \delta ch^2\xi \cdot \tau_0 , \qquad /3.31/$$

$$ch\xi . q q'' = 2 ch\xi \cdot \tau_0 - 2\tilde{p} m_\Delta \cos\alpha - e^{-\xi}(M_\Delta^2 - \tilde{p}^2) + \delta ch^2\xi \cdot \tau_0 ; \qquad /3.32/$$

$$ch^2\xi \cdot q' q'' = m_\Delta^2 + ch 2\xi . \tau_0 - sh\xi . ch^2\xi . \delta\tau_0 . \qquad /3.33/$$

§ 4. Дисперсионные соотношения

а/ Схема доказательства. Анализ антиэрмитовой части.

В этом пункте мы укажем, какие модификации нужно сделать в схеме рассуждения работы[4], для того, чтобы вывести дисперсионные соотношения для процессов виртуального фоторождения двух частиц /на основе теоремы, сформулированной в [4] §3/.

Путем замены переменных

$$x' = \frac{e^{-\xi}}{2}\{(1-\eta)x + y\}, \qquad x'' = \frac{e^{\xi}}{2}\{(1+\eta)x - y\}$$

уравнения /2.7/ и /2.15/ могут быть преобразованы к виду

$$T^{ret}(\omega, \lambda\vec{e}) = \iint_G d_4x . d_4y\, F^r(x,y)\, e^{i(Qx+\Delta y)}, \qquad /4.1/$$

$$T^{adv}(\omega, \lambda\vec{e}) = \iint_{G'} d_4x . d_4y\, F^a(x,y)\, e^{i(Qx+\Delta y)}, \qquad /4.2/$$

где в силу условий причинности /2.9/, /2,17/, интегрирование в /4.1/ и /4.2/ распространяется соответственно в областях

$$G: x>0, \qquad -(1-\eta)x<y<(1+\eta)x,$$

$$G': x<0, \qquad (1+\eta)x<y<-(1-\eta)x.$$

Отсюда, пользуясь /3.21/, /3.22/, заключаем, что выражения /4.1//(4.2)/являются аналитическими функциями в верхней /нижней/ полуплоскости комплексной переменной ω если выполняется неравенство[x/]

$$|\mathrm{Im}\,\omega|>|\mathrm{Im}\,\lambda(\omega)|\equiv|\mathrm{Im}\sqrt{\omega^2-Q^2-L^2}\,|. \qquad /4.3/$$

Так как

$$2\frac{d}{du}\left(\mathrm{Im}\sqrt{u+iv}\right)^2=\frac{d}{du}\left(\sqrt{u^2+v^2}-u\right)=\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}-1<0,$$

$|\mathrm{Im}\sqrt{u+iv}\,|$ является убывающей функцией от " u ", и следовательно неравенство /4.3/ не удовлетворяется для реальных импульсов частиц /для вещественных Q и L /. Поэтому сначала мы рассматриваем фиктивный процесс, когда квадраты 4-импульсов виртуального фотона и рожденных частиц задаются соотношениями /ср.[4]/.

$$q^2=4(\tau-M_\Delta^2),$$

$$q'^2=\frac{\tau-m_\Delta^2}{ch^2\xi}+\sigma e^{\xi}\tau, \qquad q''^2=\frac{\tau-m_\Delta^2}{ch^2\xi}-\sigma e^{-\xi}\tau. \qquad /4.4/$$

При этом новая вспомогательная переменная τ выбирается таким образом, чтобы выражение Q^2+L^2 было отрицательным:

$$(2\,sh\,\xi-\sigma ch\,\xi)^2\frac{\tau^2}{m_\Delta^2}+2\Big[(2\,sh\,\xi-\sigma ch^2\xi)\frac{M_\Delta^2-\tilde{p}^2}{\tilde{p}}\cos\alpha+$$
$$+2m_\Delta\sin^2\alpha\Big]\frac{\tau}{m_\Delta}+\frac{(M_\Delta^2-\tilde{p}^2)^2}{\tilde{p}^2}<0. \qquad /4.5/$$

---

x/ Как мы уже указывали[4], неравенство /4.3/ нельзя заменить более слабым неравенством, как это делается в работе Кибла [2] /§ 6/.

Для того, чтобы /4.5/ выполнялось на некотором интервале вещественной оси τ, необходимо и достаточно, чтобы дискриминант левой части /4.5/ был положительным:

$$\left|2\,sh\xi-\delta ch^2\xi\right|\cdot\left|\frac{M_\Delta^2-\tilde{p}^2}{\tilde{p}}\right|<\left|2m_\Delta \sin^2\alpha+(2\,sh\xi-\delta ch^2\xi)\frac{M_\Delta^2-\tilde{p}^2}{\tilde{p}}\cos\alpha\right|.$$

Предположим, что $\tilde{p}^2<M_\Delta^2$ и что $2\tilde{p}m_\Delta \sin^2\alpha>(M_\Delta^2-\tilde{p}^2)|(2sh\xi-\delta ch^2\xi)\cos\alpha|$. Тогда последнее неравенство может быть записано в виде:

$$2\,sh\xi-\delta ch^2\xi<\frac{4\tilde{p}m_\Delta}{M_\Delta^2-\tilde{p}^2}\cos^2\frac{\alpha}{2},\quad \text{если}\quad 2\,sh\xi-\delta ch^2\xi>0,$$

/4.6/

$$\left|2sh\xi-\delta ch^2\xi\right|<\frac{4\tilde{p}m_\Delta}{M_\Delta^2-\tilde{p}^2}\sin^2\frac{\alpha}{2},\quad \text{если}\quad 2\,sh\xi-\delta ch^2\xi<0.$$

При выполнении /4.6/ неравенство /4.5/ имеет место для

$$\tau_1<\tau<\tau_2, \qquad /4.7/$$

где τ_1 и τ_2 - корни уравнения $Q^2+L^2=0$. В случае, когда $2sh\xi-\delta ch^2\xi=0$, /4.7/ переходит в неравенство

$$\tau<-\frac{(M_\Delta^2-\tilde{p}^2)^2}{(2\sin\alpha.\tilde{p})^2}. \qquad /4.7/$$

Для избежания точек разветвления, которые могут возникнуть из-за неопределенности знака перед $\lambda=\sqrt{\omega^2-Q^2-L^2}$, в дальнейшем, не оговаривая и не обозначая это особо, будем рассматривать, как обычно /1 - 5/, симметризованные и антисимметризованные амплитуды по вектору $\vec{e}$, т.е. величины

$$\frac{1}{2}\left(T(\omega,\lambda\vec{e})+T(\omega,-\lambda\vec{e})\right),\qquad \frac{1}{2\lambda}\left(T(\omega,\lambda\vec{e})-T(\omega,-\lambda\vec{e})\right). \qquad /4.8/$$

Следуя [4], легко показать, что когда τ изменяется в интервале /4.7/

$$T(\omega,\tau)=\begin{cases}T^{ret} & Im\,\omega>0\\ T^{adv} & Im\,\omega<0\end{cases} \qquad /4.9/$$

является аналитической функцией на всей комплексной плоскости ω , за исключением конечного числа точек и линий разреза на вещественной оси. Это утверждение вытекает из рассмотрения разности

$$2i\,A(\omega,\tau)=T^{ret}(\omega,\tau)-T^{adv}(\omega,\tau) \qquad /4.10/$$

на вещественной оси ω .

В силу /2.11/

$$\frac{\delta^2 \tilde{\imath}_\nu(x)}{\delta\varphi_{\rho'}(x')\delta\varphi_{\rho''}(x'')}=\overset{+}{S}\frac{\delta^2 i_\nu(x)}{\delta\varphi_{\rho'}(x')\delta\varphi_{\rho''}(x'')}S-\frac{i}{2}\overset{+}{S}\Big\{\Big[\frac{\delta i_\nu(x)}{\delta\varphi_{\rho'}(x')},j_{\rho''}(x'')\Big]+$$

$$+\Big[\frac{\delta i_\nu(x)}{\delta\varphi_{\rho''}(x'')},j_{\rho'}(x')\Big]+\Big[\frac{\delta j_{\rho''}(x'')}{\delta A_\nu(x)},j_{\rho'}(x')\Big]+\Big[\frac{\delta j_{\rho'}(x')}{\delta A_\nu(x)},j_{\rho''}(x'')\Big]+$$

$$+\Big[i_\nu(x),\Big(\frac{\delta j_{\rho''}(x'')}{\delta\varphi_{\rho'}(x')}+\frac{\delta j_{\rho'}(x')}{\delta\varphi_{\rho''}(x'')}\Big)\Big]\Big\}S,$$

где токи j_ρ определяются формулой /2.13/.

Отсюда для антиэрмитовой части A /4.10/ получаем

$$A(\omega,\tau)=\pi\sum_n\Big\{V_{q'}(n,p')D_{qq''}(p,n)\delta\big(p_0+e^{\xi}\omega-\sqrt{M_n^2+(\vec{p}-\vec{q}')^2}\big)-$$

$$-D_{qq''}(n,p')V_{q'}(p,n)\delta\big(p_0-e^{\xi}\omega-\sqrt{M_n^2+(\vec{p}-\vec{q}')^2}\big)+ \qquad /4.11/$$

$$+V_{q''}(n,p')D_{qq'}(p,n)\delta\big(p_0+e^{-\xi}\omega-\sqrt{M_n^2+(\vec{p}-\vec{q}'')^2}\big)-$$

$$-\mathcal{D}_{qq'}(n,p')V_{q''}(p,n)\,\delta\left(p_0-e^{-\xi}\omega-\sqrt{M_n^2+(\vec{p}-\vec{q}'')^2}\right)+$$

$$+\mathcal{D}_{-q'q''}(n,p')V_{q}(p,n)\,\delta\left(p_0+2\,ch\xi.\,\omega-\sqrt{M_n^2+(\vec{p}-\vec{q}'-\vec{q}'')^2}\right)-$$

$$-V_{q}(n,p')\mathcal{D}_{-q'q''}(p,n)\,\delta\left(p_0-2\,ch\xi.\,\omega-\sqrt{M_n^2+(\vec{p}-\vec{q}'-\vec{q}'')^2}\right)\Big\}\,;$$

здесь

$$\mathcal{D}_{qq''}(p,n)\equiv(4\pi)^3\int e^{i(q+q'')x}\left\langle p^{(n)}\right|\frac{\delta i_\nu(-x)}{\delta\varphi_{\rho''}(x)}+\frac{\delta j_{\rho''}(x)}{\delta A_\nu(-x)}\left|p\right\rangle d_4x,$$

$$V_{q'}(n,p')\equiv\left\langle p'\right|j_{\rho'}(0)\left|p^{(n)}\right\rangle, \qquad /4.12/$$

причем

$$p'+q'=p^{(n)},\qquad\qquad p+q=p^{(n)}+q'', \qquad /4.13/$$

и аналогично для следующих слагаемых.

Используя кинематические формулы § 3, находим

$$(\vec{p}-\vec{q}')^2=\tilde{p}^2+e^{2\xi}\omega^2+\frac{m_\Delta^2-\tau}{ch^2\xi}-\sigma e^{\xi}\tau+\frac{e^{\xi}}{ch\xi}(M_\Delta^2-\tilde{p}^2)-2\tilde{p}\,m_\Delta\frac{\cos\alpha}{ch\xi},$$

$$(\vec{p}-\vec{q}'')^2=\tilde{p}^2+e^{-2\xi}\omega^2+\frac{m_\Delta^2-\tau}{ch^2\xi}+\sigma e^{-\xi}\tau+\frac{e^{-\xi}}{ch\xi}(M_\Delta^2-\tilde{p}^2)+2\tilde{p}\,m_\Delta\frac{\cos\alpha}{ch\xi},$$

$$(\vec{p}-\vec{q}'-\vec{q}'')^2=-\tilde{p}^2+4ch^2\xi\,\omega^2-4\tau+2M_\Delta^2\,.$$

Отсюда легко получить, что особенности δ -функций выражения /4.11/ находятся в точках $\pm\omega_\ell(n)$ / $\ell = 1, 2, 3$ /, где

$$\pm 2 ch\xi \cdot p_0\, \omega_1(n) = e^{-\xi} ch\xi \cdot (M_n^2 - M^2) + (1 - th\xi)(m_\Delta^2 - \tau) -$$

$$- \delta ch\xi \cdot \tau + M_\Delta^2 - \tilde{p}^2 - 2 e^{-\xi} m_\Delta \tilde{p} \cos\alpha ,$$

$$\pm 2 ch\xi \cdot p_0\, \omega_2(n) = e^{\xi} ch\xi \cdot (M_n^2 - M^2) + (1 + th\xi)(m_\Delta^2 - \tau) +$$

$$+ \delta ch\xi \cdot \tau + M_\Delta^2 - \tilde{p}^2 + 2 e^{\xi} m_\Delta \tilde{p} \cos\alpha ,$$

$$\pm 2 ch\xi \cdot p_0\, \omega_3(n) = \frac{1}{2}(M_n^2 - M^2) - 2\tau + M_\Delta^2 - p^2 ,$$

$$/p_0 = \sqrt{M^2 + \tilde{p}^2}/, \qquad /4.14/$$

/верхний знак /+/ соответствует первой, третьей и пятой δ - функциям, а нижний /-/ - второй, четвертой и шестой δ -функциям выражения /4.11//. При $M_n = M$ из /4.14/ находим шесть полюсов $\pm\omega_\ell$, которые возникают из однонуклонных состояний. Границы непрерывных спектров соответствующих δ -функций получаются из /4.14/ при $M_n = M + \mu$.

Теперь легко показать, что при надлежащем ограничении области изменения параметров ξ , $\tilde{p}$, m_Δ, α , q^2 , можно добиться того, чтобы нижняя граница непрерывного спектра $\omega_c = \min\limits_{\ell=1,2,3} \omega_{\ell_c}$ была положительной, а однонуклонные полюса лежали до непрерывного спектра. В случае, когда $q'^2 = q''^2 = \mu^2$ /для реального процесса/, как и в [4] граница непрерывного спектра совпадает с границей непрерывного спектра для $\omega_3(n)$ и определяется равенством

$$2 ch\xi \cdot p_0\, \omega_c = M\mu + \frac{1}{2}\mu^2 + M_\Delta^2 - \tilde{p}^2 - 2\tau . \qquad /4.15/$$

Из предыдущего ясно, что функции $T^{ret}(\omega,\tau)$ и $T^{adv}(\omega,\tau)$ действительно представляют собой одну и ту же аналитическую функцию $T(\omega,\tau)$ /4.9/, регулярную в области $\mathrm{Im}\,\omega \neq 0$ с линиями разреза вдоль действительной оси при $-\infty < \omega < -\omega_c$

и $\omega_c < \omega < \infty$ и полюсами первого порядка в точках $\pm \omega_e$. Применяя теорему Коши для этой функции получим дисперсионные соотношения для фиктивного процесса /4.4/ / τ изменяется в интервале /4.7/ /.

Аналитическое продолжение дисперсионных соотношений по вспомогательной переменной проводится вполне аналогично работе [4]. Оно основывается на такой же теореме как и в [4] § 3, доказательством которой мы еще не располагаем.

Аналогично проводится и исследование первых четырех слагаемых суммы /4.11/ для однонуклонных состояний /см.[4] § 4/ . Такое рассмотрение показывает, что операторы типа $\mathcal{D}_{qq''}(p,p'')$ могут быть аналитически продолжены по τ до $\tau = \tau_0$ и совпадают с эрмитовой частью амплитуды виртуального фоторождения одной частицы, исследованной в [16]. Так как энергия мезона в системе Брайта для этого процесса лежит ниже порога реакции виртуального фоторождения, то величину $\mathcal{D}$ следует вычислить через соответствующий дисперсионный интеграл.

Вершинные операторы V, со своей стороны, тождественны с рассмотренными в [4]. Они тоже аналитически продолжаются по τ до $\tau = \tau_0$ и имеют следующий вид / в случае, когда в конце рождаются мезоны/:

$$V_{q'}(p'', p') = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \bar{u}(p') \gamma_5 \tau_{\rho'} g(q'^2) u(p''). \qquad /4.15/$$

Величина $g(\mu^2)$ может быть отождествлена с мезонным зарядом /см.[5] /.

Предполагая, что амплитуда рассматриваемого процесса не возрастает на бесконечности[x/] можно окончательно написать дисперсионные соотношения в виде /относительно обозначений см./2.18/ /:

$$\mathcal{D}(\omega) - \mathcal{D}(\omega_0) = \frac{\omega-\omega_0}{\pi} \mathcal{P} \int_{|\omega'|>\omega_c} \frac{A(\omega')}{(\omega'-\omega)(\omega'-\omega_0)} d\omega' +$$

$$+ (\omega-\omega_0) \sum_{\ell=1}^{3} \left\{ \frac{g_\ell}{(\omega_\ell-\omega_0)(\omega_\ell-\omega)} - \frac{h_\ell}{(\omega_\ell+\omega_0)(\omega_\ell+\omega)} \right\}, \qquad /4.16/$$

где константы g_ℓ и h_ℓ выражаются через операторы $\mathcal{D}$ и V /ср.[4], формулы /2.11/ /:

---

x/ Это предположение не является существенным/хотя оно для упругих процессов оправдывается на эксперименте/. Относительно общего случая см.[4].

$$g_1(\tau_0) = |e^{-\xi} + \frac{\omega_1}{p_0}| V_{q'}(p'', p')\, \mathcal{D}_{qq''}(p, p''),$$

$$g_2(\tau_0) = |e^{\xi} + \frac{\omega_2}{p_0}| V_{q''}(p'', p')\, \mathcal{D}_{qq'}(p, p''),$$

$$h_1(\tau_0) = |e^{-\xi} + \frac{\omega_1}{p_0}| \mathcal{D}_{qq''}(p'', p')\, V_{q'}(p, p''),$$

$$h_2(\tau_0) = |e^{\xi} + \frac{\omega_2}{p_0}| \mathcal{D}_{qq'}(p'', p')\, V_{q''}(p, p'');$$

константы g_3 и h_3 не удается выразить непосредственно через амплитуды реальных процессов.

б/ <u>Ненаблюдаемая область</u>

В этом пункте покажем, что пороговая энергия $\omega_п$ рассматриваемого процесса, определенная соотношением

$$\omega_п^2 = Q^2 + L^2 \qquad /4.17/$$

/ Q^2 и L^2 определены равенствами /3.16/ и /3.22//, всегда больше нижнего предела интегрирования в дисперсионных соотношениях /4.16/, т.е. всегда существует ненаблюдаемая область.

Ограничимся для простоты случаем, когда в конце реакции рождаются частицы одного и того же сорта, т.е. когда $q'^2 = q''^2 = \mu^2$.

Величина ненаблюдаемой области может быть охарактеризована разностью /см. /4.15/ и /4.17/ /.

$$\omega_п^2 - \omega_c^2 = \frac{\tau_0}{ch^2\xi} + \frac{1}{ch^2\xi \cdot \sin^2\alpha} \left\{ \frac{(M_\Delta^2 - \tilde{p}^2)^2}{4\tilde{p}^2} + \beta \frac{m_\Delta}{\tilde{p}} (M_\Delta^2 - \tilde{p}^2)\cos\alpha + \beta^2 m_\Delta^2 \right\} - \frac{1}{4ch^2\xi \cdot (M^2 + \tilde{p}^2)} \left(M_\mu + \frac{\mu^2}{2} + M_\Delta^2 - \tilde{p}^2 - 2\tau_0 \right)^2 \qquad /4.18/$$

Можно показать, что выражение /4.18/ применяет наименьшее значение /относительно угла α /, когда

$$\cos\alpha = -2\frac{\tilde{p}m_\Delta}{M_\Delta^2-\tilde{p}^2}\beta.$$

/4.19/

Если заменить в /4.18/ $\cos\alpha$ через его выражение /4.19/, то получим

$$ch^2\xi\cdot(\omega_n^2-\omega_c^2)=\mu^2 ch^2\xi+m_\Delta^2(1+\beta^2)-\frac{(M\mu+\frac{\mu^2}{2}+M_\Delta^2-\tilde{p}^2-2\tau_0)^2}{4(M^2+\tilde{p}^2)}.$$

Правая часть последнего равенства является неубывающей функцией $|\xi|$ и следовательно принимает наименьшее значение при ξ = 0. Тогда, согласно /3.24/, β=0 и значит, в силу /4.19/, $\alpha=\frac{\pi}{2}$. Для $\xi=0$, $\alpha=\frac{\pi}{2}$,

$$4\tilde{p}^2(M^2+\tilde{p}^2)(\omega_n^2-\omega_c^2) =$$

$$= M^2m_\Delta^4+2\left[M^2\mu^2+\left(\frac{\mu^2-q^2}{2}+M\mu\right)\tilde{p}^2-\frac{q^2}{4}M\right]m_\Delta^2+(M+\mu)^2\tilde{p}^4+$$

$$+\left\{\mu^2\left[\frac{3}{4}(\mu^2-q^2)+M(M+\mu)\right]+\frac{q^2}{2}M(M+\mu)\right\}\tilde{p}^2+$$

$$+M^2\left(\mu^2-\frac{q^2}{4}\right)^2. \qquad /4.20/$$

Для того, чтобы /4.20/ обращалось в нуль при положительных m_Δ^2 необходимо и достаточно, чтобы член не содержащий m_Δ был меньше нуля. Это последнее условие выполнимо только, если

$$\frac{3}{4}\mu^2(q^2-\mu^2)-3M(M+\mu)\mu^2>0,$$

что невозможно, так как в нашем случае $q^2<0$.

Этим показано, что , в дисперсионных соотношениях для процесса $(p+\gamma\to p'+\pi'+\pi'')$, всегда есть ненаблюдаемая область.

В заключение выражаю глубокую благодарность А.А.Логунову, под руководством которого выполнена эта работа.

Литература

1. а/ А.А.Логунов, ДАН, 117, 792 /1957/.

б/ А.А.Логунов, Л.Д.Соловьев, В.Кукин и А.Р.Френкин, Дисперсионные соотношения для виртуального фоторождения /см.препринт ОИЯИ - 1958г./

2. T.W.B. Kibble, Proc.Roy.Soc. 244, 355 (1958)

3. А.А.Логунов и А.Н.Тавхелидзе, Вопросы теории дисперсионных соотношений. Nuclear Physics 8, 374 /1958/./см.препринт ОИЯИ - 1958 г./

4. А.А.Логунов и И.Т.Тодоров, О доказательстве дисперсионных соотношений для неупругих процессов. Nuclear Physics /в печати/ / см.препринт ОИЯИ-1958/.

5. а/ Н.Н.Боголюбов, Б.В.Медведев и М.К.Поливанов, Вопросы теории дисперсионных соотношений. Москва, ГИТТЛ /в печати/,

б/ Н.Н.Боголюбов и Д.В.Ширков, Введение в теорию квантованных полей, Москва, ГИТТЛ, 1957.

6. Н.Н.Боголюбов, ДАН Изв. АН СССР Сер.физ. 19 № 2, 237 /1955/.

7. J.C.Polkinghorne, Nuovo Cimento 4, 216 (1956).