ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р-2415

И. Чермак, И. Марек, М. Грмела

ЦЕПНАЯ РЕАКЦИЯ
НА БЫСТРЫХ НЕЙТРОНАХ
В ПЛОСКОЙ РЕШЕТКЕ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1965

Р-2415

И. Чермак, И. Марек,[x)] М. Грмела[x)]

ЦЕПНАЯ РЕАКЦИЯ НА БЫСТРЫХ НЕЙТРОНАХ В ПЛОСКОЙ РЕШЕТКЕ

x) Постоянный адрес: Институт ядерных исследований, Чехословацкой АН, Прага.

Обозначим плотность эмиссии нейтронов $\psi(\vec{r}, E)$. Тогда, если имеет место изотропия элементарных явлений, то функция ψ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\psi(\vec{r}, E) = \iint d\vec{r}'\cdot dE'\cdot \Delta(E, E') \frac{\exp\{-\ell(\vec{r}, \vec{r}')\}}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|^2} \psi(\vec{r}', E'), \qquad (1)$$

где ℓ – оптическое расстояние между $\vec{r}$ и $\vec{r}'$,

$$\Delta(E, E') = \nu(E') \Sigma_f(E') S(E) + \Sigma_e(E') U(E, E') + \Sigma_i(E') W(E, E').$$

В общем случае $\Delta(E,E')$ является также функцией пространственных координат. ν – среднее число нейтронов на одно деление; Σ_f, Σ_e, Σ_i – макроскопические эффективные сечения деления, упругого и неупругого рассеяния. Полное макроскопическое сечение обозначим через Σ.

Тогда можно определить значение материального параметра B в бесконечной однородной среде. Предположим, что распределение плотности эмиссии нейтронов можно записать в виде $\bar{\psi}(E) \exp\{iBz\}$. Подстановкой этого выражения в уравнение (1) для $\bar{\psi}$ получим интегральное уравнение

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(E) &= \int dE' \bar{\Delta}(E, E') \bar{\psi}(E'), \\ \bar{\Delta} &= \Delta(E, E') B^{-1} \operatorname{arctg} \frac{B}{\Sigma(E')}, \end{aligned} \qquad (2)$$

которое выражает условие для определения параметра B. Величина B должна быть такой, чтобы первое собственное значение уравнения (2) было равно 1. В работе /1/ такой метод использовался для численных расчетов значений B в однородной смеси U^{235} и U^{238}.

Целью настоящей статьи является решение более сложной задачи, именно определение величины B в гетерогенной системе, изображенной на рис. 1.

Среда (1) и (2) образует систему из бесконечных пластин толщиной a_1 и a_2 соответственно. Введем обозначение $a = a_1 + a_2$. Для такой системы уравнение (1) для k-ого слоя в среде 1 приобретает вид:

$$\psi(E, z+ka) = \tfrac{1}{2}\int dE'\,\Delta_1(E,E') \sum_{k'=-\infty}^{\infty} \int_0^{a_1} dz'\, E_1(|\Sigma_1(z'-z) + \Sigma a(k'-k)|)\, \psi(E', z'+k'a) +$$

$$+\tfrac{1}{2}\int dE'\,\Delta_2(E,E') \sum_{k'=-\infty}^{\infty} \int_0^{a_2} dz'\, E_1(|\Sigma_2 z' - \Sigma_1 z + \Sigma a(k'-k) + \Sigma_1 a_1|)\, \psi(E', z'+k'a+a_1), \tag{3а}$$

$$0 \le z \le a_1$$

и подобным же образом в среде 2

$$\psi(E, z+ka+a_1) = \tfrac{1}{2}\int dE'\,\Delta_1(E,E') \sum_{k'=-\infty}^{\infty} \int_0^{a_1} dz'\, E_1(|\Sigma_1 z' - \Sigma_2 z + \Sigma a(k'-k) - \Sigma_1 a_1|)\, \psi(E', z'+k'a) +$$

$$+\tfrac{1}{2}\int dE'\,\Delta_2(E,E') \sum_{k'=-\infty}^{\infty} \int_0^{a_2} dz'\, E_1(|\Sigma_2(z'-z) + \Sigma a(k'-k)|)\, \psi(E', z'+k'a+a_1), \tag{3б}$$

$$0 \le z \le a_2.$$

Индексы 1 и 2 означают, что ядерные величины взяты для среды 1 и 2 соответственно. Введены также следующие обозначения $\Sigma a = \Sigma_1 a_1 + \Sigma_2 a_2$ и

$$E_n(z) = \int_1^{\infty} dt\, t^{-n} e^{-zt}.$$

Сущность нашего метода для определения материального параметра B заключается в том, что мы предполагаем ψ в виде:

$$\psi(E, z+ka) = \psi^{(1)}(z, E)\, e^{ikBa}, \qquad 0 \le z \le a_1, \tag{4а}$$

$$\psi(E, z+ka+a_1) = \psi^{(2)}(z, E)\, e^{ikBa}, \qquad 0 \le z \le a_2,$$

$$\psi^{(\mu)}(z, E) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{2\ell+1}{2}\, \frac{2}{a_\mu}\, \psi_\ell^{(\mu)}(E)\, P_\ell\left(\frac{2z - a_\mu}{a_\mu}\right), \quad \mu = 1, 2, \tag{4б}$$

где P_ℓ – полиномы Лежандра.

С физической точки зрения уравнения (4а) и (4б) выражают разложение функции ψ на две части. Первая часть e^{ikBa} описывает грубое поведение плотности ψ в виде, соответствующем решению для однородной среды. Вторая часть описывает тонкую структуру плотности ψ, учитывающую неоднородность среды. При этом предполагается, что $Ba \ll 1$ (это условие в большинстве случаев выполняется), что дает возможность выбирать ступенчатый вид функции (4а, б).

Подставим теперь выражения (4) в уравнения (3) и интегрируем по z в отдельных средах $(0, a_1)$, $(0, a_2)$. Если ограничиться только нулевыми моментами, для таких моментов получим систему уравнений в виде:

$$\psi_0^{(1)}(E) = \int D_{11}(E, E', B)\, \psi_0^{(1)}(E')\, dE' + \int D_{12}(E, E', B)\, \psi_0^{(2)}(E')\, dE'$$

$$\psi_0^{(2)}(E) = \int D_{21}(E, E', B)\, \psi_0^{(1)}(E')\, dE' + \int D_{22}(E, E', B)\, \psi_0^{(2)}(E')\, dE', \tag{5}$$

где, например,

$$D_{11} = \frac{1}{2a_1}\Delta_1(E, E')\Big\{\int_0^{a_1} dz \int_0^{a_1} dz'\, E_1(\Sigma_1|z'-z|) +$$

$$\sum_{\mu=1}^{\infty} e^{-iBan} \int_0^{a_1} dz \int_0^{a_1} dz'\, E_1[\Sigma_1(z'-z) + n\Sigma a] + \sum_{\mu=1}^{\infty} e^{iBan} \int_0^{a_1} dz \int_0^{a_1} dz'\, E_1[\Sigma_1(z'-z) + n\Sigma a]\Big\}.$$

Другие коэффициенты даются подобными выражениями.

Существование нетривиального положительного решения системы уравнений (5) дает условие для определения параметра B подобно тому, как это делается и в случае однородной среды (2).

Вышеизложенный метод подробнее описывается в работе /2/, где он используется не только для определения материального параметра B, но и для определения периода T в бесконечной плоской решетке. В работе /2/ также изучается так называемая макроскопическая анизотропия неоднородной среды /4/ и поведение величин B и T при предельном переходе $a_1 \to 0$, $a_2 \to 0$, $\frac{a_1}{a_2} = \text{const}$.

Покажем практическое применение вышеизложенного метода на численном расчете конкретной задачи о нахождении материального параметра B в плоской решетке, состоящей из чередующихся пластинок U^{235} и U^{238} с различным коэффициентом обогащения.

Для численного расчета удобно привести коэффициенты к виду

$$D_{11} = \Delta_1(E, E')\left[\frac{1}{\Sigma_1} - \frac{1}{\Sigma_1^2 a_1} A_1\right],$$

$$D_{22} = \Delta_2(E, E')\left[\frac{1}{\Sigma_2} - \frac{1}{\Sigma_2^2 a_2} A_2\right],$$

$$D_{12} = \Delta_2(E, E')\, \frac{A}{\Sigma_1 \Sigma_2 a_2}, \qquad D_{21} = \Delta_1(E, E')\, \frac{A}{\Sigma_1 \Sigma_2 a_1},$$

где

$$A = \int_0^1 dz\, \frac{z\left(1 - e^{-\frac{\Sigma_1 a_1}{z}}\right)\left(1 - e^{-\frac{\Sigma_2 a_2}{z}}\right)\left(1 - e^{-\frac{\Sigma a}{z}}\right)\cos Ba}{1 - 2e^{-\frac{\Sigma a}{z}}\cos Ba + e^{-\frac{2\Sigma a}{z}}}$$

$$A_1 = \int_0^1 dz \, \frac{z\left(1-e^{-\frac{\Sigma_1 a_1}{z}}\right)\left[1-\left(e^{-\frac{\Sigma_2 a_2}{z}}+e^{-\frac{\Sigma a}{z}}\right)\cos Ba + e^{-\frac{\Sigma a+\Sigma_2 a_2}{z}}\right]}{1-2e^{-\frac{\Sigma a}{z}}\cos Ba + e^{-\frac{2\Sigma a}{z}}},$$

$$A_2 = \int_0^1 dz \, \frac{z\left(1-e^{-\frac{\Sigma_2 a_2}{z}}\right)\left[1-\left(e^{-\frac{\Sigma_1 a_1}{z}}+e^{-\frac{\Sigma a}{z}}\right)\cos Ba + e^{-\frac{\Sigma a+\Sigma_1 a_1}{z}}\right]}{1-2e^{-\frac{\Sigma a}{z}}\cos Ba + e^{-\frac{2\Sigma a}{z}}}$$

и

$$\Delta_\mu = \nu_\mu(E')\Sigma_{f\mu}(E')S(E) + \Sigma_{i\mu}(E')W(E,E') + \Sigma_{e\mu}(E')\delta(E-E') =$$

$$= \theta_\mu(E,E') + \Sigma_{e\mu}(E')\delta(E-E').$$

Здесь мы приняли $U(E,E')=\delta(E-E')$, что отвечает предположению о том, что при упругом рассеянии нейтронов на ядрах урана энергия нейтронов не изменяется. При трансформации коэффициентов также использовалось предположение $Ba \ll 1$.

Чтобы найти нетривиальное решение системы (5), разделим энергию нейтронов по N группам. Пусть нейтронам κ-группы соответствует энергия E_κ. Обозначим также

$$\int_\kappa \psi_0^{(\mu)}(E)\,dE = \psi_{0\kappa}^{(\mu)},$$

(где интегрирование происходит в интервале энергий группы κ)

$$\int_\kappa \theta_\mu(E,E_\beta)\,dE = \theta_\mu^{\kappa\beta}, \qquad \mu = 1,2;$$

$$\kappa, \beta = 1,2,\ldots,N,$$

и заменим систему (5) системой $2N$ линейных уравнений, которую символически можно записать в виде:

$$T(B)X = X, \qquad X = \begin{pmatrix} \dfrac{\psi_{0\kappa}^{(1)}}{a_1} \\ \dfrac{\psi_{0\kappa}^{(2)}}{a_2} \end{pmatrix},$$

$$T(B) = \begin{pmatrix} \theta_1^{\kappa\beta} a^\beta + \Sigma_{e1}^\kappa a^\kappa \delta_{\kappa\beta}, & \theta_2^{\kappa\beta} b^\beta + \Sigma_{e2}^\kappa b^\kappa \delta_{\kappa\beta} \\ \theta_1^{\kappa\beta} c^\beta + \Sigma_{e1}^\kappa c^\kappa \delta_{\kappa\beta}, & \theta_2^{\kappa\beta} d^\beta + \Sigma_{e2}^\kappa d^\kappa \delta_{\kappa\beta} \end{pmatrix}$$

$$a^\kappa(B) = \frac{1}{\Sigma_1^\kappa} - \frac{1}{a_1(\Sigma_1^\kappa)^2} A_1(E_\kappa, B), \qquad b^\kappa(B) = \frac{A(E_\kappa, B)}{\Sigma_1^\kappa \Sigma_2^\kappa a_1},$$

$$d^\kappa(B) = \frac{1}{\Sigma_2^\kappa} - \frac{1}{a_2(\Sigma_2^\kappa)^2} A_2(E_\kappa, B), \qquad c^\kappa(B) = \frac{a_1}{a_2} b^\kappa(B),$$

где, например, $\Sigma_1^\kappa = \Sigma_1(E_\kappa)$, $\quad \Sigma_{e1}^\kappa = \Sigma_{e1}(E_\kappa)$

$$\delta_{\kappa\beta} = \begin{cases} 1 & \text{для} \quad \kappa = \beta \\ 0 & \text{для} \quad \kappa \neq \beta \end{cases}.$$

Как уже раньше отмечалось, работа /1/ содержит подробные численные результаты для однородной смеси U^{235} и U^{238}. Для того чтобы иметь возможность сравнить полученные нами результаты, первоначальные постоянные были взяты теми же, что и в работе /1/.

Были сделаны расчеты для гетерогенной решетки U^{235} и U^{238} с обогащением 10, 20 и 30% (например, для $a = 1$ см, под обогащением 10% подразумевается $a_1 = 0{,}1$ см и $a_2 = 0{,}9$ см). Индекс 1 обозначает среду с U^{235}, индекс 2 – среду с U^{238}. Так же как и в работе /1/ мы разделили энергию нейтронов по 16 группам. Верхние пределы энергий имеют значения 0,02; 0,05; 0,09; 0,14; 0,20; 0,28; 0,40; 0,70; 0,90; 1,20; 1,60; 2,20; 3,00; 4,20; ∞ (Мэв). Энергия нейтронов, соответствующая каждой группе, является средней энергией этой группы за исключением последней группы, для которой среднее значение было принято равным 4,60 Мэв.

Спектр нейтронов деления был взят в виде:

$$S(E) = \sqrt{\frac{2}{\pi e}} \exp(-E) \sin h\sqrt{2E},$$

(E в единицах Мэв)

а зависимость ν от энергии нейтронов в виде:

$$\nu = \begin{cases} 2{,}47 + 0{,}125\,E & \text{для} \quad U^{235} \\ 2{,}41 + 0{,}125\,E & \text{для} \quad U^{238}. \end{cases}$$

Здесь

$$W(E,E') = K\,\sigma_\mu(E)\,E\,\exp\{2\sqrt{a(E'-E)}\},$$

где σ_μ – эффективное сечение образования составного ядра, K – нормировочный коэффициент, и $a = 13$ Мэв. Значения всех эффективных сечений также взяты по данным работы /1/.

При расчете сначала выбиралось некоторое значение B_1. Затем с помощью итераций с любым начальным вектором вычислялось первое собственное значение $\mu(B_1)$ и соответствующий собственный вектор матрицы $T(B_1)$. Использовался итерационный метод, приведенный в [3]

$$x_{n+1} = \frac{1}{\mu_n} T x_n ; \qquad x^*_{n+1} = \frac{1}{\mu_n} T^* x^*_n , \qquad \mu_n = \frac{(T x_n, x^*_n)}{(x_n, x^*_n)},$$

где T^* – матрица, транспонированная к матрице T. Оказывается, что для $B_1 < B_2$ имеется $\mu(B_1) > \mu(B_2)$. Используя это неравенство и метод regula falsi, мы находили такое значение B, для которого $\mu(B) = 1$ с точностью до четырех десятичных знаков. Интегралы A, A_1, A_2 рассчитывались численно. Для расчета одного значения B было необходимо провести от 15 до 20 итераций.

Расчеты проводились на счетно-решающих машинах "Sirius" и М-20.

Численные результаты:

обогащение	a см	B см$^{-1}$
30%	0,01	0,1817
	0,1	0,176
	1	0,169
20%	0,01	0,137
	0,1	0,130
	1	0,126
10%	0,01	0,0654
	0,1	0,0612
	1	0,0555
	2	0,0481

Мы убедились на опыте, что большая точность в расчете $\mu(B)$ приводит к изменениям лишь порядка 10^{-4} – 10^{-5}. Для случая однородной смеси авторы работы [1] приводят значения:

обогащение	30%	20%	10%
в см$^{-1}$	0,185	0,144	0,0682

Из полученных результатов видно, что при переходе к однородной смеси (т.е. $a \to 0$, $\frac{a_1}{a_2} = \text{const}$) наши значения B приближаются к значением B для однородного случая, что подтверждает теоретические заключения работы [2]. Интересно

отметить, что с увеличением гетерогенности (с ростом a) уменьшается значение B.

Поскольку использованные нами групповые константы могут до некоторой степени отличаться от групповых констант, использованных в работе [1] (например, в работе [4] значения эффективных сечений даются в виде графика, а не числа, что затрудняет точное воспроизведение групповых констант при повторении расчетов), необходимо значения B, заимствованные из работы [1], брать при сравнении только ориентировочно.

Также необходимо отметить, что полученные нами численные результаты могут иметь относительно большую ошибку, поскольку мы в разложении (4а, б) ограничились только нулевыми моментами. Это обстоятельство приводит, по-видимому, к тому, что и очень маленькое изменение гетерогенности среды (например, при изменении размера ячейки от 0,1 до 0,01 см) приводит к заметному изменению величины материального параметра B. Это обстоятельство кажется несколько удивительным. С другой стороны, необходимо иметь в виду тот факт, что длины свободного пробега нейтронов, проходящих в почти параллельном направлении с границей соседних ячеек, могут быть очень большими, следовательно, даже маленькое изменение гетерогенности может привести к существенным изменениями значений таких длин свободного пробега нейтронов.

В связи с этими вопросами представляет интерес таблица, в которой приведены энергетические спектры нейтронов в различных средах $\frac{1}{a_1}\psi_0^{(1)}(E)$ и $\frac{1}{a_2}\psi_0^{(2)}(E)$ (приведенные к единице длины). Результаты в таблице приведены для 20% обогащения $a = 0{,}1$ см (без нормировки). Видно, что спектры в обоих средах в этом случае почти совпадают, что отвечает физическим представлениям.

к	$\frac{1}{a_1}\psi_0^{(1)}(E_к)$	$\frac{1}{a_2}\psi_0^{(2)}(E_к)$
1	0,0871	0,0874
2	0,492	0,493
3	1,044	1,046
4	1,293	1,295
5	2,179	2,182
6	2,343	2,346
7	2,277	2,279
8	1,656	1,658
9	1,208	1,207
10	0,969	0,967
11	0,872	0,868
12	0,715	0,710
13	0,572	0,565
14	0,443	0,437
15	0,316	0,310
16	0,223	0,219

Литература

1. M.Feix, P.Nicourd, I.Valentin. Comptes rendus Acad. Sci., 244, 2502 (1957).
2. L.Trilifaj, J.Čermák. P/2102, Second Int. Conf. on Peaceful Uses of Atomic Energy (1958).
3. И. Марек. Чехословацкий математический журнал 12, 87 (1962).
4. А.Вайнберг, Е.Вигнер. Физическая теория ядерных реакторов, 675, Москва, 1961 (перевод с английского). ИИЛ.

Рукопись поступила в издательский отдел
28 октября 1965 г.

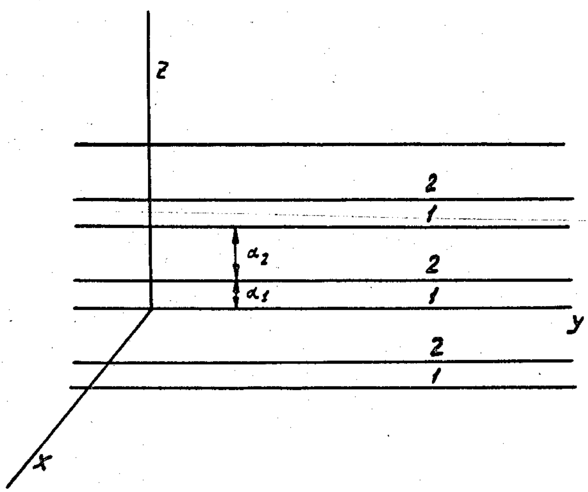

Рис. 1.