ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория теоретической физики

Р. 241

Р. Зайков

НЕЭВКЛИДОВА МЕТРИКА И СПИНОРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

г. Дубна, 1958 год

Р. 241

Р. Зайков

НЕЭВКЛИДОВА МЕТРИКА И СПИНОРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

А Н Н О Т А Ц И Я

Принимая неэвклидову и индефинитную метрику в гильбертовом пространстве выводим самые общие формы линейного и антилинейного спинорного преобразования. Выводится дираковское уравнение в этой метрике. Рассматривается 8 различных случаев спинорных преобразований.

Инвариантность лагранжиана свободного поля по отношению к инверсии времени сохраняется посредством антилинейного спинорного преобразования Вигнера, в то время как линейное преобразование инверсии времени, введенное Рака, не сохраняет инвариантности лагранжиана.

Примем во внимание следующие обстоятельства:

1. Вторичное квантование волновых функций требует рассмотрения спиноров ψ как q -чисел, которые удовлетворяют определенным антикоммутативным перестановочным соотношениям. Но величину „$i\psi^+\gamma_4$" можно рассматривать как дираковскую сопряженную спинора ψ только тогда, когда метрика гильбертового пространства эвклидова и дефинитна. Однако требования эвклидовости и дефинитности метрики не обязательны.

Допуская наличие неэвклидовой и индефинитной метрики, введем действующий в гильбертовом пространстве оператор $\Delta = \Delta(x)$. Тогда можно подобрать „Δ" так, чтобы величина:

$$\bar{\psi} = i\psi^+\gamma_4\Delta; \qquad (\Delta = \Delta^+) \qquad /1/$$

представляла собой в общем смысле сопряженную величину спинора ψ. При этом „γ_4" и „Δ" коммутируют между собой. Если написать теперь перестановочные соотношения:

$$[\psi(x), \bar{\psi}(y)]_+ = \frac{1}{i} S(x-y) \qquad /2/$$

то можно надеяться также, что при соответствующем выборе оператора „Δ", описывающего неэвклидову и индефинитную метрику, оператор „S" не будет содержать сингулярности на световом конусе. Теперь, однако, мы не будем рассматривать этот вопрос.

2. Полная симметрия, существующая в пространстве Минковского, требует равноправного рассмотрения всех четырех координат: X_1, X_2, X_3, $X_4 = it$; /C=I/. В работе

А.Прока[1] дается квантово-механическое обощение величины "собственное время "- τ " для случая свободного поля в рамках C -числовой теории. В нашей работе[2] дается обобщение этого понятия для случая существования электромагнитных и псевдоскалярных, нейтральных мезонных полей также в рамках C -числовой интепретации. При этом мы рассматривали "собственное время " τ ", независимо от релятивистского времени " t ". В действительности, даже в классической релятивистской механике дифференциал „$d\tau$" выражается через зависимость:

$$d\tau = \pm\sqrt{dt^2 - (d\vec{x})^2} \qquad /3/$$

так что для покоящейся материальной точки / $d\vec{x} = 0$/:

$$d\tau = \pm dt. \qquad /3^1/$$

Квантово-механическое обобщение собственного времени можно связать со спинорными преобразованиями, как это сделано, например, С.Танака[3]. Отсюда следует, что спиноры $\psi, \bar{\psi}$, должны быть заменены спинорами:

$$\omega = e^{MS}\cdot\psi; \quad \bar{\omega} = \bar{\psi}e^{-MS}; \quad s = i\tau; \ (\hbar = 1). \qquad /4/$$

Величины:

$$D\omega = (\gamma_\lambda \vec{\partial}_\lambda + \frac{\vec{\partial}}{\partial s})\omega = (\gamma_\lambda \vec{\partial}_\lambda + \mathcal{M})\omega;$$
$$\bar{\omega}D^x = -i(D\omega)^+\gamma_4\Delta = \bar{\omega}(\Delta^{-1}\overleftarrow{\partial}_\lambda \Delta\gamma_\lambda + \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial s}) = \bar{\omega}(\Delta^{-1}\overleftarrow{\partial}_\lambda\Delta\gamma_\lambda - \mathcal{M}) \qquad /5/$$

Можно рассматривать, как квантово-механические полные производные спиноров ω и $\bar{\omega}$ по параметру „S". В случае собственных Лоренцовых преобразований спиноров :

$$\omega' = A\omega; \quad \bar{\omega}' = i\omega^{+'}\gamma_4\Delta' = \bar{\omega}A^{-1}, \qquad /6/$$

где выполняются следующие зависимости:

$$\gamma_4 A^+\gamma_4 = A^{-1}; \quad A\Delta A^{-1} = \Delta^1 = \Delta; \ A\Delta^{-1}A^{-1} = (\Delta^{-1})^1 = \Delta^{-1};$$
$$A^{-1}\gamma_\lambda A = a_{\lambda\varsigma}\gamma_\varsigma; \quad A^{-1}\gamma_5 A = \gamma_5; \ (\gamma_5 = \gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4), \qquad /7/$$

величины „$D\omega$" и „$\bar{\omega}D^x$" преобразуются соответственно как величины ω и $\bar{\omega}$.

3. Координаты x_λ ; / λ = 1,2,3,4/, полевые функции, а также плотности, образованные билинейно от $\bar{\omega}$, ω -относительные величины. Физические константы, как например, M, c , $\hbar$, e , $\S$, элементарные объемы нужно рассматривать как величины абсолютные, независящие от спинорных преобразований. Эту точку зрения С.Ватабе[4] можно противоставить попыткам релятивизации массы покоя "M"[5], постоянной Планка „$\hbar$" [6] и т.д.

4. Лагранжиан свободного поля должен сохранять свою инвариатность при всех

линейных преобразованиях спиноров, отличающихся от собственных Лоренцовых. Обозначим через „Ω" трансформационный унитарный оператор, действующий в Гильбертовом пространстве. Линейные преобразования спиноров имеют вид:

$$\Omega\,\omega(x,s)\,\Omega^{-1}=F\cdot\omega(x',s'); \quad \Omega\,\bar\omega(x,s)\,\Omega^{-1}=l\eta\,\bar\omega(x',s')\cdot F^{-1}, \qquad /8/$$

где

$$\begin{cases} s'=s; \;\; F^{-1}\gamma_4 F=\eta\gamma_4\;;\;(\eta=\pm 1); \\ \Omega\Delta\Omega^{-1}=l\Delta'; \;\; \Omega\,\Delta^{-1}\Omega=l\,(\Delta^{-1})';\;(l=\pm 1); \end{cases} \qquad /9/$$

F - унитарный оператор:

$$F=f_0 I+f_i\gamma_i+\frac{1}{2}f_{ik}\gamma_{ik}\;;\;(f_{ik}=-f_{ki});\;(i,k=1,2,3,4,5), \qquad /10/$$

где:

$$\gamma_{ik}=-\frac{i}{2}(\gamma_i\gamma_k-\gamma_k\gamma_i), \qquad /11/$$

а величины „f" -постоянные комплексные C -числа. Эрмитовые матрицы γ_i, γ_{ik} удовлетворяют следующим зависимостям:

$$\frac{1}{2}(\gamma_i\gamma_k+\gamma_k\gamma_i)=\delta_{ik}I; \quad \frac{1}{2}(\gamma_i\gamma_{kl}+\gamma_{kl}\gamma_i)=-\frac{1}{2}\varepsilon_{iklrs}\gamma_{rs};$$

$$\frac{1}{2}(\gamma_{ik}\gamma_{lr}+\gamma_{lr}\gamma_{ik})=-\varepsilon_{iklrs}\gamma_s+(\delta_{il}\delta_{kr}-\delta_{kl}\delta_{ir})I$$

$$-\frac{i}{2}(\gamma_i\gamma_{kl}-\gamma_{kl}\gamma_i)=\delta_{il}\gamma_k-\delta_{ik}\gamma_l;$$

$$-\frac{i}{2}(\gamma_{ik}\gamma_{lr}-\gamma_{lr}\gamma_{ik})=\delta_{il}\gamma_{kr}-\delta_{ir}\gamma_{kl}+\delta_{kr}\gamma_{il}-\delta_{kl}\gamma_{ir}; \qquad /12/$$

где $\varepsilon_{iklrs}=\pm 1$, в зависимости от того образуют ли индексы i, k, l, r, s, четную или нечетную перестановку чисел 1, 2, 3, 4, 5. Матрицы γ_i, γ_{ik} коммутируют с операторами „Δ" и „Ω". Если далее положить:

$$F^{-1}\gamma_a F=\xi\gamma_a\;;\;(a=1,2,3);\quad(\xi=\pm 1). \qquad /13/$$

то

$$F^{-1}\gamma_5 F = \xi \cdot \eta \gamma_5 . \qquad /14/$$

При введении неэвклидовой и индефинитной метрики зависимости /9/, /13/ позволяют сохранить инвариантность лагранжиана свободного поля в случае преобразования "инверсии времени".

5. Антилинейные преобразования спиноров имеют вид:

$$\Omega\, \omega(x,s)\Omega^{-1} = F\cdot\bar{\omega}^{T}(x',s'); \quad \Omega\,\bar{\omega}(x,s)\Omega^{-1} = l\,\eta\,\omega^{T}(x',s')\cdot F^{-1}, \qquad /15/$$

где

$$\begin{cases} s' = -s; \quad F^{-1}\gamma_4 F = \eta\gamma_4^{T}; \quad (\eta = \pm 1); \\ \Omega\,\Delta\,\Omega^{-1} = l(\Delta^{-1})'^{T}; \quad \Omega\,\Delta^{-1}\Omega^{-1} = l\,\Delta'^{T}; \quad (l = \pm 1). \end{cases} \qquad /16/$$

Положим

$$F^{-1}\gamma_a F = \zeta\gamma_a^{T}; \quad (a = 1,2,3); \; (\zeta = \pm 1). \qquad /17/$$

следует также:

$$F^{-1}\gamma_5 F = \zeta\,\eta\,\gamma_5^{T}. \qquad /18/$$

В случае антилинейных преобразований спиноров, как например при зарядово-сопряженном преобразовании, лагранжиан свободного поля переходит в такой лагранжиан, который можно получить из первого транспонированием. Мы рассматривали только четырехкомпонентные спиноры. Полученные нами зависимости можно легко обобщить для случая спиноров с большим числом компонент, например, 8.

В случае линейных преобразований типа /8/, как и при антилинейных преобразованиях типа /15/, величины $D\omega''$, $\bar{\omega}D^{\times''}$ преобразуются как спиноры ω , $\bar{\omega}$. Пусть теперь операторы / Ω_1 , F_1 / и / Ω_2 , F_2 / относятся к двум различным линейным преобразованиям типа /8/. Тогда получаем:

$$\Omega\,\omega(x,s)\Omega^{-1} = F\omega(x'',s); \quad \Omega\,\bar{\omega}(x,s)\Omega^{-1} = l\,\eta\,\bar{\omega}(x'',s)\cdot F^{-1}, \qquad /19/$$

где мы положили:

$$\Omega = \Omega_2\Omega_1; \quad F = F_1F_2; \quad l = l_1 l_2; \quad \eta = \eta_1\eta_2 . \qquad /20/$$

Координата „x''" получается из „x" последовательным применением первой и второй трансформации. Если / Ω_1 , F_1 /относятся к линейным преобразованиям типа /8/, а / Ω_2 , F_2 / – к антилинейным преобразованиям типа /15/, то имеем:

$$\Omega\,\omega(x,s)\Omega^{-1}=F\bar{\omega}^{T}(x'',-s);\quad \Omega\,\bar{\omega}(x,s)\Omega^{-1}=l\eta\,\omega^{T}(x'',-s)F^{-1}, \qquad /21/$$

где Ω , F , l , η принимают значения /20/.

Образуем лагранжиан:

$$L=L^{+}=\frac{\bar{\omega}}{2i}\left\{D-D^{\times}-ie\,(\gamma_\lambda\varphi_\lambda+\varphi_\lambda^{\times}\gamma_\lambda)-i\,g\,(\gamma_5\Phi+\Phi^{\times}\gamma_5)\right\}\omega, \qquad /22/$$

где

$$\varphi_a^{\times}=\Delta^{-1}\varphi_a^{+}\Delta;\quad \varphi_4^{\times}=i\Delta^{-1}(-i\varphi_4)^{+}\Delta;\quad \Phi^{\times}=\Delta^{-1}\Phi^{+}\Delta;\ (a=1,2,3). \qquad /23/$$

Уравнения Дирака могут быть получены с помощью вариационного принципа из лагранжиана „L":

$$\int\delta L\,dx=\frac{1}{i}\int\left\{\delta\bar{\omega}\,G\omega-\bar{\omega}\,G^{\times}\delta\omega\right\}dx=0; \qquad /24/$$

$$(\delta\varphi_\lambda=0;\quad \delta\Phi=0;\quad \delta\Delta=0;\quad \delta\Delta^{-1}=0),$$

где

$$G=D-ie\gamma_\lambda\hat{\varphi}_\lambda-i\,g\,\gamma_5\hat{\Phi};\quad G^{\times}\equiv-\gamma_4\Delta^{-1}G^{+}\Delta\gamma_4= \qquad /25/$$

$$=D^{\times}+ie\,\hat{\varphi}_\lambda^{\times}\gamma_\lambda+i\,g\,\hat{\Phi}^{\times}\gamma_5,$$

а

$$\hat{\varphi}_\lambda=\frac{1}{2}(\varphi_\lambda+\varphi_\lambda^{\times})-\frac{1}{2ie}(\Delta^{-1}\vec{\partial}_\lambda\Delta-\vec{\partial}_\lambda);\quad \hat{\Phi}=\frac{1}{2}(\Phi+\Phi^{\times})$$

$$\hat{\Phi}^{\times}=\hat{\Phi};\quad \hat{\varphi}_\lambda^{\times}=\frac{1}{2}(\varphi_\lambda+\varphi_\lambda^{\times})-\frac{1}{2ie}(\Delta^{-1}\overleftarrow{\partial}_\lambda\Delta-\overleftarrow{\partial}_\lambda). \qquad /26/$$

Тогда уравнения Дирака принимают вид:

$$G\omega=0;\qquad \bar{\omega}\,G^{\times}\equiv-i(G\omega)^{+}\Delta\cdot\gamma_4=0. \qquad /27/$$

В случае линейных преобразований спиноров типа /8/ мы имеем зависимость:

$$\Omega\,L(x,s,e,g)\Omega^{-1}=L'(x',s,e,g) \qquad /28/$$

только тогда, когда

$$z\eta = 1;\ \Omega \vec{\partial}_a \Omega^{-1} = \zeta \cdot \vec{\partial}_a^{\,1};\ \ \Omega \vec{\partial}_4 \Omega^{-1} = \eta \vec{\partial}_4^{\,\prime};\ \Omega \frac{\vec{\partial}}{\partial s} \Omega^{-1} = \frac{\vec{\partial}^{\,1}}{\partial s} = \frac{\vec{\partial}}{\partial s};$$

$$\Omega \varphi_a \Omega^{-1} = \zeta \varphi_a^1;\ \ \Omega \varphi_4 \Omega^{-1} = \eta \varphi_4^1;\ \Omega \Phi \Omega^{-1} = \zeta \eta \Phi';\ (a = 1,2,3). \qquad /29/$$

В случае антилинейных преобразований спиноров типа /15/ мы имеем зависимость:

$$\Omega L(x,s,e,g)\Omega^{-1} = L'^{T}(x',-s,-e,-g) \qquad /30/$$

только тогда, когда

$$z\eta = -1;\ \ \Omega \vec{\partial}_a \Omega^{-1} = \zeta \left\{ (\Delta')^T \vec{\partial}_a' [(\Delta')^{-1}]^T \right\};\ \Omega \vec{\partial}_4 \Omega^{-1} =$$

$$= \eta \left\{ (\Delta^1)^T \vec{\partial}_4^{\,1} [(\Delta^1)^{-1}]^T \right\};\ \ \Omega \frac{\vec{\partial}}{\partial s} \Omega^{-1} = \frac{\vec{\partial}^{\,1}}{\partial s} = -\frac{\vec{\partial}}{\partial s};$$

$$\Omega \varphi_a \Omega^{-1} = \zeta (\varphi_a'^{x})^T;\ \ \Omega \varphi_4 \Omega^{-1} = \eta (\varphi_4'^{x})^T;$$

$$\Omega \Phi \Omega^{-1} = \zeta \eta (\Phi' x)^T;\ \ (a = 1,2,3).$$

$$/31/$$

Перестановочные соотношения свободного поля / $\varphi_\lambda = 0$, $\Phi = 0$ / принимают вид:

$$[\omega(x), \bar{\omega}(y)]_+ = i \left\{ \gamma_\lambda \left[\vec{\partial}_\lambda + \frac{1}{2} (\Delta^{-1} \vec{\partial}_\lambda \Delta - \vec{\partial}_\lambda) \right] - M \right\} D(x-y). \qquad /32/$$

Плотность тока – заряда:

$$J_\lambda = -\left(\frac{\delta L}{\delta \varphi_\lambda} + \frac{\delta L}{\delta \varphi_\lambda^x} \right) = e \bar{\omega} \gamma_\lambda \omega \qquad /33/$$

преобразуется при линейных преобразованиях типа /8/ следующим образом:

$$J_\lambda' = -\left\{ \frac{\delta(\Omega L \Omega^{-1})}{\delta \varphi_\lambda'} + \frac{\delta(\Omega L \Omega^{-1})}{\delta \varphi_\lambda^{1x}} \right\} = e \bar{\omega}' \gamma_\lambda \omega', \qquad /34/$$

т.е. не меняет своего знака. Эта величина /33/ однако преобразуется при антилинейных преобразованиях типа /15/ следующим образом:

$$J_\lambda' = -\left\{ \frac{\delta(\Omega L \Omega^{-1})}{\delta \varphi_\lambda'} + \frac{\delta(\Omega L \Omega^{-1})}{\delta \varphi_\lambda'^{x}} \right\}^T = -e \bar{\omega}' \gamma_\lambda \omega', \qquad /35/$$

т.е. меняет свой знак. При линейных преобразованиях /8/ различаем 4 случая. То же и при антилинейных преобразованиях /15/. Если обозначим через „ζ" комплексное C –

число с модулем = 1, так чтобы:

$$F = \zeta F^{(0)}; \quad (F^{(0)} = F^{(0)+}), \qquad /36/$$

тогда эти 4 линейные случая будут иметь следующий вид:

1/ Индетичное или антииндентичное преобразование / $l=1;\ \xi=1;\ \eta=1$ /:

$$F^{(0)} = I; \quad \zeta = \pm 1; \qquad /37/$$

2/ Пространственная инверсия / $l=1;\ \xi=-1\ \ \eta=1$ /:

$$F^{(0)} = \gamma_4; \quad \zeta = \mp i; \qquad /38/$$

3/ Инверсия времени $(l=-1;\ \xi=1;\ \eta=-1)$:

$$F^{(0)} = \gamma_{45} = i\gamma_1\gamma_2\gamma_3; \quad \zeta = \mp i; \qquad /39/$$

4/ Произведение преобразований 2/ x 3/$(l=-1;\ \xi=-1;\ \eta=-1)$:

$$F^{(0)} = \gamma_5; \quad \zeta = \pm i. \qquad /40/$$

4 антилинейные случая имеют следующий вид:

5/ Зарядовое сопряжение / $\zeta=\zeta_c;\ F^{(0)}=F_c^{(0)}$ / / $l=1;\ \xi=-1;\ \eta=-1$ /. Различаем следующих 4 частных случая:

а/ γ_a - действительные; γ_4, γ_5 - мнимые:

$$F_c^{(0)} = \gamma_4; \qquad /41/$$

б/ от γ_a - две мнимые, например, γ_1, γ_3; γ_2, γ_4, γ_5 - действительные:

$$F_c^{(0)} = \gamma_{24} = -i\gamma_2\gamma_4; \qquad /42/$$

в/ от γ_a - две действительные, например, γ_1, γ_3; γ_5 - действительное; γ_2, γ_4 - мнимые:

$$F_c^{(0)} = \gamma_{31} = -i\gamma_3\gamma_1; \qquad /43/$$

г/ от γ_a - две действительные, например γ_1, γ_3; γ_4 - действительное γ_2, γ_5 - мнимые:

$$F_c^{(0)} = \gamma_2; \qquad /44/$$

6/ Произведение преобразований 2/ x 5/ / $\tau=1$; $\xi=1$; $\eta=-1$ /:

$$F=\mp i\zeta_c\gamma_4 F_c^{(0)}; \qquad /45/$$

7/ Произведение преобразований 3/ x 5/ / $\tau=-1$; $\xi=-1$; $\eta=1$ /:

$$F=\pm\zeta_c\gamma_1\gamma_2\gamma_3 F_c^{(0)}; \qquad /46/$$

8/ Произведение преобразований : 4/ x 5/ / $\tau=-1$; $\xi=1$; $\eta=1$ /:

$$F=\pm i\zeta_c\gamma_5 F_c^{(0)}. \qquad /47/$$

Таким образом введение неэвклидовой и индефинитной метрики в Гильбертовом пространстве требует существенного изменения всего спинорного математического формализма. Практический смысл этого обобщения формализма можно видеть только при разрешении различных конкретных проблем из теории элементарных частиц, а также при устранении упомянутой нами еще в самом начале сингулярности.

Литература

I.A.Proca, Ann. de Physigue, 20,347 (I933).

2. Р.Зайков. Известия Болгарской Академии наук, серия физ. 5, 3 /1955/.

3. S.Tanaka, Progr.Theor.Phys.I8, 295 (I957).

4.S.Watanabe,Rev.Mod.Phys. 27,26,40 (I955)

5.S.Hori,A.Wakasa, Nuovo Cimento 6,304, (I957).

6.O.Costa de Beauregard, Comptes Rendus, Paris, Tome 245,956(I957).

6.I.Batynicki-Birula, Bull. de l'Acad. Polonise des Sciences,5,805(I957).