

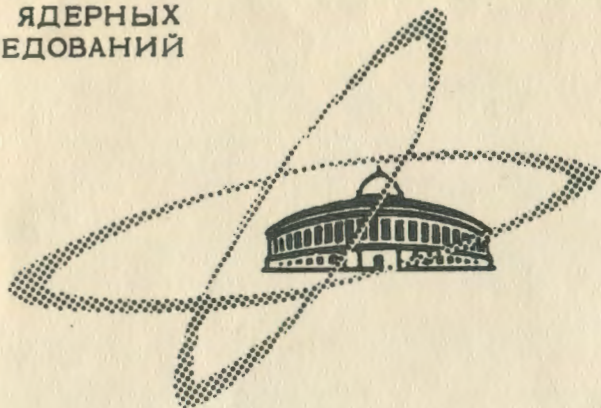
С345.0

К-471

ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р - 2408



В.С. Кладницкий

КОМПЕНСАЦИЯ ДИСПЕРСИИ ПУЧКА  
В МАГНИТНЫХ ОТКЛОНЯЮЩИХ СИСТЕМАХ

ЛАБОРАТОРИЯ ЯДЕРНЫХ ПРОБЛЕМ

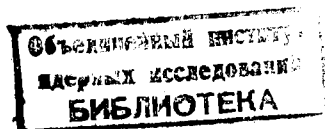
1965

P - 2408

В.С. Кладвицкий

КОМПЕНСАЦИЯ ДИСПЕРСИИ ПУЧКА  
В МАГНИТНЫХ ОТКЛОНЯЮЩИХ СИСТЕМАХ

Направлено в ЖТФ



3716/2 чг.

## 1. Введение

Для многих экспериментов необходимы пучки ускоренных частиц с небольшим разбросом по импульсам относительно заданного значения  $p_0$ . Нужный интервал импульсов выделяется с помощью анализирующего магнита и узкой вертикальной щели. Пучок, попадающий в экспериментальную установку, должен иметь небольшой поперечный размер. Поэтому частицы, прошедшие через щель, отклоняются вторым магнитом, который комплексировывает дисперсию пучка.

Система из двух секторных магнитов обеспечивает либо "ахроматическую фокусировку", либо "ахроматический перенос" пучка<sup>/1,2/</sup>. В первом случае имеется фокус по энергии, в котором собираются все частицы, прошедшие через щель. Очевидно, что экспериментальная аппаратура должна быть расположена в фокусе. Во втором случае падающий параллельный пучок отклоняется на заданный угол  $\theta$  и выходит из системы также в виде параллельного пучка, но с более узким интервалом импульсов. Если в отклоняющей системе используются квадрупольные линзы, то при определенном их расположении<sup>/1/</sup> ширина выходящего пучка не зависит от выделенного интервала  $\Delta p$ .

В настоящей работе рассматриваются афокальные отклоняющие системы, состоящие из секторных магнитов с однородными полями.

## 2. Двойное отклонение пучка в одном направлении

Параллельный пучок заряженных частиц последовательно отклоняется в магнитах  $M_1$  и  $M_2$  на углы  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  в одном направлении (рис. 1). Траекторию частицы с импульсом  $p_0$ , которая на входе в первый магнит совпадает с осью симметрии зазора, принимаем за ось пучка; радиус кривизны этой траектории в  $M_1$  и  $M_2$  равен соответственно  $\rho_1$  и  $\rho_2$ . Предположим вначале, что пучок входит в магниты и выходит из них нормально к границе поля.

Для описания движения частиц используем систему координат, непосредственно связанную с пучком. Одной из осей системы служит ось пучка, вдоль которой в направлении движения отсчитывается координата  $z$ . В любой точке  $z_0$  можно про-

вести касательную  $\sigma$  к этой оси, вертикальную ось  $z$  и ось  $x$  в медианной плоскости, которые образуют правую систему координат  $xzy$ .

Поперечное смещение частицы от оси параксиального пучка в медианной плоскости  $x$ , угол  $x' = dx/ds$ , который составляет ее траектория с осью в данной точке  $s_0$ , и относительное отклонение импульса частицы от  $P_0$  образуют пространственный вектор

$$X(s) = \begin{pmatrix} x(s) \\ x'(s) \\ \Delta p/P_0 \end{pmatrix}.$$

Перемножив последовательно матрицы переноса <sup>/3/</sup> для магнита M1, свободного пространства длиной  $L$  и магнита M2, получаем общую матрицу переноса для системы отклонения пучка:

$$(m_{ij}) = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Элементы первых двух строк матрицы (1) имеют следующий вид:

$$m_{11} = -\frac{L}{\rho_1} \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 - \frac{\rho_2}{\rho_1} \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 + \cos \alpha_1 \cos \alpha_2,$$

$$m_{12} = L \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \rho_1 \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 + \rho_2 \cos \alpha_1 \sin \alpha_2,$$

$$m_{13} = L \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 + \rho_1 \cos \alpha_2 (1 - \cos \alpha_1) + \rho_2 (1 - \cos \alpha_2 + \sin \alpha_1 \sin \alpha_2), \quad (2)$$

$$m_{21} = \frac{L}{\rho_1 \rho_2} \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 - \frac{\sin \alpha_1 \cos \alpha_2}{\rho_1} - \frac{\cos \alpha_1 \sin \alpha_2}{\rho_2},$$

$$m_{22} = -\frac{L}{\rho_2} \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 + \cos \alpha_1 \cos \alpha_2,$$

$$m_{23} = -\frac{L}{\rho_2} \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \sin \alpha_2 (1 - \cos \alpha_1) + (\sin \alpha_2 + \sin \alpha_1 \cos \alpha_2).$$

Эта матрица позволяет найти значение вектора  $X_1$  на выходе из магнита M2:

$$X_1 = (m_{ij}) X_0,$$

если известна величина

$$X_0 = \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \\ \Delta p/P_0 \end{pmatrix}$$

на входе в M1.

Для того, чтобы определить смещение и наклон траектории частицы относительно оси пучка на некотором расстоянии  $T$  от магнита M<sub>2</sub>, надо умножить матрицу для свободного участка длиной  $T$  на (1):

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ x'_2 \\ \Delta p/P_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & T & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x'_0 \\ \Delta p/P_0 \end{pmatrix} \quad (3)$$

Выполнив умножение, получаем:

$$x_2 = (m_{11} + T m_{21}) x_0 + (m_{12} + T m_{22}) x'_0 + (m_{13} + T m_{23}) \Delta p/P_0, \quad (4)$$

$$x'_2 = m_{21} x_0 + m_{22} x'_0 + m_{23} \Delta p/P_0.$$

В фокусе по энергии траектории частиц с импульсами, отличными от  $P_0$ , которые входят в первый магнит по оси пучка ( $x_0 = 0$ ,  $x'_0 = 0$ ), пересекаются с осью, и следовательно,

$$x_2 = (m_{13} + T m_{23}) \Delta p/P_0 = 0.$$

Расстояние от выходной грани магнита M2 до фокуса по энергии

$$F_E = -\frac{m_{13}}{m_{23}}. \quad (5)$$

Величина переноса пучка <sup>/1/</sup> определяется длиной перпендикуляра

$$d = L \sin \alpha_1 + \rho_1 (1 - \cos \alpha_1) + \rho_2 (1 - \cos \alpha_2), \quad (6)$$

опущенного из точки  $s$  на рис. 1 на направление падающего пучка. Подстановка матричных элементов  $m_{13}$  и  $m_{23}$  из (2) в выражение (5) дает

$$\frac{1}{F_E} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 (d/\rho_2 - C)}{\rho_2 (d/\rho_2 - C + C \sec \alpha_2)}, \quad (7)$$

где

$$C = (\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2) / \sin \alpha_2.$$

Для того, чтобы магнитная система отклоняла монохроматичный параллельный пучок на конечный угол, не нарушая параллельности траекторий частиц, она должна быть афокальной, а так как фокусное расстояние для монохроматичного пучка <sup>/3/</sup>

$$f = - \frac{1}{m_{21}}, \quad (8)$$

то матричный элемент  $m_{21}$  должен обратиться в нуль. Приравняв нулю выражение для  $m_{21}$  из (2), находим, что расстояние между магнитами, образующими афокальную систему, связано с радиусами кривизны и углами поворота пучка в M1 и M2 соотношением

$$L_{\text{аф}} = \rho_1 \operatorname{ctg} \alpha_1 + \rho_2 \operatorname{ctg} \alpha_2. \quad (9)$$

Здесь  $\rho_1 \operatorname{ctg} \alpha_1$  — расстояние от границы  $i$ -того секторного магнита до его фокуса, поэтому (9) выражает тривиальное требование совмещения фокальных плоскостей магнитов M1 и M2. Анализирующая шель должна быть установлена в точке пересечения общей фокальной плоскости осью пучка.

Последовательной подстановкой (8) и (9) в (7) находим расстояние до фокуса по энергии для случая, когда отклоняющая система афокальна для монохроматичных частиц, с импульсом  $\rho_0$ :

$$F_E = \frac{\rho_2(\rho_1 - \rho_2 + \rho_2 \operatorname{ctg} \alpha_2)}{\operatorname{tg} \alpha_2 (\rho_1 - \rho_2)}.$$

Из этого выражения видно, что вне зависимости от выбора углов поворота частиц  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  фокусировка по энергии происходит лишь при  $\rho_1 > \rho_2$ . Варьируя отношение  $\rho_1/\rho_2$  путем изменения напряженности поля в зазорах магнитов, можно менять величину  $F_E$ .

Система ахроматического переноса параллельного пучка должна быть афокальной и по энергии. Как непосредственно следует из выражения (7), фокусное расстояние по энергии становится бесконечно большим при  $d = C\rho_2$ . Подставляя это значение  $d$  в (6), определяем расстояние между магнитами

$$L = \rho_1 \operatorname{ctg} \alpha_1 + \rho_2 \operatorname{ctg} \alpha_2 - \frac{\rho_1 - \rho_2}{\sin \alpha_2}. \quad (10)$$

Сопоставление выражений (8) и (10) показывает, что условия афокальности для монохроматичного пучка и афокальности по энергии совместимы только при равенстве радиусов кривизны  $\rho_1$  и  $\rho_2$ . В этом случае матрица переноса (1) приобретает следующий вид:

$$\begin{pmatrix} -\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} & m_{12} & \rho(1 + \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2}) \\ 0 & -\frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

В матрице (11)  $m_{23} = 0$ , но  $m_{13} \neq 0$ , поэтому частицы выходят из магнита M2 параллельным пучком, ширина которого пропорциональна выделенному интервалу импульсов.

Для того, чтобы отклоняющая система была ахроматической и недисперсионной, матричные элементы  $m_{13}$  и  $m_{23}$  должны одновременно обращаться в нуль. Система, состоящая только из двух секторных магнитов, не удовлетворяет этому требованию. Предположим противное и приравняем выражения для  $m_{13}$  и  $m_{23}$  из (2) нулю:

$$L \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 + \rho_1 (1 - \cos \alpha_1) \cos \alpha_2 + \rho_2 (1 - \cos \alpha_2 + \sin \alpha_1 \sin \alpha_2) = 0,$$

$$-L \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 - \rho_1 (1 - \cos \alpha_1) \sin \alpha_2 + \rho_2 (\sin \alpha_2 + \sin \alpha_1 \cos \alpha_2) = 0.$$

Умножая первое равенство на  $\sin \alpha_2$ , а второе на  $\cos \alpha_2$  и складывая их почленно, получаем

$$\rho_2 (\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2) = 0,$$

а так как  $\rho_2 \neq 0$ , то  $\sin \alpha_1 = -\sin \alpha_2$ , что несовместимо с поворотом частиц в обоих магнитах в одну сторону.

Если для отклонения частиц используются два идентичных магнита ( $\rho_1 = \rho_2, \alpha_1 = \alpha_2$ ), то, как видно из матрицы переноса

$$\begin{pmatrix} -1 & m_{21} & 2\rho \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (12)$$

поперечный размер монохроматичного параллельного пучка в результате поворота не увеличивается. Однако система "пропускает" интервал импульсов  $2\Delta\rho$ , поэтому в действительности ширина выходящего пучка больше ширины падающего на  $4\rho\Delta\rho/\rho_0$ . Пучки частиц, выводимые из ускорителей, обычно хорошо коллимированы. При условии, что радиус кривизны  $\rho \leq 1$  м, а интервал  $2\Delta\rho$  не превышает 2-3%, это позволяет в ряде случаев использовать описанную выше афокальную систему из двух секторных магнитов вместо более сложных отклоняющих систем <sup>/1,3/</sup> с квадрупольными фокусирующими линзами.

### 3. Двойное отклонение пучка в противоположных направлениях

На рис. 2 частицы отклоняются в магнитах M1 и M2 в противоположных направлениях. Матрица переноса для магнитной системы отличается от (1) только членами

$$m_{13} = L \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 + \rho_1 (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1 \cos \alpha_2) + \rho_2 (\sin \alpha_1 \sin \alpha_2 + \cos \alpha_2 - 1)$$

и

$$m_{23} = -\frac{L}{\rho_2} \sin \alpha_1 \sin \alpha_2 - \frac{\rho_1}{\rho_2} \sin \alpha_2 (1 - \cos \alpha_1) + (\sin \alpha_1 \cos \alpha_2 - \sin \alpha_2).$$

Поэтому условие афокальности для монохроматического пучка (8) остается справедливым и в данном случае. Положение фокуса по энергии относительно выходной грани магнита M2 определяется выражением

$$\frac{1}{F_E} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 (d/\rho_2 - C)}{\rho_2 (d/\rho_2 - C + C \sec \alpha_2)}, \quad (13)$$

где  $C = (\sin \alpha_1 - \sin \alpha_2) / \sin \alpha_2$ , а  $d$  находим из (8). Условие афокальности по энергии ( $d = C\rho_2$ ) требует, чтобы расстояние между магнитами было равно

$$L = \rho_1 \operatorname{ctg} \alpha_1 + \rho_2 \operatorname{ctg} \alpha_2 - \frac{\rho_1 + \rho_2}{\sin \alpha_1}. \quad (14)$$

Очевидно, что (14) и (8) не совместимы ни при каких значениях  $\rho$  и  $\alpha$ . Поэтому рассматриваемая магнитная система не может обеспечить ахроматический перенос параллельного пучка и пригодна лишь для ахроматической фокусировки.

Как видно из (13), при равенстве углов поворота пучка в магнитах M1 и M2 фокусное расстояние

$$F_E = \rho_2 / \operatorname{tg} \alpha_2$$

не зависит от расстояния  $L$  между магнитами. Однако на практике трудно воспользоваться этой особенностью системы, чтобы сделать последнюю более компактной.

Анализирующая щель должна находиться в фокусе магнита M1, поэтому  $L \geq \rho_1 \operatorname{ctg} \alpha_1$ . Кроме того, при  $L < (\rho_1 \operatorname{ctg} \alpha_1 + \rho_2 \operatorname{ctg} \alpha_2)$  частицы с одинаковым импульсом выходят из M2 расходящимся пучком.

Секторный магнит с однородным полем фокусирует пучок в вертикальной плоскости, если его грань наклонена к оси пучка под углом  $\epsilon > 0$ . Вертикальная фокусировка пучка краевым полем сопровождается дефокусировкой частиц в медианной плоскости, которую в приближении тонкой линзы можно описать матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\operatorname{tg} \epsilon}{\rho} & 1 \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Допустим, что пучок входит в M1 и выходит из M2 под углами  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$  к соответствующим граням этих магнитов. Грани магнитов, обращенные внутрь системы, пучок пересекает ортогонально. Матрицу переноса системы в медианной плоскости получим, умножая (1) справа и слева на (16). Подставляя в (5) выражения для  $m_{13}$  и  $m_{23}$  из полученной матрицы, находим, что

$$\frac{1}{F_E} = \frac{\operatorname{tg} \alpha_2 [(1 - R_2)(d/\rho_2 - C) - R_2 C \sec \alpha_2]}{\rho_2 (d/\rho_2 - C + C \sec \alpha_2)}, \quad (17)$$

где

$$R_2 = \operatorname{tg} \epsilon_2 / \operatorname{tg} \alpha_2, \quad C = (\sin \alpha_1 \pm \sin \alpha_2) / \sin \alpha_2.$$

В последнем выражении надо брать знак плюс, если оба магнита поворачивают пучок в одну сторону, и минус - при повороте в противоположные стороны.

### 4. Афокальная отклоняющая система из трех секторных магнитов

На рис. 3 представлена отклоняющая система из 3-х секторных магнитов с однородным полем, в каждом из которых пучок поворачивается на угол  $\alpha$  в одном направлении. Радиус кривизны центральной траектории в магнитном поле равен  $\rho$ . Крайние магниты расположены на расстоянии  $L$  от среднего; грани магнитов ортогональны к оси пучка.

Элементы матрицы переноса для медианной плоскости:

$$\begin{aligned} m_{11} &= \frac{L^2}{\rho^2} \sin^2 \alpha \cos \alpha - \frac{L}{\rho} \sin 3\alpha + \cos 3\alpha, \\ m_{12} &= -\frac{L^2}{\rho} \sin \alpha \cos^2 \alpha + L(\cos \alpha + \cos 3\alpha) + \rho \sin 3\alpha, \\ m_{13} &= -\frac{L^2}{\rho} \sin^2 \alpha \cos \alpha + L \sin 3\alpha + \rho(1 - \cos 3\alpha), \\ m_{21} &= -\frac{L^2}{\rho^3} \sin^3 \alpha + \frac{4L}{\rho^2} \sin^2 \alpha \cos \alpha - \frac{\sin 3\alpha}{\rho}, \\ m_{23} &= \frac{L^2}{\rho^3} \sin^3 \alpha - \frac{4L}{\rho} \sin^2 \alpha \cos \alpha + \sin 3\alpha, \\ m_{22} &= m_{11}; \quad m_{31} = m_{32} = 0; \quad m_{33} = 1. \end{aligned} \quad (18)$$

Величина переноса пучка определяется длиной перпендикуляра

$$d = (1 + 2\cos\alpha)[L \sin\alpha + 2\rho(1 - \cos\alpha)], \quad (19)$$

опущенного из точки C на рис. 3 на ось падающего пучка. Подставляя  $m_{12}$  и  $m_{22}$  из (18) в (5), находим расстояние от выходной грани магнита M3 до фокуса по энергии из

$$\frac{1}{F_E} = \frac{\operatorname{tg}\alpha(d/C - 3\rho)(d/C - \rho)}{\rho[(d/C - 3\rho)(d/C - \rho) + (d/C - 3\rho)\rho \operatorname{seca}]}, \quad (20)$$

где  $C = 1 + 2\cos\alpha$ . Выполнение условия афокальности по энергии

$$d = 3C\rho, \quad (21)$$

полученного непосредственно из (20), приводит к тому, что матричные элементы  $m_{12}$ ,  $m_{21}$  и  $m_{22}$  одновременно обращаются в нуль, а  $m_{11} = -1$ . Следовательно, при отклонении параллельного пучка частиц такой системой сохраняются не только параллельность траекторий, но и начальная ширина пучка.

Приравняв правые части выражений (21) и (19), определяем расстояние между магнитами, образующими ахроматическую систему,

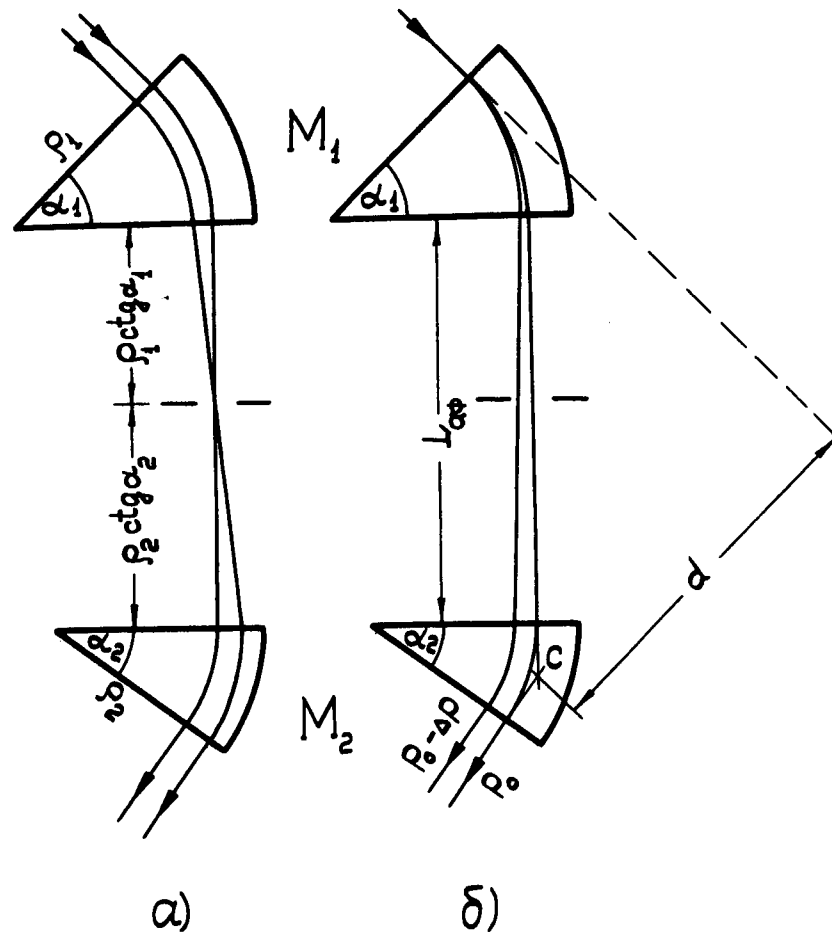
$$L_{\text{ахр}} = 2\rho \operatorname{ctg}\alpha + \rho / \sin\alpha. \quad (22)$$

Здесь  $\rho / \sin\alpha$  — фокусное расстояние секторного магнита, отклоняющего частицы на угол  $\alpha$ , а  $\rho \operatorname{ctg}\alpha$  — расстояние от выходной грани магнита до фокуса, поэтому условию (22) можно дать следующую оптическую интерпретацию. Величина  $L_{\text{ахр}}$  такова, что точка, в которой первый магнит собирает падающий параллельный пучок, оказывается на двойном фокусном расстоянии от второго магнита. Этот магнит отображает промежуточный источник частиц в фокус третьего магнита, который снова дает параллельный пучок.

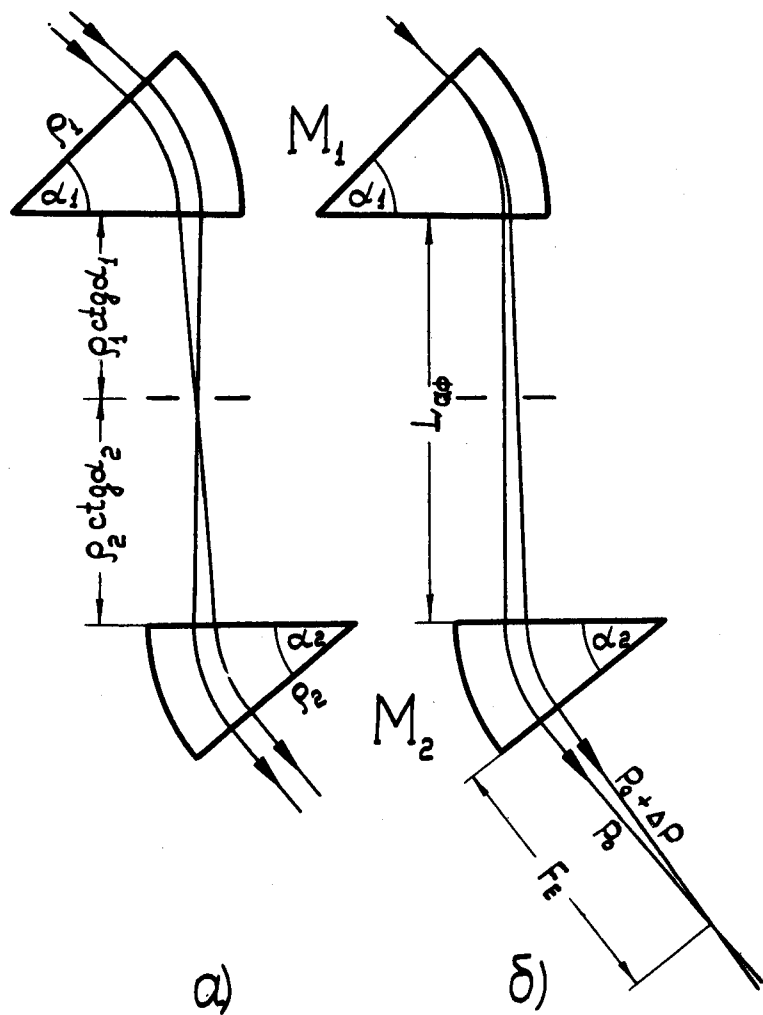
#### Л и т е р а т у р а

1. W.K.H.Panofsky, J.A.McIntyre. Rev.Sci.Instr., 25, 287 (1954).
2. K.L.Brown. Rev.Sci.Instr., 27, 959 (1956).
3. S.Penner. Rev. Sci. Instr., 32, 150 (1961).

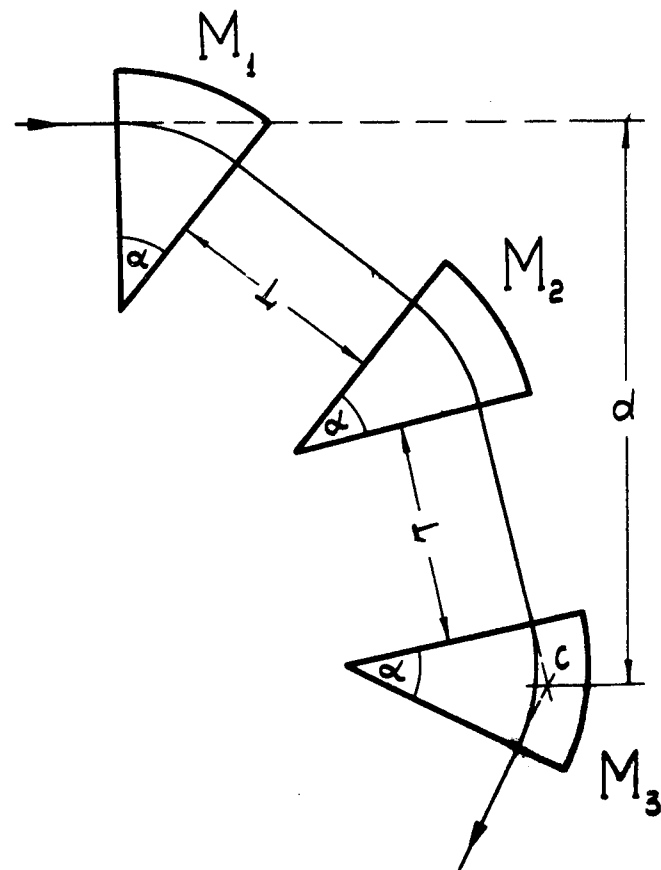
Рукопись поступила в издательский отдел  
25 октября 1965 г.



Р и с. 1. Афокальная система из двух секторных магнитов.  
а) Траектории двух частиц с одинаковыми импульсами, параллельные оси пучка на входе в M1;  
б) Траектории двух частиц с разными импульсами, совпадающие с осью пучка на входе в M1.



Р и с. 2. Система ахроматической фокусировки пучка.  
 а) Траектории двух частиц с одинаковыми импульсами, параллельные оси пучка на входе в  $M_1$ ;  
 б) Траектории двух частиц с разными импульсами, совпадающие с осью пучка на входе в  $M_1$ .



Р и с. 3. Система ахроматического переноса параллельного пучка.