22/XI-65

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р - 2396

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Д.И. Блохинцев

О РАСПРОСТРАНЕНИИ СИГНАЛОВ ВЫСОКОЙ ЧАСТОТЫ В СРЕДЕ СО СЛУЧАЙНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

ДАН СССР 1966, т 166, № 3, с 574-576.

1965

P - 2396

Д.И. Блохинцев

О РАСПРОСТРАНЕНИИ СИГНАЛОВ ВЫСОКОЙ ЧАСТОТЫ В СРЕДЕ СО СЛУЧАЙНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Направлено в ДАН

Мы рассматриваем уравнение для распространения сигнала Ψ вида

$$A_{jk} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x_j \partial x_k} + B_k \frac{\partial \Psi}{\partial x_k} + C\Psi = 0 , \tag{1}$$

где коэффициенты A_{jk}, B_k, C суть случайные функции переменных x_j ($j = 1,2,3,4$). Предполагается, что в области возможных значений A_{jk} уравнение (1) остается гиперболическим ($\mathrm{Det}\, A_{jk} > 0$). Положим далее:

$$A_{jk} = \bar{A}_{jk} + d_{jk} , \quad B_k = \bar{B}_k + b_k , \quad C = \bar{C} + c , \tag{2}$$

где черта означает усреднение по возможным значениям случайных величин A_{jk}, B_k, C. Это усреднение имеет смысл функционального интегрирования по возможным значениям случайной величины $a(x)$:

$$\bar{\Phi} = \int \Phi\{ a(x) \} dw \{ a(x) \} , \tag{3}$$

где Φ –функционал от $a(x)$, $dw\{a(x)\}$ – вероятность того, что $a = a(x)$. Мы будем допускать, что случайную величину $a(x)$ можно представить в виде ряда

$$a(x) = \sum_n a_n \phi_n (x, \alpha_n) , \tag{4}$$

где $\phi_n (x, \alpha_n)$ – некоторая система ортонормированных функций, α_n –случайные фазы, a_n – случайные амплитуды. В силу (4) $dw\{a(x)\}$ можно рассматривать как вероятность той или иной совокупности значений величин a_n, α_n, в частности, если a_n, α_n независимы, то

$$dw\{ a(x)\} = \prod_n dw(a_n) d\Omega(\alpha_n) . \tag{5}$$

Решение Ψ мы будем искать в виде:

$$\Psi = Ae^{iS} , \tag{6}$$

где частота ω значительно превосходит частоты, характерные для спектра случайных величин A_{jk}, B_k, C. В этом случае амплитуду A и фазовую функцию S можно считать медленно меняющимися функциями переменных x_j (приближение геометрической оптики). Полагая $S = \bar{S} + \sigma$ и подставляя (6) в (1), при $\omega \to \infty$ получим:

$$\bar{A}_{jk} \frac{\partial \bar{S}}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{S}}{\partial x_k} = 0 , \qquad (7)$$

$$\bar{A}_{jk} \frac{\partial \bar{S}}{\partial x_j} \frac{d\sigma}{\partial x_k} + A_{jk} \frac{\partial \sigma}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{S}}{\partial x_k} + a_{jk} \frac{\partial \bar{S}}{\partial x_j} \frac{\partial \bar{S}}{\partial x_k} = 0 . \qquad (8)$$

Из последнего уравнения находится случайная фаза σ, которая будет линейным функционалом от случайных величин $a_{jk}(x)$. Поэтому $\sigma(x)$ имеет вид

$$\sigma(x) = \sum_n a_n \sigma_n(x, \alpha_n), \qquad (9)$$

где $\sigma_n(x, \alpha_n)$ соответствует решению системы (7), (8), если в (4) положить все $a_m = 0$, кроме a_n.

Среднее значение сигнала $\bar{\Psi}$ будет равно:

$$\bar{\Psi} = A e^{i\omega \bar{S}} \cdot \overline{e^{i\omega\sigma}} . \qquad (10)$$

Если распределение $dw(a_n)$ является нормальным:

$$dw(a_n) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(a_n - \bar{a}_n)^2}{b_n^2}} \frac{da_n}{b_n} , \qquad (11)$$

то на основании (9) получим:

$$\bar{\Psi} = A e^{i\omega \bar{S}} \prod_n \int_0^{2\pi} d\Omega(\alpha_n) e^{i\omega \bar{a}_n \sigma_n(x, \alpha_n) - \frac{b_n^2 \omega^2}{4} \sigma_n^2(x, \alpha_n)} . \qquad (12)$$

Окончательный результат зависит от вида $\sigma(x, \alpha_n)$.

Рассмотрим некоторые применения:

A. Рассеяние звука в турбулентном потоке

В простейшем случае стационарного, безвихревого потока при пренебрежении величинами порядка $\frac{u^2}{c^2}$ (u –скорость потока, c –скорость звука) уравнение для потенциала скоростей звуковой волны ϕ гласит /1/:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + 2u \frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial t} - c^2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0 , \qquad (13)$$

так что $x_1 = x$, $x_4 = t$ и $A_{44} = 1$, $A_{41} = a_{41} = 2u$, $A_{11} = -c^2$. Уравнения (7) и (8) имеют теперь вид

$$\left(\frac{\partial \bar{S}}{\partial t}\right)^2 - c^2 \left(\frac{\partial \bar{S}}{\partial x}\right)^2 = 0 , \qquad (7)$$

$$\frac{\partial \bar{S}}{\partial t} \frac{\partial \sigma}{\partial t} - 2c^2 \frac{\partial \bar{S}}{\partial x} \frac{\partial \sigma}{\partial x} + 2u \frac{\partial \bar{S}}{\partial x} \frac{\partial \bar{S}}{\partial t} = 0. \qquad (8)$$

Из (7) для плоской волны имеем $\bar{S} = t \pm \frac{x}{c}$, так что

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} \mp 2c \frac{\partial \sigma}{\partial x} + 2\frac{u}{c} = 0 . \qquad (14)$$

Для стационарного потока $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$ и можно положить $\frac{\partial \sigma}{\partial t} = 0$. Тогда получаем:

$$\sigma(x) = \pm \int_0^x \frac{u(x') dx'}{c^2} . \qquad (15)$$

Полагая теперь

$$u(x) = \sum_n u_n \cos(q_n x + \alpha_n), \qquad (16)$$

для нормального закона распределения u_n при $\bar{u}_n = 0$ получим:

$$\overline{e^{i\omega\sigma}} = \prod_n \int e^{-\frac{\omega^2 b_n^2}{4 q_n^2 c^4} F_4^2(x, \alpha_n)} \frac{d\alpha_n}{2\pi} , \qquad (17)$$

где

$$F_n(x, \alpha_n) = \sin(q_n x + \alpha_n) - \sin \alpha_n . \qquad (18)$$

Так как $F^2(x, \alpha_n) > 0$ и ограничено, то эту величину в показателе (17) можно заменить эффективным средним $F_n^2(x, \theta_n \alpha_n)$, $0 < \theta_n < 1$. Тогда вместо (17) получим:

$$e^{i\omega\sigma} = e^{-\frac{\omega^2}{2}\Phi(x)}\ , \qquad (19)$$

где

$$\Phi(x) = \sum_n \frac{b_n^2}{2q_n^2c^4} F_n^2(x, \theta_n\ a_n). \qquad (20)$$

Таким образом, средняя сила звукового сигнала (10) резко падает с ростом частоты ω (по кривой Гаусса).

В. Распространение света в среде с турбулентной метрикой

Волновое уравнение в этом случае гласит /2/:

$$g^{\mu\nu}\frac{\partial^2\phi}{\partial x_\mu\, \partial x_\nu} - \Gamma^\mu \frac{\partial\phi}{\partial x_\mu} = 0\ , \qquad (21)$$

$$\Gamma^\mu = -\frac{1}{\sqrt{-g}}\frac{\partial}{\partial x_\nu}(\sqrt{-g}\ g^{\mu\nu})\ , \qquad (22)$$

где g, как обычно, есть $\mathrm{Det}(g_{\mu\nu})$.

Мы будем рассматривать $g^{\mu\nu}$ как случайные функции переменных $x_1, x_2, x_3, x_4 = t$

Физические причины для такой возможности рассмотрены в /3/.

Обратимся к случаю, когда

$$g^{\mu\nu} = g_0^{\mu\nu} + \epsilon^{\mu\nu}. \qquad (23)$$

Из (21) (22) (7) и (8) получаем уравнение для σ:

$$\epsilon^{\mu\nu}\frac{\partial\bar S}{\partial x_\mu}\frac{\partial\bar S}{\partial x_\nu} + g_0^{\mu\nu}\left(\frac{\partial\bar S}{\partial x_\mu}\frac{\partial\sigma}{\partial x_\nu} + \frac{\partial\bar S}{\partial x_\nu}\frac{\partial\sigma}{\partial x_\mu}\right) = 0. \qquad (24)$$

В частности, для плоской волны $S = t - x$ (скорость света c полагаем $= 1$) уравнение (24) принимает вид:

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t} + \frac{\partial\sigma}{\partial x} = \frac12\epsilon(x,t),\ \epsilon = \epsilon^{44} + \epsilon^{11} - 2\epsilon^{14}\ . \qquad (25)$$

Оно имеет решение:

$$\sigma(x,t) = \frac14\int_{t_0}^{t}\epsilon(t'-\xi\ , t')\,dt' + \frac14\int_{x_0}^{x}\epsilon(x', \xi + x')\,dx'\ , \qquad (26)$$

где $\xi = t - x$. Аналогичное решение получится для волны $\bar S = t + x$. Если $\epsilon(x,t)$ можно представить в виде

$$\epsilon(x,t) = \sum_{n,m}\epsilon_{nm}\,\mathrm{Sin}(q_n x + a_n)\,\mathrm{Sin}(\omega_m t + \beta_m)\ , \qquad (27)$$

где ϵ_{nm}, a_n, β_n — случайные величины, то при нормальном законе распределения ϵ_{nm}, $\bar\epsilon_{nm} = 0$, $\bar\epsilon^2_{nm} = \frac12 b^2_{nm}$ и равномерном распределении a_n, β_m мы получим:

$$\sigma(x,t) = \sum_{n,m}\epsilon_{n,m}F_{nm}(x,t)\ , \qquad (28)$$

где явный вид $F_{nm}(x,t)$ нетрудно получить из (26) и (27). Применяя те же рассуждения, что в пункте А, получим, что световой сигнал имеет вид (19), причем $\Phi(x) > 0$ и теперь равно:

$$\Phi(x) = \frac12\sum_{n,m} b^2_{nm} F^2_{nm}(x, t\ \theta_n\, a_n\, \theta_m, \beta_m). \qquad (24)$$

Л и т е р а т у р а

1. Д.И. Блохинцев. Акустика неоднородной и движущейся среды. ОГИЗ, 1946.
2. В.А. Фок. Теория пространства, времени и тяготения. ГИТТЛ, 1955.
3. D.I. Blokhintsev. Nuovo Cim., 18, 193 (1960).

Рукопись поступила в издательский отдел
15 октября 1965 г.