ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р-2391

ЛАБОРАТОРИЯ НЕЙТРОННОЙ ФИЗИКИ

Б. Козик

КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ТЕОРИЯ НЕЙТРОНОВ В ЯДЕРНЫХ РЕАКТОРАХ И КОНЦЕПЦИЯ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ

1965

P-2391

3720/3 up

Б. Козик[x)]

КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ТЕОРИЯ НЕЙТРОНОВ В ЯДЕРНЫХ РЕАКТОРАХ И КОНЦЕПЦИЯ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ

x) Центральный институт ядерных исследований, Дрезден - Россендорф, ГДР.

Введение

В данной работе на основе теории точечных случайных процессов строится корреляционная теория нейтронов в ядерных реакторах. При этом основными уравнениями будут сопряженные уравнения Больцмана для функции Грина и система уравнений для бинарных плотностей центральных моментов второго порядка. Бинарная плотность корреляции же (плотность корреляционной функции) определяется решениями этих уравнений. Такая формулировка корреляционной теории нейтронов допускает простую интерпретацию стационарного реактора как динамической системы (концепция передаточной функции), откуда сразу следует точное выражение и физическое содержание спектральной плотности мощности шумов фиктивного источника на входе, вызывающего собственные шумы реактора. Частотная зависимость входного шума оказывается очень слабой, и с точностью до слагаемого порядка β (β –доля запаздывающих нейтронов) его можно считать белым. Тогда легко получить пространственно–энергетическую зависимость бинарной спектральной плотности мощности, которая выражается только через функцию Грина уравнения Больцмана. Поскольку относительные флуктуации нейтронной плотности даже в критическом реакторе будут зависеть от пространственных координат, то, возможно, на этом основании можно будет прямо измерять некоторые пространственные параметры (длина диффузии, возраст ферми) реактора.

Функция Грина уравнения Больцмана

Рассмотрим сначала размножение мгновенных нейтронов в реакторе без отражателя, в котором материальные свойства не зависят от времени. Если до некоторого момента времени t_0 в системе не было ни одного нейтрона, а в момент t_0 в точку r_0 реактора инжектировался один нейтрон с энергией E_0 и направлением скорости $n_0 = \frac{\vec{v}_0}{v_0}$, то пусть $n(u, t_1 | u_0, t_0)\,du$ будет средним числом нейтронов в момент $t_1 > t_0$ в элементе "объема" $du = dV\,dE\,d\Omega$ около "точки" $u = (r, E, n)$, возникших вследствие процесса размножения, родоначальником которого был инжектируемый нейтрон. Функция плотности $n(u,t_1|u_0,t_0)$ будет зависеть только от разности $t=t_1-t_0$. В дальнейшем обозначим ее через

$$n(u,t_1|u_0,t_0)=G(u,u_0;t). \tag{1}$$

Функцию $G(u,u_0;t)$ мы будем называть функцией Грина уравнения Больцмана. Она удовлетворяет относительно u однородному нестационарному уравнению Больцмана, а относительно u_0 – соответствующему сопряженному уравнению:

$$\begin{gathered}\frac{\partial G}{\partial t}(u,u_0;t)=\hat{T}(u)\,G(u,u_0;t);\\ \frac{\partial G}{\partial t}(u,u_0;t)=\hat{T}^{+}(u)\,G(u,u_0;t).\end{gathered} \tag{2}$$

Кроме того, она удовлетворяет следующим начальным и краевым условиям:

$$\begin{gathered}\lim_{t\to+0} G(u,u_0;t)=\delta(u-u_0);\\ \lim_{r_0\to r_s} G(u,u_0;t)=0 \quad \text{при} \quad (n_s n_0)>0;\\ \lim_{r\to r_s} G(u,u_0;t)=0 \quad \text{при} \quad (n_s\cdot n)<0,\end{gathered} \tag{3}$$

где r_s – радиус-вектор точки на выпуклой поверхности, охватывающей весь объем реактора, а n_s – единичный вектор внешней нормали в этой точке. $\hat{T}^{+}(u)$ – оператор, сопряженный к оператору $\hat{T}(u)$, который в рассматриваемой задаче имеет вид:

$$\begin{aligned}\hat{T}(u)\,f(u) \equiv{}& \{-n\,v(E)\,\nabla_r - v(E)\,\Sigma(r,E)\}\,f(u)+\\ &+\int dE'\int d\Omega'\,v(E')\,\Sigma_s(r,E')\,f(r,E',n')\,p^{(s)}(r,E',n'|E,n)+\\ &+\int dE'\int d\Omega'\,v(E')\,\Sigma_f(r,E')\,f(r,E',n')\sum_{\nu}\nu P_{\nu}(r,E',n'|E,n),\end{aligned} \tag{4}$$

где

$$P_{\nu}(r,E',n'|E,n)\equiv\frac{1}{\nu!}\int ds'\ldots\int ds^{(\nu)}\,p_{\nu}^{(f)}(r,s'|s,s'',\ldots,s^{(\nu)});\quad s\equiv(E,n). \tag{5}$$

Здесь Σ_s и Σ_f – макроскопические сечения рассеяния и деления, Σ – полное сечение: $\Sigma=\Sigma_s+\Sigma_f+\Sigma_0$, а $p^{(s)}(r,E,n|E',n')$ плотность условной вероятности того, что нейтрон в результате рассеяния в точке r изменяет свою энергию E и направление скорости n на E' и n':

$$\int dE'\int d\Omega'\,p^{(s)}(r,E,n|E',n')=1. \tag{6}$$

Функции $p_{\nu}^{(f)}(r,E,n|E',n';E'',n'';\ldots E^{(\nu)},n^{(\nu)})$ представляют собой плотности условных вероятностей того, что в результате деления ядра, произведенного в точке r нейтроном с энергией E и направлением скорости n, образуется ν нейтронов с энергиями $E',E'',\ldots E^{(\nu)}$ и направлениями скоростей $n',n'',\ldots n^{(\nu)}$:

$$\sum_{\nu}\frac{1}{\nu!}\int ds'\ldots\int ds^{(\nu)}\,p_{\nu}^{(f)}(r,s|s',s'',\ldots s^{(\nu)})=1. \tag{7}$$

Сопряженное уравнение в (2) для условной средней плотности нейтронов $G(u,u_0;t)$ следует из обратного обобщенного уравнения Колмогорова-Феллера для процесса размножения нейтронов[1], в то время как первое уравнение в (2) может быть выведено непосредственно, в смысле прямого уравнения Колмогорова-Феллера, если размножение нейтронов рассмотреть как стохастический точечный процесс[2] и вывести уравнения для плотностей произведений[3]. Тогда $G(u,u_0;t)$ будет условной плотностью произведения первого порядка, и выражение

$$G(u,u_0;t)\,du$$

будет вероятностью того, что в момент t в интервале du находится один нейтрон, при условии, что в момент $t=0$ в "пустую" систему инжектировался один нейтрон с параметром $u_0=(r_0,E_0,n_0)$. Из уравнений (2) сразу следует:

$$G^{+}(u,u_0;t)=G(u_0,u;-t), \tag{8}$$

где сопряженная функция $G^{+}(u,u_0;t)$ удовлетворяет уравнениям

$$\begin{gathered}\frac{\partial G^{+}}{\partial t}(u,u_0;t)=-\hat{T}(u_0)\,G^{+}(u,u_0;t);\\ \frac{\partial G^{+}}{\partial t}(u,u_0;t)=-\hat{T}^{+}(u)\,G^{+}(u,u_0;t)\end{gathered} \tag{9}$$

и сопряженным условиям

$$\lim_{t\to-0} G^{+}(u,u_0;t)=\delta(u-u_0); \tag{10}$$

$$\lim_{r \to r_s} G^{+}(u, u_0; t) = 0 \qquad \text{при} \qquad (n_s \cdot n) > 0$$

$$\lim_{r_0 \to r_s} G^{+}(u, u_0; t) = 0 \qquad \text{при} \qquad (n_s \cdot n_0) < 0 .$$

Физический смысл сопряженной функции $G^{+}(u, u_0; t)$ следует из (8) и (10).

При помощи функции Грина $G(u, u_0; t)$ можно построить решения неоднородного уравнения Больцмана при любом начальном распределении нейтронов. Если, например, $R(u_0)\,du_0$ – вероятность того, что в момент $t = 0$ в интервале du_0 находится нейтрон ($R(u_0)$ – плотность начального распределения), то плотность нейтронов в момент t будет иметь вид

$$n_1(u, t) = \int du_0 \, R(u_0) \, G(u, u_0; t). \tag{11}$$

Как было отмечено в /4/, выражение

$$J(u_0, t) = \int du \, G(u, u_0; t) \tag{12}$$

представляет собой введенную Усачевым /5/ ценность инжектируемого нейтрона.
Из (11) и (12) прямо следует, что средняя плотность нейтронов (11) удовлетворяет обычному уравнению Больцмана (относительно u), а ценность (12) – сопряженному уравнению Больцмана (относительно u_0).

Как будет видно в дальнейшем, корреляционную теорию нейтронов в стационарном реакторе можно свести к задаче определения функции Грина $G(u, u_0; t)$. Ниже мы будем использовать преобразованную функцию

$$G(u, u_0; \omega) = \int_0^{\infty} dt \, e^{-j\omega t} \, G(u, u_0; t), \tag{13}$$

прямые уравнения для которой имеют вид

$$[j\omega - \hat{T}(u)] \, G(u, u_0; \omega) = \delta(u - u_0); \tag{14}$$

$$[-j\omega - \hat{T}(u)] \, G^{*}(u, u_0; \omega) = \delta(u - u_0), \tag{15}$$

а также функцию

$$F(u_1, u_2; u', u''; t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \, G(u_2, u''; \omega) \, G^{*}(u_1, u'; \omega). \tag{16}$$

При $t > 0$ интеграл (16) определяется полюсами одной функции $G(u_2, u''; \omega)$ и будет обозначен через F_{+}. Тогда F_{-} будет обозначать интеграл (16) при $t < 0$, когда вклад дают только полюса функции $G^{*}(u_1, u', \omega)$.

Наконец, рассмотрим разложение функции Грина $G(u, u_0; t)$ по собственным функциям оператора $\hat{T}(u)$:

$$\hat{T}(u) \, \phi_k(u) = -\lambda_k \phi_k(u). \tag{17}$$

Из уравнений (2) сразу следует, что такое разложение должно иметь вид

$$G(u, u_0; t) = \sum_k A_k \, \phi_k^{+}(u_0) \, \phi_k(u) \, e^{-\lambda_k t}, \tag{18}$$

где $\phi_k^{+}(u)$ – собственные функции сопряженного оператора $\hat{T}^{+}(u)$:

$$\hat{T}^{+}(u) \, \phi_k^{+}(u) = -\lambda_k \phi_k^{+}(u), \tag{19}$$

а A_k – нормировочный коэффициент:

$$A_k^{-1} = \int du \, \phi_k^{+}(u) \, \phi_k(u). \tag{20}$$

Для функции $G(u, u_0; \omega)$ (13) имеем:

$$G(u, u_0; \omega) = \sum_k \frac{A_k \, \phi_k^{+}(u_0) \, \phi_k(u)}{\lambda_k + j\omega}. \tag{21}$$

Отсюда следует разложение функции $F(u_1, u_2; u', u''; t)$:

$$F_{\pm}(u_1, u_2; u', u''; t) = \sum_i \sum_k \frac{A_i A_k \, \phi_k^{+}(u') \, \phi_k(u_1) \, \phi_i^{+}(u'') \, \phi_i(u_2)}{\lambda_i + \lambda_k} \times \begin{cases} e^{-\lambda_i t} ; & t \geq 0 \\ e^{\lambda_k t} & t \leq 0 . \end{cases} \tag{22}$$

Предполагается, что собственные функции (17) и (19) удовлетворяют правильным условиям на поверхности реактора.

2. Бинарная плотность центральных моментов второго порядка

При рассмотрении точечных случайных процессов, когда число нейтронов распределено на непрерывном множестве состояний, удобно ввести так называемые плотности произведений /2/. Пусть $N(r, E, n, t)$ – число нейтронов в момент t в некоторой объемной части $r \in V_r$ реактора, энергии которых меньше энергии E и вектора направления скоростей которых лежат внутри конуса C_n около единичного вектора n. Плотность произведения первого порядка определена следующим образом:

$$n_1(u,t)\,du = M\{dN(u,t)\}, \tag{23}$$

где $M\{\ \}$ – операция математического ожидания, а усреднение производится по вероятностям того, что в реакторе в момент t находится данное количество нейтронов, распределенное к тому же определенным образом по точкам $u=(r,E,n)$. Выражение (23) имеет смысл вероятности того, что в интервале du в момент t находится один нейтрон. Интеграл выражения (23) по некоторому конечному "объему" Δu:

$$M\{\Delta N(u,t)\} = \int_{\Delta u} du\; n_1(u,t) \tag{24}$$

дает среднее число нейтронов в объеме Δu в момент t. Плотность $n_1(u,t)$ удовлетворяет обычному уравнению Больцмана. Чтобы получить дисперсию числа нейтронов в объеме Δu в момент t, необходимо ввести плотность произведения второго порядка:

$$n_2(u_1 u_2 t)\,du_1 du_2 = M\{dN(u_1,t)\,dN(u_2,t)\}. \tag{25}$$

Если интервалы du_1 и du_2 не перекрываются, то (25) имеет смысл вероятности того, что в момент t один нейтрон находится в интервале du_1, а другой – в интервале du_2. При $u_1 = u_2$ выражение (25) принимает вид:

$$M\{[dN(u_1,t)]^2\} = M\{dN(u_1,t)\} = n_1(u,t)\,du_1.$$

Поэтому второй момент распределения числа нейтронов в объеме Δu будет

$$M\{[\Delta N(u,t)]^2\} = \int_{\Delta u} du_1 n_1(u_1,t) + \int_{\Delta u} du_1 \int_{\Delta u} du_2 n_2(u_1,u_2,t),$$

а дисперсия числа нейтронов в этом объеме запишется в виде

$$\sigma^2(\Delta u) = M\{[\Delta N(u,t)]^2\} - [M\{\Delta N(u,t)\}]^2 =$$

$$= \int_{\Delta u} du_1 \int_{\Delta u} du_2\; \sigma^2(u_1,u_2,t), \tag{26}$$

где

$$\sigma^2(u_1,u_2,t) = n_1(u_1,t)\,\delta(u_1-u_2) + \Phi(u_1 u_2 t),$$

$$\Phi(u_1,u_2,t) = n_2(u_1,u_2;t) - n_1(u_1,t)\,n_1(u_2,t). \tag{27}$$

Выражение $\sigma^2(u_1,u_2,t)$ мы будем называть бинарной плотностью центральных моментов второго порядка или просто плотностью дисперсии. Очевидно, выражение

$$\Phi(u_1,u_2,t)\,du_1\,du_2$$

имеет смысл вероятности того, что в интервалах du_1 и du_2 находится по одному нейтрону, причем оба нейтрона друг с другом коррелированы. Таким же образом можно ввести плотности произведений более высоких порядков, уравнения для которых выводятся прямо в смысле прямого обобщенного уравнения Колмогорова-Феллера. Для размножения мгновенных нейтронов они приведены в работе [3]. В рамках корреляционной теории достаточно определить плотности произведений первых двух порядков. При этом плотность первого порядка $n_1(u,t)$ удовлетворяет обычному уравнению Больцмана:

$$\frac{\partial n_1}{\partial t}(u,t) = \hat{T}(u)\,n_1(u,t) + S(u,t), \tag{28}$$

где $S(u,t)$ – плотность источника нейтронов, а для бинарной плотности $\Phi(u_1,u_2,t)$ получается уравнение

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(u_1,u_2,t) - [\hat{T}(u_1) + \hat{T}(u_2)]\,\Phi(u_1,u_2,t) =$$

$$= \hat{N}(u;u_1,u_2)\,n_1(u,t), \tag{29}$$

где

$$\hat{N}(u;u_1,u_2)\,n_1(u,t) \equiv$$

$$\equiv \int dE \int d\Omega \int dV\; v(E)\,\Sigma_f(r,E)\,n_1(u,t) \sum_\nu \nu(\nu-1)\,\times \tag{30}$$

$$\times\, P_\nu(u|s_1,s_2)\,\delta(r-r_1)\,\delta(r-r_2).$$

Вероятности P_ν в (30) определены следующим образом:

$$P_\nu(u,|s_1,s_2) = \frac{1}{\nu!} \int ds''' \dots \int ds^{(\nu)}\; p_\nu^{(f)}(u|s_1,s_2,s''',\dots,s^{(\nu)}), \tag{31}$$

где $s=(E,n)$; $ds = dE\,d\Omega$, а вероятности $p_\nu^{(f)}$ определены в (7). Краевые условия для функции $\Phi(u_1,u_2,t)$ при $r_1 \to r_s$, $r_2 \to r_s$ аналогичны краевым условиям для $n_1(u,t)$. В дальнейшем нас будет интересовать только стационарное уравнение (29), решение которого можно разложить по собственным функциям операторов $\hat{T}(u_1)$ и $\hat{T}(u_2)$:

$$\Phi(u_1,u_2) = \sum_i \sum_k \frac{b_{ik}}{\lambda_i + \lambda_k}\,\phi_i(u_1)\,\phi_k(u_2), \tag{32}$$

где

$$b_{ik} = \frac{\int du_1 \int du_2 \, \phi_i^+(u_1)\, \phi_k^+(u_2)\, \hat{N}(u; u_1, u_2)\, n_1(u)}{\int du_1 \, \phi_i^+(u)\, \phi_i(u_1) \int du_2 \, \phi_k^+(u_2)\, \phi_k(u_2)} . \tag{33}$$

3. Бинарная плотность корреляции

Таким же образом как была введена плотность произведения второго порядка (25), можно ввести вероятность того, что в момент t_1 в интервале du_1 находится один нейтрон, в то время как в момент $t_2 > t_1$ в интервале du_2 также находится нейтрон: $n_2(u_1, t_1; u_2, t_2)\, du_1\, du_2$. Очевидно, что такую вероятность можно представить в виде:

$$n_2(u_1, t_1; u_2, t_2)\, du_1 du_2 = \tag{34}$$

$$= \int n_2(u_1, u'; t_1)\, du_1 du' \, G(u_2, u'; t_2 - t_1)\, du_2 ,$$

где $n_2(u_1, u'; t_1)$ – плотность произведения второго порядка (25), а функция Грина $G(u_2, u'; t_2 - t_1)$ имеет смысл плотности произведения первого порядка. На основе определения (34) можно ввести бинарную плотность корреляции, определенную следующим образом:

$$k_+(u_1, t_1; u_2, t_2) = \int du' \, \sigma^2(u_1, u'; t_1)\, G(u_2, u'; t_2 - t_1) , \tag{35}$$

где из-за первого свойства (3) функции Грина имеем:

$$k_+(u_1, t_1; u_2, t_1) = \sigma^2(u_1, u_2, t_1) . \tag{36}$$

Выражение

$$k_+(u_1, t_1; u_2, t_2)\, du_2\, du_1$$

имеет смысл вероятности того, что в моменты t_1 и $t_2 > t_1$ в интервалах du_1 и du_2 находится по одному нейтрону, которые между собой коррелированы. Очевидно, если считать $t_2 < t_1$, то бинарную плотность корреляции необходимо записать в виде:

$$k_-(u_1, t_1; u_2, t_2) = \int du' \sigma^2(u_2, u'; t_2)\, G(u_1, u'; t_1 - t_2) ; \tag{37}$$

$$k_-(u_1, t_2, u_2, t_2) = \sigma^2(u_2, u_1, t_2) . \tag{38}$$

Таким образом, бинарная плотность корреляции имеет вид

$$K(u_1, u_2; t_1, t_2) = \begin{cases} k_+(u_1, t_1; u_2, t_2); & t_2 \geq t_1 \\ k_-(u_1, t_1; u_2, t_2); & t_2 \leq t_1 . \end{cases} \tag{39}$$

Из выражений (35) и (37) следует, что в случае стационарных систем, когда плотности произведений всех порядков не зависят от времени[x)], бинарная плотность корреляции зависит только от разности $t = t_2 - t_1$. Из самого определения плотности корреляции следует свойство симметрии:

$$K(u_1, u_2; t_2, t_1) = K(u_2, u_1; t_1, t_2)$$

или, в стационарном случае:

$$K(u_1, u_2, -t) = K(u_2, u_1; t) . \tag{40}$$

Интеграл

$$K_{\Delta u}(t_1, t_2) = \int_{\Delta u} du_1 \int_{\Delta u} du_2 \, K(u_1, u_2; t_1, t_2) \tag{41}$$

представляет собою корреляционную функцию нейтронов в объеме Δu , так что выражение

$$\sigma^2_{\Delta t}(\Delta u) = \int_{t'}^{t''} dt_1 \int_{t'}^{t''} dt_2 \, K_{\Delta u}(t_1, t_2) \tag{42}$$

дает дисперсию числа нейтронов в объеме Δu испускаемых в интервале $\Delta t = t'' - t'$. Так как оператор $\hat{T}(u)$ линейный, то из представления (35) и (37) сразу следует, что бинарная плотность корреляции удовлетворяет таким же уравнениям, как и функция Грина G :

$$\frac{\partial k_+}{\partial t_2}(u_1, t_1; u_2, t_2) = \hat{T}(u_2)\, k_+(u_1, t_1; u_2, t_2) ; \tag{43}$$

$$\frac{\partial k_-}{\partial t_1}(u_1, t_1; u_2, t_2) = \hat{T}(u_1)\, k_-(u_1, t_1; u_2, t_2) .$$

---

x) Это будет определение стационарности в узком смысле. В широком смысле стационарность определяется независимостью от времени плотностей произведений первых двух порядков.

Начальные условия заданы в (36)–(38), а краевые условия совпадают с краевыми условиями для $\sigma^2(u_1, u_2)$. В /6/ было показано, что уравнения (43) следуют из общих свойств производящего функционала для совместного распределения нейтронов в два последовательных момента времени. Таким образом, корреляция нейтронов в реакторе полностью описывается уравнениями (2),(29) и (43).

4. Бинарная спектральная плотность мощности

В стационарных системах важную роль играет спектральная плотность мощности флуктуаций нейтронов в объеме Δu. По теореме Винера–Хинчина она определяется Фурье-преобразованием корреляционной функции (41):

$$< |\Delta N(u,\omega)|^2 > = 2\int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{-j\omega t} \cdot K_{\Delta_u}(t) =$$

$$= \int_{\Delta_u} du_1 \int_{\Delta_u} du_2 < n(u_1,\omega)\, n(u_2,\omega) > . \tag{42'}$$

Величину

$$< n(u_1,\omega)\, n(u_2,\omega) > \equiv < u_1, u_2 > =$$

$$= 2\int_{-\infty}^{\infty} dt\, e^{-j\omega t}\, K(u_1,u_2;t) \tag{43'}$$

мы будем называть бинарной спектральной плотностью мощности. Из свойства (41) бинарной плотности корреляции следует:

$$< u_1, u_2 > = < u_2, u_1 >^* , \tag{44}$$

где звездочка обозначает комплексную сопряженность. В общем случае бинарная спектральная плотность – комплексная величина. Она будет вещественной при $u_1 = u_2$. Из представления (35) и (37) следует:

$$< u_1, u_2 > = 2\int du' \{ \sigma^2(u_1,u')\, G(u_2,u';\omega) + \sigma^2(u_2,u')\, G^*(u_1,u';\omega) \} , \tag{45}$$

где функция $G(u_2, u_1, \omega)$ определена в (13), (14). При помощи (27) и (14) выражение (45) можно записать в форме:

$$< u_1, u_2 > = 2\{ n_1(u_1)\, G(u_2,u_1;\omega) + n_1(u_2)\, G^*(u_1,u_2;\omega) \} + 2\{ \hat{L}_2^{-1} + \hat{L}_1^{*-1} \}\, \Phi(u_2,u_1), \tag{46}$$

где

$$\hat{L}_2 = j\omega - \hat{T}(u_2);$$
$$\hat{L}_1^* = -j\omega - \hat{T}(u_1). \tag{47}$$

Рассмотрим вторую скобку в (46). Ее можно записать в виде:

$$\{ \hat{L}_1^{*-1} \hat{L}_1^* \hat{L}_2^{-1} + \hat{L}_2^{-1} \hat{L}_2 \hat{L}_1^{*-1} \}\, \Phi(u_2,u_1) =$$
$$= \hat{L}_1^{*-1} \hat{L}_2^{-1} \{ -[\hat{T}(u_1) + \hat{T}(u_2)]\, \Phi(u_1,u_2) \} = \tag{48}$$
$$= \int du' \int du''\, G(u_2,u'';\omega)\, G^*(u_1,u',\omega)\, \hat{N}(u;u',u'')\, n_1(u).$$

Таким образом, бинарную спектральную плотность мощности собственных шумов реактора можно выразить через функцию Грина $G(u_1, u_2; t)$

$$< u_1, u_2 > = 2\{ n_1(u_1)\, G(u_2,u_1;\omega) + n_1(u_2)\, G^*(u_1,u_2;\omega) \} + 2\int du' \int du''\, \hat{N}(u;u',u'')\, n_1(u)\, G(u_2,u'';\omega)\, G^*(u_1,u';\omega); \tag{49}$$

$$n_1(u) = \int du' \int_0^{\infty} dt\, G(u,u';t)\, S(u'). \tag{50}$$

При помощи обратного преобразования Фурье (42) выражения (49) можно получить бинарную плотность корреляции

$$k_+(u_1,u_2;t)=n_1(u_1)\,G(u_2,u_1;t)+\int du'\int du''\,\hat{N}(u;u',u'')\,n_1(u)\,F_+(u_1,u_2;u',u'';t)$$

$$k_-(u_1,u_2;t)=n_1(u_2)\,\overset{+}{G}(u_2,u_1;t)+\int du'\int du''\,\hat{N}(u,u',u'')\,n_1(u)\times \tag{51}$$

$$\times F_-(u_1,u_2;u',u'';t),$$

а отсюда бинарную плотность дисперсии:

$$\sigma^2(u_1,u_2)=k_+(u_1,u_2;0)=k_-(u_1,u_2;0), \tag{52}$$

где функция F определена в (15), (22), причем при $t=0$ ее можно представить в виде

$$F(u_1,u_2;u',u'';0)=\int_0^\infty dt'\,G(u_2,u'';t')\,G(u_1,u';t'),$$

а оператор $\hat{N}$ определен в (30).

Следовательно, корреляционная теория нейтронов в стационарном реакторе сводится к теории функции Грина уравнения Больцмана, рассматриваемой в первой части. Как будет показано ниже, учет запаздывающих нейтронов не затрагивает общих выводов, касающихся связи корреляционной теории и теории функции Грина.

5. Связь с концепцией передаточной функции

В реакторной кинетике широко используют концепцию передаточной функции. В этой концепции реактор рассматривается как динамическая система с входом и выходом, заданная кинетическими уравнениями. Спектральная зависимость изменения моментального числа нейтронов (уровня мощности), обусловленная возмущением внешнего источника (или реактивности), описывается при помощи передаточной функции, которая в случае возмущения источника будет преобразованием Лапласа функции Грина уравнения кинетики для одного числа нейтронов. Так, если стационарный процесс задается уравнением

$$\frac{dn}{dt}(t)+\alpha_0 n(t)=S_0(t), \tag{53}$$

где $S_0(t)$ – стационарное возмущение на входе с заданной корреляционной функцией и нулевым математическим ожиданием $\bar{S}_0(t)=0$, то спектральная плотность мощности возмущения на выходе ($\bar{n}(t)=0$) имеет вид

$$\langle|n(\omega)|^2\rangle=|T(j\omega)|^2\langle|S_0(\omega)|^2\rangle, \tag{54}$$

где

$$T(j\omega)=\frac{1}{\alpha_0+j\omega} \tag{55}$$

– передаточная функция системы (53), а $\langle|S_0(\omega)|^2\rangle$ – спектральная плотность мощности возмущения на входе. По теореме Винера-Хинчина спектральные плотности мощности некоторого стационарного процесса связаны с корреляционными функциями процесса простым Фурье-преобразованием:

$$\langle|n(\omega)|^2\rangle=2\int_{-\infty}^{\infty}dt\,e^{-j\omega t}\,K(t), \tag{56}$$

где $K(t)$ – корреляционная функция процесса $n(t)$, а спектральная плотность мощности в виде (56) относится к частотному интервалу шириной в один герц ($\omega=2\pi f$; f – частота в гц). Часто передаточная функция выражается в форме:

$$\frac{\delta n(\omega)}{\delta S_0(\omega)}=T(j\omega), \tag{57}$$

которая указывает на способ ее измерения. В таком виде измеряется абсолютное значение и фазы передаточной функции, в то время как измерением спектральной плотности мощности (54) определяется только абсолютное ее значение. Более подробное рассмотрение этого вопроса можно найти в [7].

Размножение нейтронов в реакторе имеет статистический характер. Поэтому моментальное число нейтронов в стационарном реакторе обладает некоторым собственным "шумом". В концепции передаточной функции это означает, что в невозмущенном стационарном реакторе существует некоторый фиктивный источник (driving force [8]), случайные шумы которого, поступая на вход, и вызывают флуктуации моментального числа нейтронов в реакторе. Эти "помехи на входе" необходимо учитывать в кинетических опытах, так как они определяют минимальную амплитуду возмущения на входе. В [8] приведено приближенное доказательство того, что спектральная плотность мощности собственных шумов моментального числа нейтронов пропорциональна квадрату модуля передаточной функции кинетического уравнения. Это означает, что шум на входе (спектральная плотность мощности фиктивного источника) не зависит от частоты (белый шум). Отсюда следует прямая возможность определить абсолютное значение передаточной функции реактора, не прибегая к внешним возмущениям системы [9].

К сожалению, доказательство, приведенное в [8], нельзя считать достаточно убедительным хотя бы потому, что оно с самого начала базируется на концепции передаточной функции. При этом величина белого шума на входе остается неизвестной. В работе [10] на основе модели дробового эффекта в электронных лампах (формула Шоттки) приближенно определена величина белого шума. Получается разумное выражение

$$\langle |S_o|^2 \rangle = \frac{2\,\bar{n}\,\Gamma_o}{\tau}\ , \tag{58}$$

где $\bar{n}$ – среднее число нейтронов в реакторе в момент t, τ – среднее время жизни мгновенных нейтронов, а величина Γ_o имеет вид:

$$\Gamma_o = \frac{\overline{\nu(\nu-1)}}{\bar{\nu}}, \tag{59}$$

где ν – число нейтронов деления. При этом рассматривался критический реактор. Наконец, в работе [11] на основе статистической теории размножения нейтронов была определена корреляционная функция процесса и тем самым было получено точное в статистическом смысле выражение для спектральной плотности мощности собственных шумов моментального числа нейтронов в реакторе. В этом приближении (одногрупповое и однозонное) спектральная плотность мощности фиктивного источника на входе получилась в виде:

$$\begin{gathered}\langle |S_0(\omega)|^2 \rangle = \frac{2\bar{n}}{\tau}\,(k\,\Gamma_o + 2\,q\,(\omega))\ ; \\ 1 - k\,(1+\beta) \le q(\omega) \le 1 - k\ ,\end{gathered} \tag{60}$$

где k – полный коэффициент размножения, а β – доля запаздывающих нейтронов. При этом необходимо отметить следующее. Точное выражение спектральной плотности мощности, полученное в виде

$$\langle |n(\omega)|^2 \rangle = |T(j\omega)|^2 \langle |S_o(\omega)|^2 \rangle\ , \tag{61}$$

было определено для подкритического на запаздывающих нейтронах стационарного реактора. Точно критический реактор – система нестационарная даже в широком смысле, так как дисперсия моментального числа нейтронов линейно растет со временем, несмотря на то, что среднее моментальное число нейтронов не зависит от времени. Но для таких систем спектральная плотность мощности не определена. Существуют две возможности интерпретации критического реактора как стационарной системы. Поскольку дисперсия числа нейтронов при достаточно высоком начальном уровне мощности растет очень медленно со временем [11], то за не слишком длинные промежутки времени фон запаздывающих нейтронов можно рассматривать как пуассоновский посторонний источник нейтронов в подкритической на мгновенных нейтронах стационарной системе.

Полученное таким образом выражение для спектральной плотности мощности собственных шумов не содержит влияния запаздывающих нейтронов и будет хорошим приближением лишь для достаточно высоких частот $(\omega^2 \gg \lambda_i^2\ ;\ \ \lambda_i$ – постоянные распада предшественников запаздывающих нейтронов). С другой стороны, всегда имеются посторонние источники нейтронов (космические, спонтанные деления и др.) и, хотя их интенсивность мала, они обеспечивают стационарную работу почти критического реактора. В этом случае справедлива теория для подкритических систем и имеет место выражение (61). При этом необходимо иметь в виду, что при высоких частотах в передаточной функции определяется величина

$$a_o = \frac{1-k}{\tau} + \frac{k\,\beta}{\tau}\ , \tag{62}$$

а не, как часто предполагают, величина β / τ.

В [12] рассматривалась одногрупповая и однозонная корреляционная теория реактора с отражателем. Если в этом случае спектральную плотность мощности собственных шумов нейтронов в самом реакторе представить в виде (61), где $T(j\omega)$ будет передаточной функций кинетического уравнения, содержащего только функцию нейтронов в реакторе, а $\langle |S_o(\omega)|^2 \rangle$ – спектральная плотность мощности шумов фиктивного источника в реакторе (в предположении, что в отражателе нет фиктивного источника), то шум на входе не будет белым, даже если пренебречь запаздывающими нейтронами. Правда, и здесь отклонение от белого шума будет малым. Оно порядка $\bar{\beta}$, где $\bar{\beta}$ характеризует эффективность отражателя, так что условие критичности имеет вид $1-k=\bar{\beta}$. Более правильная динамическая модель должна рассматривать фиктивные источники и в реакторе, и в отражателе, так как здесь имеются две связанные системы: реактор и отражатель.

В последнее время все большее внимание обращается на пространственные эффекты в реактивной кинетике. Во многих работах изучается пространственная зависимость передаточной функции [13]. Вводя возмущение источника в некоторую точку реактора, получаем возмущение моментального числа нейтронов, каким-то образом распределенное по реактору. В связи с этим представляет интерес определить пространственное распределение собственных шумов реактора и получить пространственное распределение шумов фиктивного источника на входе.

Рассмотрим стационарную динамическую систему, заданную уравнением (28):

$$\frac{\partial n}{\partial t}\,(u,t) - \hat{T}(u)\,n(u,t) = S_o(u,t), \tag{63}$$

где $\bar{n}(u,t) = 0$; $\bar{S}_o(u,t) = 0$, а функция $n(u,t)$ пусть удовлетворяет таким же краевым условиям, как средняя нейтронная плотность. Тогда можно ввести передаточную функцию источника следующим образом:

$$n(u_2, \omega) = \hat{L}_2^{-1} S_0(u_2, \omega), \tag{64}$$

где

$$S_0(u_2, \omega) = \int_0^\infty dt\, e^{-j\omega t} S_0(u_2, t), \tag{65}$$

а оператор $\hat{L}_2$ определен в (47). Чтобы определить из (64) возмущение на входе, необходимо знать пространственное распределение возмущения источника.

Практически интересным будет случай, когда функция источника будет иметь вид:

$$S_0(u, t) = S_0(t) f(u). \tag{66}$$

В этом случае (64) принимает вид:

$$n(u_2, \omega) = S_0(\omega) \int du'' \, G(u_2, u''; \omega) f(u''), \tag{67}$$

и передаточной функцией можно называть выражение:

$$\frac{\delta n(u, \omega)}{\delta S_0(\omega)} = \int du' \, G(u, u'; \omega) f(u'). \tag{68}$$

Если же ввести "точечное" возмущение:

$$S_0(u, t) = S_0(t) \, \delta_0(u - u_0), \tag{66a}$$

то передаточной функцией будет просто функция Грина:

$$\frac{\delta n(u, \omega)}{\delta S_0(\omega)} = G(u, u_0, \omega), \tag{69}$$

которую таким образом можно определять экспериментально. По аналогии с обычными динамическими системами (69) будет "настоящей" передаточной функцией, полностью определяющей свойства динамической системы (63). Можно и здесь ввести бинарную спектральную плотность мощности:

$$\langle n(u_1, \omega) \, n(u_2, \omega) \rangle = \int du' \int du'' \, G(u_2, u''; \omega) \, G^*(u_1, u'; \omega) \times \\ \times \langle S_0(u', \omega) \, S_0(u''; \omega) \rangle, \tag{70}$$

которая в случае источника (66) имеет вид:

$$\langle u_1, u_2 \rangle = \langle | S_0(\omega) |^2 \rangle \int du' \int du'' \, G(u_2, u'', \omega) \times \\ \times G^*(u_1, u', \omega) f(u') f(u''), \tag{71}$$

а для источника (66а) в точке $u_1 = u_2$ имеем:

$$\langle | n(u_1, \omega) |^2 \rangle = | G(u_1, u_0; \omega) |^2 \langle | S_0(\omega) |^2 \rangle, \tag{72}$$

что по внешнему виду совпадает с уравнением (61).

Теперь можно предположить, что в отсутствие какого-либо внешнего возмущения на входе уравнение (70) остается в силе, где левая сторона будет бинарной спектральной плотностью собственных шумов реактора, а $\langle S_0(u_1, \omega) \, S_0(u_2, \omega) \rangle$ имеет смысл бинарной спектральной плотности шумов фиктивного источника на входе. Сравнивая выражения (50) и (70), сразу получаем:

$$\langle S_0(u_1, \omega) \, S_0(u_2, \omega) \rangle = 2 \hat{N}(u, u_1, u_2) \, n_1(u) - \\ - 2 \{ n_1(u_1) \hat{T}(u_2) + n_1(u_2) \hat{T}(u_1) \} \, \delta(u_2 - u_1). \tag{73}$$

Второй член в (73), содержащий операторы $\hat{T}$, связан с сингулярным членом в (27). При не слишком малой мощности реактора он будет несущественным. Первый же член определен в (30). Таким образом, при пренебрежении запаздывающими нейтронами, в указанном выше смысле, шум фиктивного источника на входе будет белым, а его пространственное распределение имеет вид:

$$\langle S_0(u_1, \omega) \, S_0(u_2, \omega) \rangle = f_0(r_1, E_1, n_1; E_2, n_2) \, \delta(r_1 - r_2), \tag{74}$$

где

$$f_0(r, E_1, n_1; E_2, n_2) = \int dE \int d\Omega \, \nu(E) \Sigma_f(r, E) \, n_1(r, E, n) \times \\ \times \sum_\nu \nu(\nu - 1) P_\nu(r, E, n \mid E_1, n_1; E_2, n_2). \tag{75}$$

Из (74), (75) непосредственно следует физическое содержание термина "фиктивный источник на входе" (driving force) . В заключение отметим, что выражение (74) определяет бинарную спектральную плотность мощности некоторой случайной величины. Сама же функция источника $S_0(u, t)$ не может быть представлена в аналитическом виде, так же как и уравнение (63) имеет смысл лишь для средней плотности нейтронов, в то время как число нейтронов как случайная величина является скачкообразной функцией времени и никакому интегродифференциальному уравнению не удовлетворяет. Динамическая же интерпретация собственных шумов реактора возможна в рамках корреляционной теории потому, что бинарные плотности корреляции процесса размножения нейтронов определяются такими же уравнениями как бинарные плотности корреляции динамической системы (63).

6. Учет запаздывающих нейтронов

В изложенной выше корреляционной теории нейтронов не учитывались флуктуации моментального числа нейтронов в реакторе, обусловленные запаздывающими нейтронами. Обобщение всех рассуждений с учетом запаздывающих нейтронов не представляет труда. Для краткости изложения рассмотрим сразу приближение постоянных сечений, в котором прямое уравнение для функции Грина имеет вид:

$$\frac{\partial G}{\partial t}(r', r; t) - (D\nabla_r + a_0)\, G - \sum_e \lambda_e a_e \int_0^t dt'\, e^{-\lambda_e (t-t')} \cdot G(r', r; t') = 0$$

$$G(r', r; 0) = \delta(r' - r); \tag{76}$$

$$G(\tilde{\tilde{R}}, r; t) = G(r', \tilde{\tilde{R}}; t) = 0,$$

где D – коэффициент диффузии, λ_e – постоянная распада предшественника запаздывающих нейтронов сорта "e", $\tilde{\tilde{R}}$ – радиус-вектор точек на экстраполированной поверхности реактора, а коэффициенты a_0, a_e определены следующим образом:

$$a_0 = v\,\Sigma_a (k(1-\beta) - 1); \quad a_e = v\,\Sigma_a k\,\beta_e; \quad k = \bar{\nu}\,\Sigma_f / \Sigma_a. \tag{77}$$

Кроме бинарной плотности

$$\Phi(r', r) = \sigma^2(r', r) - n_1(r)\,\delta(r - r')$$

необходимо ввести еще бинарные плотности

$$\psi_{ep}(r', r) = c_{2ep}(r', r) - c_{1e}(r')\, c_{1p}(r) - c_e(r)\,\delta(r - r')\,\delta_{ep} \tag{78}$$

$$\mu_e(r', r) = m_{2e}(r', r) - n_1(r')\, c_{1e}(r), \tag{79}$$

где $c_{1e}(r)dV$ – вероятность того, что в момент t в объеме dV находится один предшественник запаздывающих нейтронов сорта "e" ; $c_{2ep}(r', r)\, dV' dV$ – вероятность того, что в объеме dV' находится один предшественник запаздывающих нейтронов сорта "e" , а в объеме dV – один из сорта "p" , $m_{2e}(r', r)\, dV' dV$ – вероятность того, что в объеме dV' имеется один нейтрон, а в объеме dV – один предшественник запаздывающих нейтронов сорта "e".

Плотности произведений $c_{1e}(r)$, $c_{2ep}(r', r)$; $m_{2e}(r', r)$ вводятся способом, указанным в части 2 данной работы. Уравнения для бинарных плотностей (77)–(79)

выводятся таким же образом, как уравнение (29). В стационарном случае они имеют вид:

$$(\hat{L}_r + \hat{L}_{r'})\,\Phi(r', r) = \ell_a^{-1}\Gamma k\, n_1(r)\,\delta(r - r') + \sum_e \lambda_e \mu_e(r', r) + \sum_e \lambda_e \mu_e(r, r'); \tag{80}$$

$$\hat{L}_r\, \mu_e(r, r') + \lambda_e \mu(r, r') = \sum_p \psi_{pe}(r, r') + a_e \Phi(r, r') + a_e \Gamma_0\, n_1(r)\,\delta(r - r'); \tag{81}$$

$$-(\lambda_e + \lambda_p)\,\psi_{ep}(r, r') + a_e \mu_p(r, r') + a_p \mu_e(r', r) = 0, \tag{82}$$

где

$$\hat{L}_r \equiv -(D\Delta_r + a_0); \quad \ell_a^{-1} \equiv v\,\Sigma_a;$$

$$\Gamma \equiv \Gamma_0(1 - 2\beta); \quad \Gamma_0 \equiv \frac{\overline{\nu(\nu-1)}}{\nu}. \tag{83}$$

К этим уравнениям необходимо добавить уравнения, получающиеся из уравнений (80)–(82) заменой $r \to r'$. Теперь легко получить еще уравнение для величины

$$\psi(r, r') = \Phi(r, r') - \sum_e \mu_e(r, r'). \tag{84}$$

Оно имеет вид:

$$\hat{\bar{L}}_r\, \psi(r, r') + \hat{\bar{L}}_{r'}\, \psi(r', r) = \ell_a^{-1} k\, \Gamma_0\, n_1(r)\,\delta(r - r'), \tag{85}$$

где

$$\hat{\bar{L}}_r \equiv -(D\Delta_r + a); \quad a = \ell_a^{-1}(k - 1). \tag{86}$$

Чтобы получить явное выражение для бинарной спектральной плотности мощности шумов фиктивного источника на входе $\langle S_0(r', \omega)\, S_0(r, \omega)\rangle$, нет необходимости решать систему (80)–(82), а достаточно использовать уравнения (80) и (84) в целом. Действительно, уравнения для бинарной плотности корреляции $K(r', r; t)$ имеют вид:

$$\frac{\partial k_+}{\partial t}(r', r; t) + \hat{L}_r k_+ - \sum_e \lambda_e a_e \int_0^t dt'\, k_+(r', r; t')\, e^{-\lambda_e (t-t')} = \sum_e \lambda_e \mu_e(r', r)\, e^{-\lambda_e t}; \tag{89}$$

$$-\frac{\partial k_-}{\partial t}(r', r; t) + \hat{L}_{r'} k_- + \sum_e \lambda_e a_e \int_0^t dt'\, k_-(r', r; t')\, e^{\lambda_e (t-t')} = \sum_e \lambda_e \mu_e(r, r')\, e^{\lambda_e t}. \tag{90}$$

Решая уравнения (89),(90), получаем представление бинарной плотности корреляции $K(r',r,t)$ через функцию Грина (75) и бинарные плотности $\sigma^2(r',r)$, $\mu_e(r,r')$; $\mu_e(r',r)$. Бинарную спектральную плотность же получаем прямым Фурье – преобразованием уравнений (89), (90):

$$\langle n(r',\omega)\, n(r,\omega)\rangle \equiv \langle r',r\rangle = 2\{k_+(r',r,\omega)+k_-(r',r,\omega)\}, \tag{91}$$

где

$$k_+(r',r;\omega)=\int_0^\infty dt\, e^{-j\omega t}\, k_+(r,r';t); \qquad k_-(r',r;\omega)=\int_{-\infty}^{0} dt\, e^{-j\omega t}\, k_-(r,r';t). \tag{92}$$

Обозначая

$$\hat O_\omega(r)\equiv j\omega+\hat L_r-\sum_e \frac{\lambda_e a_e}{\lambda_e+j\omega}, \tag{93}$$

получаем (91) в символической форме:

$$\langle r',r\rangle = 2\hat O^{*-1}_\omega(r')\,\hat O^{-1}_\omega(r)\,\{\hat O^*_\omega(r')(\sigma(r',r)+\sum \frac{\lambda\,\mu(r',r)}{\lambda+j\omega})+\hat O_\omega(r)(\sigma^2(r,r')+\sum_e\frac{\lambda_e\mu_e(r,r')}{\lambda_e-j\omega})\}, \tag{94}$$

или

$$\langle r',r\rangle=\int dr_1\int dr_2\; G(r,r_1,\omega)\; G^*(r',r_2,\omega)\times 2\{\hat O^*_\omega(r')\,R(r',r,\omega)+\hat O_\omega(r)\,R^*(r,r',\omega)\}, \tag{95}$$

где

$$R(r',r;\omega)\equiv\sigma^2(r',r)+\sum_e\frac{\lambda_e\mu_e(r',r)}{\lambda_e+j\omega}. \tag{96}$$

$G(r,r';\omega)$ – преобразование функции Грина (75) вида

$$G(r',r,\omega)=\int_0^\infty dt\, e^{-j\omega t}\; G(r',r,t). \tag{97}$$

С другой стороны, из соответствующего уравнения для динамической системы (63) получаем:

$$\langle r',r\rangle=\int dr_1\int dr_2\, G(r,r_1,\omega)\; G^*(r',r_2,\omega)\,\langle S_0(r_1,\omega)\,S_0(r_2,\omega)\rangle. \tag{98}$$

Отсюда следует, что бинарная плотность мощности шумов фиктивного источника на входе "порождающего" собственный шум реактора, имеет вид:

$$\langle S_0(r',\omega)\; S_0(r,\omega)\rangle=2\{\hat O^*_\omega(r')\,R(r',r;\omega)+\hat O_\omega(r)\,R^*(r,r',\omega)\}. \tag{99}$$

Для $\omega>0$ это будет монотонно не возрастающая функция от ω. Запишем (99) в виде:

$$\langle S_0(r',\omega),S_0(r,\omega)\rangle=2\{\hat L_{r'}\,R(r',r,\omega)+\hat L_r\,R^*(r,r';\omega)-\sum_e\frac{\lambda_e^2 a_e}{\lambda_e^2+\omega^2}[R(r',r,\omega)+R^*(r,r',\omega)]-j\omega L_0(R(r',r,\omega)-R^*(r,r';\omega))\}, \tag{100}$$

где

$$L_0\equiv1+\sum_e\frac{\lambda_e a_e}{\lambda_e^2+\omega^2}. \tag{101}$$

При этом $R(r',r;\omega)$ имеет форму

$$R(r',r,\omega)=\sigma^2(r',r)+\sum_e\frac{\lambda_e^2\mu_e(r',r)}{\lambda_e^2+\omega^2}-j\omega\sum_e\frac{\lambda_e\mu_e(r',r)}{\lambda_e^2+\omega^2}. \tag{102}$$

Выражение (100) сложным образом зависит от ω. Однако из-за монотонного характера этой функции для $\omega>0$ нам достаточно знать ширину полосы изменения этой функции. Рассмотрим предельные значения $\langle S_0(r',0)\,S_0(r,0)\rangle$ и $\langle S_0(r',\infty)\,S_0(r,\infty)\rangle$. Из выражения (100) и уравнения (85) следует:

$$\langle S_0(r',0)\,S_0(r,0)\rangle=2\ell_a^{-1}k\,\Gamma_0\, n_1(r)\,\delta(r-r')-2(\hat{\bar L}_{r'}+\hat{\bar L}_r)\,n_1(r)\,\delta(r-r'), \tag{103}$$

а при помощи уравнения (80) получаем:

$$\langle S_0(r',\infty)\,S_0(r,\infty)\rangle=2\ell_a^{-1}k\,\Gamma\, n_1(r)\,\delta(r-r')-2(\hat L_{r'}+\hat L_r)\,n_1(r)\,\delta(r-r'). \tag{104}$$

Таким образом, ширина полосы изменения функции (99) дается выражением

$$\Delta_{S_0}\equiv\langle\rangle_0-\langle\rangle_\infty=4\ell_a^{-1}k\,\beta\,(\Gamma_0-1)\,n_1(r)\,\delta(r-r'), \tag{105}$$

где $\Gamma_0-1\approx1$. При $\beta\ll1$ ею можно пренебречь, следовательно, бинарную спектральную плотность фиктивного источника можно записать в виде:

$$\langle S_0(r',\omega)\;S_0(r,\omega)\rangle=2\ell_a^{-1}k\,[\Gamma_0-2q(\omega)]\,n_1(r)\,\delta(r-r')-2(\hat{\bar L}_{r'}+\hat{\bar L}_r)\,n_1(r)\,\delta(r-r'), \tag{106}$$

где

$$0 \leq q(\omega) \leq (\Gamma_0 - 1)\,\beta \approx \beta\,. \tag{107}$$

При не слишком малых мощностях реактора членом, содержащим операторы $\hat{\bar{L}}$, можно пренебречь. (106) является обобщением результата, полученного в однозонном приближении в работе /11/; из-за влияния запаздывающих нейтронов шум фиктивного источника не будет точно белым. С другой стороны, отклонение от белого шума будет порядка β и им можно пренебречь. Это обстоятельство упрощает выражение (95) для бинарной спектральной плотности мощности. Учитывая в (106) только главный член, получаем:

$$\langle r', r \rangle \cong \int dr_1 \; 2\ell_a^{-1} k \;\Gamma_0 \; n(r_1)\, G(r, r_1, \omega)\, G^*(r', r_1; \omega)\,, \tag{108}$$

где функция Грина $G(r', r; t)$ определяется прямым уравнением (76) и соответствующим сопряженным уравнением относительно точки r' (ср. ур. (2).

Из (108), в принципе, можно получить бинарную плотность корреляции и тем самым бинарную плотность дисперсии $\sigma^2(r', r)$.

Заключение

В данной работе изложена общая корреляционная теория нейтронов в ядерных реакторах, основывающаяся на сопряженных уравнениях для функции Грина уравнения Больцмана и на системе уравнений для бинарных плотностей центральных моментов второго порядка. Бинарная плотность корреляции нейтронов удовлетворяет такому же прямому уравнению, что и функция Грина (нейтронной инжекции). В случае стационарных систем все статистически интересные величины могут быть выражены через одну функцию Грина уравнения Больцмана. Структура изложенной корреляционной теории дает простую связь с концепцией передаточной функции и позволяет определить точное выражение для спектральной плотности мощности шумов фиктивного источника на входе (driving force) . Таким образом определена пространственно-энергетическая зависимость корреляции нейтронов в ядерных реакторах.

Отметим еще следующее. В случае импульсных реакторов рост импульсов проходит в надкритичной на мгновенных нейтронах области, где статистический характер процесса размножения нейтронов эффективно переходит в детерминистический процесс /14/. В таком случае решение уравнения (29) для амплитуд импульсов можно представить через плотности произведения первого /3/, а это означает, что относительная дисперсия числа нейтронов в некотором малом объеме реактора около точки r не зависит от

положения этой точки. В стационарном же реакторе дело обстоит не так. В разложении (32) сохранить только первый член уже невозможно. Действительно, рассмотрим одногрупповое приближение критического на запаздывающих нейтронах реактора:

$$-(D\Delta_r + a_0)\, n_1(r) = \ell_a^{-1} k \,\beta \; n_1(r)\,; \tag{109}$$

$$\{-(D\Delta_r + a_0) - (D\Delta_{r'} + a_0)\}\, \Phi(r', r) = \ell_a^{-1} k\, \Gamma\, n_1(r)\, \delta(r - r')\,. \tag{110}$$

В разложении по собственным функциям оператора Δ_r:

$$\Delta_r \phi_k(r) = -B_k^2 \phi_k(r) \tag{111}$$

средняя плотность $n_1(r)$ будет иметь вид:

$$n_1(r) = n_0 \phi_0(r)\,, \tag{112}$$

но в разложении

$$\Phi(r', r) = \sum_i \sum_k a_{ik}\, \phi_i(r')\, \phi_k(r)\,,$$

$$a_{ik} = \frac{b_{ik}}{\zeta_i + \zeta_k}\, \ell_a^{-1} \Gamma \; k\;; \tag{113}$$

$$\zeta_k = D B_k^2 - a_0 = \ell_a^{-1} k \;\beta + D(B_k^2 - B_0^2)\,;$$

$$b_{ik} = n_0 \frac{\int dr \; \phi_0(r)\; \phi_i(r)\; \phi_k(r)}{\int dr \; \phi_i^2(r) \int dr \; \phi_k^2(r)}$$

будут участвовать все члены. То же самое будет иметь место для разложения бинарной спектральной плотности. Коэффициенты b_{ik} не убывают достаточно быстро, и в общем случае относительная дисперсия числа нейтронов в малом объеме реактора около точки r будет зависеть от положения точки r. То же самое имеет место для относительной спектральной плотности мощности. Если такие пространственные эффекты достаточно велики, то их измерением, возможно, можно будет прямо определять такие параметры реактора как длина диффузии и возраст Ферми. Этот вопрос требует дальнейшего экспериментального и теоретического исследования.

Л и т е р а т у р а

1. L.Pal. Acta Phys. Hung., 14, 357 (1962).
2. М.Бартлетт. Введение в теорию случайных процессов, ИИЛ, Москва, 1958.
3. А.Говорков. Атомная энергия, 13, 152 (1962) и 17, 474 (1964).
4. L.Pal. Nuovo Cimento Suppl., 7, 25 (1958).
5. Л.Усачев. Международная конференция по мирному использованию атомной энергии (Женева), 5, 503 (1955).
6. Б.Козик. Корреляция нейтронов в ядерных реакторах с учетом их пространственно-энергетического распределения". Атомная энергия (в печати); Препринт ОИЯИ Р-2216, Дубна, 1965.
7. В.Пугачев. Теория случайных функций. Физматгиз, Москва, 1962.
8. M.Moore. Nucl. Sci. Eng., 3, 387 (1958); 4, 134 (1958).
9. C.Cohn. Nucl. Sci. Eng., 5, 33 (1959);
   R.Badgley, R.Uhrig. Nucl. Sci. Eng., 19, 158 (1964).
10. C.Cohn. Nucl. Sci. Eng., 7, 472 (1970).
11. Б.Козик. Статистическое обоснование динамической модели стационарных ядерных реакторов. Атомная энергия (в печати); Препринт ОИЯИ Р-1996, Дубна, 1965.
12. Б.Козик. Корреляционная теория реактора с отражателем. Атомная энергия (в печати); Препринт ОИЯИ Р-2335, Дубна 1965.
13. P.Hansson, L.Foulke. Nucl. Sci, Eng., 17, 528 (1963).
    W.Loewe. Nucl. Sci. Eng., 21, 536 (1965).
    C.Kylstra, R. Uhrig. Nucl. Sci. Eng., 22, 191 (1965).
14. А.Говорков, Б.Козик. О статистике амплитуд импульсов реактора ИБР. Атомная энергия (в печати); Препринт ОИЯИ Р-2076, Дубна, 1965.

Рукопись поступила в издательский отдел
6 октября 1965 г.