

С 344. 1Г

М-207

30/X.65

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P-2371



Р.В. Малышев

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР

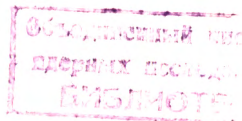
МЕТОДИКА ОПРЕДЕЛЕНИЯ
ИМПУЛЬСА ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ
В НЕОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

1965

P-2371

Р.В. Малышев

МЕТОДИКА ОПРЕДЕЛЕНИЯ
ИМПУЛЬСА ЗАРЯЖЕННОЙ ЧАСТИЦЫ
В НЕОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ



В в е д е н и е

Траектория заряженной частицы в однородном постоянном магнитном поле является винтовой линией с осью, параллельной направлению магнитного поля.

Определение импульса P сводится к измерению радиуса кривизны R винтовой линии и угла η касательной к траектории с направлением поля:

$$P = \frac{\text{Const } H R}{\sin \eta} .$$

При неоднородном магнитном поле задача усложняется тем, что траектория, оставаясь кривой типа винтовой линии, имеет переменный радиус кривизны. В таких случаях точное определение импульса встречает большие трудности и обычно заменяется некоторой оценкой значения P .

Ниже излагается метод определения импульса как параметра, входящего в дифференциальные уравнения, описывающие экспериментальные траектории частиц.

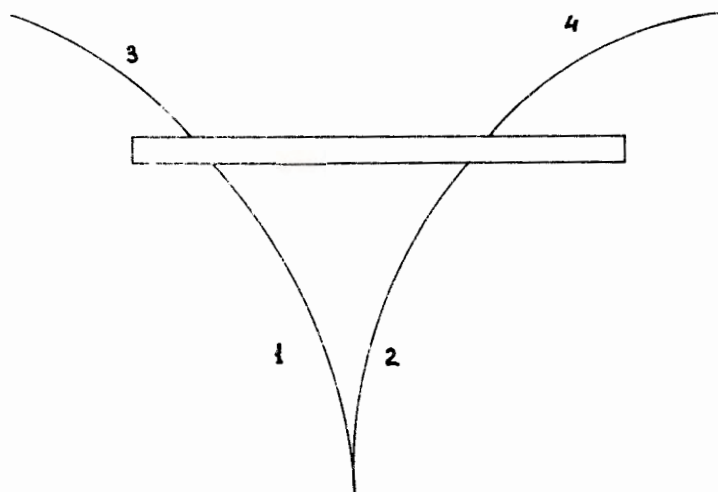
Этот метод был использован в программе для численной обработки V^0 -событий при изучении распадных свойств K_2^0 -мезонов ^{/6/}.

1. Характеристика программы

Программа обработки V^0 -событий на машине М-20 была составлена в ОИЯИ в 1961-62 г.г. сотрудниками ВЦ Р.В. Малышевым и Т.П. Кочкиной.

Задание на программу, содержащее методику решения поставленной физической задачи, было составлено сотрудником ЛЯП Д.Нягу по поручению групп, эксплуатирующей большую камеру Вильсона (100 x 60 x 170 см) ^{/1/}.

Класс обрабатываемых программой событий ограничивается "вилками", в которых каждый из треков может иметь излом в результате прохождения через свинцовый экран (рис. 1).



Р и с . 1.

Фотографирование камеры Вильсона производилось стереофотоаппаратом с двумя объективами. Координаты треков измерялись на полуавтоматах с одновременной пробивкой их на бумажной перфоленте или на микроскопе с последующей пробивкой на перфокартах.

После ввода в М-20 и соответствующей расшифровки информации в машине находятся координаты треков в системе, связанной с измерительными прибором.

Восстановление пространственной картины события во многом следует общепринятой методике^{/2/}.

С помощью трех реперных точек осуществляется переход в систему координат, связанную с оптической осью одного из объективов. Затем производится выброс плохо измеренных точек стандартной программой СП-162^{/3/}. "Соответствующие" точки вычисляются линейной интерполяцией по довольно сложному алгоритму, в ходе которого всем точкам одного кадра стереопары находятся соответствующие точки на другом кадре и, наоборот, всем точкам второго кадра находятся соответствующие точки на первом. Алгоритм предусматривает дополнительный выброс некоторых плохо измеренных точек. В результате этой процедуры, если не происходит дополнительного выброса, общее число точек становится равным $n_1 + n_2 - 2$, где n_1 и n_2 - число точек на каждом

из ядер (n, p, α). В ходе вычислений предусмотрены множители, гарантирующие сходимость итераций.

Формулы для восстановления пространственной картины события написаны Д. Нягу с учетом специфики оптической системы фотоаппарат-камера $1/K$.

Так как магнитное поле измерено в системе координат, связанной с камерой, то для дальнейших вычислений координаты всех треков пересчитываются в эту систему при помощи трех генеральных крестов, нанесенных на верхнее стекло камеры.

Количество точек на одном треке (в пространстве) ограничено снизу $N_{\text{г}}$.

Товщина пленки учитывается введением в импульс множителя, который определяется по изменению расстояния между двумя реперными точками (кресты на стекле камеры).

2. Основные уравнения

Движение заряженной частицы в магнитном поле, без учета торможения, описывается уравнением:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{e}{c} \{ \vec{v}, \vec{H} \},$$

где \vec{p} — импульс частицы, \vec{v} — скорость $^{14)}$.

Если учесть, что $\vec{r} = \frac{E}{c^2} \vec{v}$ и ограничиться магнитным полем вида

$$\vec{H} = H_z (0, 0, H_z(x, y, z)) = H_z(x, y, z) \vec{e}_z, \text{ то}$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{x} &= \frac{ec}{E} H_z y \\ \dot{y} &= -\frac{ec}{E} H_z x \\ \dot{z} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

а) Строго говоря, полей такого типа не существует и предполагается, что

$$\sqrt{H_x^2 + H_y^2} \ll H_z$$

б) В конкретной задаче поле, заданное таблицей, для удобства было аппроксимировано многочленом четвертой степени:

$$\begin{aligned} H_z \text{ (кГс)} &= 0,44 \cdot 10^{-5} \rho^2 (z - 12,7)^2 - 0,6485 \cdot 10^{-4} \rho^2 (z - 12,7) - \\ &- 0,1983 \cdot 10^{-5} \rho (z - 12,7)^3 + 0,4387 \cdot 10^{-7} \rho^2 - 0,7934 \cdot 10^{-3} (z - 12,7)^4 + \\ &+ 0,9765 \cdot 10^{-3} \rho (z - 12,7) + 0,02734 \rho + 0,11718 (z - 12,7) + 7,765; \end{aligned}$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Здесь точкой обозначено дифференцирование по времени, дифференцирование по координате мы в дальнейшем будем обозначать штрихом.

Производя в (1) замену переменных

$$\dot{x} = \frac{1}{w}; \quad \dot{y} = \frac{y'}{w}; \quad \dot{z} = \frac{z'}{w},$$

получим

$$\begin{cases} y'' = -\frac{ec}{E} H_z (1+y') w, \\ z'' = -\frac{ec}{E} H_z y' z' w. \end{cases} \quad (2)$$

(3)

После исключения w из (2) и (3) уравнение интегрируется.

$$\frac{y'' y'}{1+y'^2} = \frac{z''}{z'}; \quad \frac{z'}{\sqrt{1+y'^2}} = k, \quad k - \text{постоянная интегрирования.}$$

$$\text{Далее } \sqrt{1+k^2} \sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1+y'^2 + z'^2} = \frac{ds}{dx} = \frac{ds}{dt} \frac{dt}{dx} = v w$$

и, учитывая $P = \frac{E}{c^2} v$, получаем уравнение (2) в виде:

$$y'' = -\frac{e}{c} H_z \frac{\sqrt{1+k^2}}{P} (1+y'^2)^{3/2}.$$

Если измерять длины в см, магнитное поле в кгс и импульс в Мэв, последнее уравнение запишется в виде:

$$y'' = -0,3 H_z \frac{\sqrt{1+k^2}}{P} (1+y'^2)^{3/2}$$

Вдоль траектории частицы $y = y(x)$, $z = z(x)$ функция $H_z(x, y, z) = H_z[x, y(x), z(x)]$ зависит только от x . Вводя обозначения $\frac{\sqrt{1+k^2}}{P} = p_1$ и $0,3 H_z = H(x)$, выпишем в окончательном виде уравнения траектории заряженной частицы в магнитном поле

$$\begin{cases} y'' = \frac{H(x)}{p_1} (1+y')^{3/2} \\ z' = k \sqrt{1+y'^2} \end{cases} \quad (4)$$

(5)

3. Основные параметры

Уравнения (4), (5) интегрируются

$$\left\{ \begin{aligned} y(x, p_1, q, r) &= \int_{x_1}^x \frac{h(t) + p_1 \frac{q}{\sqrt{1+q^2}}}{\sqrt{p_1^2 - [h(t) + p_1 \frac{q}{\sqrt{1+q^2}}]^2}} dt + r & (6) \\ z(x, k, b) &= k \int_{x_1}^x \sqrt{1+y'^2} dt + b. & (7) \end{aligned} \right.$$

Здесь q , r , b - постоянные интегрирования, x_1 - координата начальной точки траектории, $h(x) = \int_{x_1}^x \Pi(t) dt$.

Функции (6), (7) описывают параметрическое семейство всех траекторий, совместимых с уравнением (1). С другой стороны, предполагая что уравнение (1) описывает эксперимент, мы имеем набор координат точек, измеренных вдоль конкретной траектории этого семейства. Метод наименьших квадратов позволяет определить значение параметров p_1, q, r, k, b минимизирующих функции:

$$S_1(p_1, q, r) = \sum_{i=1}^n \left[\frac{y_i(x_i) - y(x_i, p_1, q, r)}{\sigma_{y_i}} \right]^2 \quad (8)$$

$$S_2(k, b) = \sum_{i=1}^n \left[\frac{z_i(x_i) - z(x_i, k, b)}{\sigma_{z_i}} \right]^2, \quad (9)$$

где n - число измеренных точек, σ_{y_i} , σ_{z_i} - ошибки в измерении координат y_i , z_i .

4. Вычисление параметров

4.1. Искомые параметры входят в (6) нелинейно. Задачи минимизации (8) и (9) решаются методом, предложенным И.Н.Силиным^{/5/}. На основе этого метода им написана стандартная программа для машины М-20 (СП-123).

На вход СП-123 необходимо задавать:

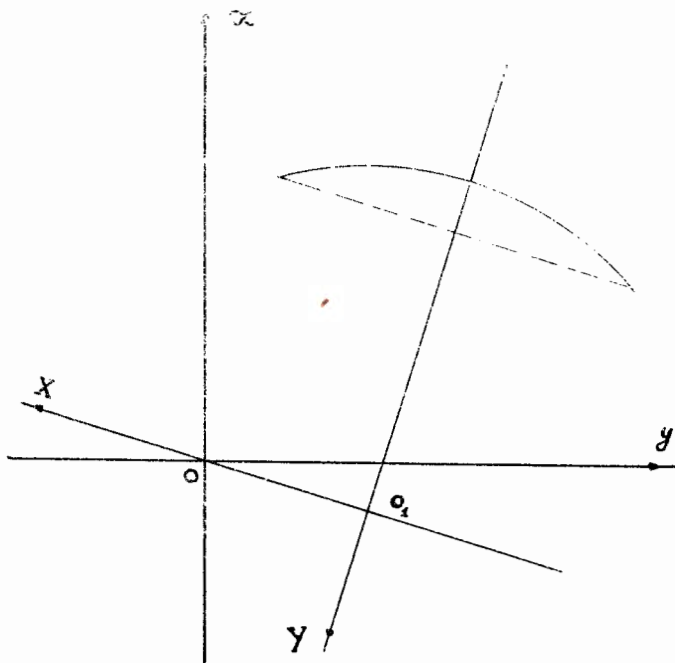
- а) таблицу координат экспериментальной траектории и ошибок их измерения $\{ y_i, \sigma_{y_i}, x_i \}$ соответственно $\{ z_i, \sigma_{z_i}, x_i \}$,
($i = 1, 2, \dots, n$);
- б) начальные приближения для искомых параметров $(p_1^{(0)}, q^{(0)}, r^{(0)})$ соответственно $(k^{(0)}, b^{(0)})$;
- в) требуемую точность ϵ ;

г) программу вычисления в каждой экспериментальной точке значений функции (6) или (7) и ее производных по всем варьируемым параметрам.

На выходе СП-123 получается:

- а) значения параметров $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \beta_6, \beta_7, \beta_8, \beta_9, \beta_{10}$, минимизирующих $S(S_{\text{data}})$;
- б) $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6, \sigma_7, \sigma_8, \sigma_9, \sigma_{10}$ - ошибки в определении параметров по экспериментальной информации S_{data} ;
- в) значения функции $S_{\text{min}}(S_{\text{data}})$ в точке минимума.

1.2. Чтобы избежать бесконечных производных $y'(x)$, все дальнейшие вычисления ведутся в "местной" системе координат экспериментальной траектории (см. рис.2), которая $y'(x)$ всюду конечна ^{xx)}.



Р и с . 2.

х) СП-123 выдает полную матрицу ошибок, но корреляционные элементы ее в дальнейших вычислениях не используются.

xx) Существование такой системы координат накладывает дополнительные ограничения на класс траекторий.

Пересчет экспериментальной траектории в новую систему координат осуществляется по формулам (10).

$$\begin{cases} X_i = B x_i - A y_i - C \\ Y_i = A x_i + B y_i \\ Z_i = z_i \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, n), \quad (10)$$

где

$$A = \frac{y_n - y_1}{\sqrt{(x_1 - x_n)^2 + (y_1 - y_n)^2}}$$

$$B = \frac{x_1 - x_n}{\sqrt{(x_1 - x_n)^2 + (y_1 - y_n)^2}}$$

$$C = \frac{B(x_1 + x_n) - A(y_1 + y_n)}{2}$$

4.3. Экспериментальная ошибка измерения для каждой координаты принимается постоянной во всех точках траектории и равной (вычисленной) среднеквадратичной величине соответствующей координаты.

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{S_{1min}}{n-3}}, \quad \sigma_x = \sqrt{\frac{S_{2min}}{n-2}}. \quad (11)$$

Так как S_{1min} и S_{2min} будут известны лишь после проведения всех вычислений, первоначально всем точкам приписывается вес, равный единице ($\sigma = \sigma_y = \sigma_x = 1$), а полученные ошибки параметров домножаются впоследствии на соответствующие множители (11).

4.4. Начальные значения параметров p_1 , q , r определяются по экспериментальной траектории. Для проекции импульса p_1 берется вначале значение, заведомо большее реального, чтобы избежать бесконечных $y'(x)$ в первых приближениях.

$$p_1^{(0)} = \rho^{(0)} H_{max} \text{Sign } a_n,$$

где

$$\rho^{(0)} = \max \left\{ \frac{1}{2|a_n|}, |X_1| \right\}, \quad H_{max} = 0,3 H_{z_{max}},$$

$H_{z_{max}}$ — максимальное значение поля в камере, X_1 — координата первой точки траектории, a_n — коэффициент параболы $Y = aX^2 + d$, определенный по всем n -точкам.

$$a_n = \frac{n \sum_{i=1}^n X_i^2 Y_i - (\sum_{i=1}^n X_i^2) (\sum_{i=1}^n Y_i)}{n \sum_{i=1}^n X_i^4 - (\sum_{i=1}^n X_i^2)^2} \quad (12)$$

$q^{(0)} = 2a_7 X_1$, где a_7 — определяется из (12) при $n=7$, $\{t^{(0)}\} = Y_1, Y_1$ — координата первой точки траектории.

4.5. Производные функции $y(x, p_1, q, \tau)$ по параметрам p_1, q, τ получаются из (6). Как уже было сказано в 4.1, при работе СП-123 требуется вычислять значения этих производных последовательно во всех экспериментальных точках. Удобно свести эти вычисления к интегрированию системы дифференциальных уравнений.

Обозначая производные $\frac{\partial y}{\partial x} = y'_x$, $\frac{\partial y}{\partial p_1} = y'_{p_1}$, $\frac{\partial y}{\partial q} = y'_q$, $\frac{\partial y}{\partial \tau} = y'_\tau$, продифференцируем $y(x, p_1, q, \tau)$, $y'_x, y'_{p_1}, y'_q, y'_\tau$ дополнительно по x .

$$\left\{ \begin{array}{l} y'^x = y'_x \\ y'_{p_1} = \frac{p_1^3 H(x)}{\{p_1^2 - [h(x) + p_1 \frac{q}{\sqrt{1+q^2}}]^2\}^{3/2}} \\ y'_q = - \frac{h(x)}{\{p_1^2 - [h(x) + p_1 \frac{q}{\sqrt{1+q^2}}]^2\}^{3/2}} \\ y'_\tau = \frac{p_1^3}{(1+q^2)^{3/2} \{p_1^2 - [h(x) + p_1 \frac{q}{\sqrt{1+q^2}}]^2\}^{3/2}} \\ y'_\tau = 0 \end{array} \right.$$

Получив из (6) выражение y'_x через $h(x)$, можно из всех уравнений исключить интеграл $h(x)$.

$$\left\{ \begin{array}{l} y'^x = y'_x \\ y'_{p_1} = \frac{1+y_x^2}{p_1} \left[q \sqrt{\frac{1+y_x^2}{1+q^2}} - y_x \right] \\ y'_q = \frac{1+y_x^2}{1+q^2} \\ y'_\tau = 0 \\ y'_x = \frac{H(x)}{p_1} (1+y_x^2)^{3/2} \end{array} \right. \quad (13)$$

Легко убедиться, что начальными условиями для (13) будут

$$y(x_1) = r, \quad y_p(x_1) = 0, \quad y_q(x_1) = 0, \quad y_r(x_1) = 1, \quad y_x(x_1) = q.$$

Для получения требуемой точности при интегрировании уравнений (13) вычисления производятся не только в экспериментальных точках, но и между ними с некоторым шагом. При определении магнитного поля $\Pi(x, y(x), z(x))$ в промежуточных точках значение $y(x)$ получается из уравнений (13), а $z(x)$ вычисляется линейной интерполяцией между двумя соседними экспериментальными точками.

4.6. Функция $z(x, k, b)$ и ее производные по параметрам k, b вычисляются из системы дифференциальных уравнений, которые получаются из (7) после дифференцирования сначала по k, b , а затем по x :

$$\left. \begin{aligned} z' &= k z'_k \\ z'_k &= \sqrt{1 + y_x^2} \\ z'_b &= 0 \\ y'_x &= \frac{\Pi(x)}{p_1} (1 + y_x^2)^{3/2} \\ y' &= y_x \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

Начальными условиями системы (14) будут

$$z(x_1) = b, \quad z_k(x_1) = 0, \quad z_b(x_1) = 1, \quad y_x(x_1) = q, \quad y(x_1) = r.$$

Уравнение $y' = y_x$ включено только затем, чтобы избежать интерполяцию при вычислении $\Pi(x, y(x), z(x))$. Начальные приближения для параметров k, b определяются по формулам

$$k^{(0)} = \frac{Z_n - Z_1}{X_n - X_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + q^2}}; \quad b^{(0)} = Z_1,$$

(X_1, Z_1) , (X_n, Z_n) — координаты начальной и конечной точек экспериментальной траектории.

5. Схема вычислений

Вычисления производятся в два этапа. Сначала определяются начальные приближения для параметров p_1, q, r , которые затем уточняются с помощью СП-123, производящей все вычисления, связанные с уравнением (4). В результате получаются значения $p_1, \sigma_{p_1}, q, \sigma_q, r, S_{1 \text{ min}}$. На втором этапе считаются начальные прибли-

^{x)} Следует обратить внимание на то, что функция $\Pi_z(x, y, z)$ первоначально задана в системе координат камеры, а все вычисления ведутся в местной системе координат траектории. Соответствующее согласование осуществляется с помощью (10).

жения для k и b , которые уточняются затем путем повторного обращения к СП-123, производящей на этот раз все вычисления, связанные с уравнением (5).

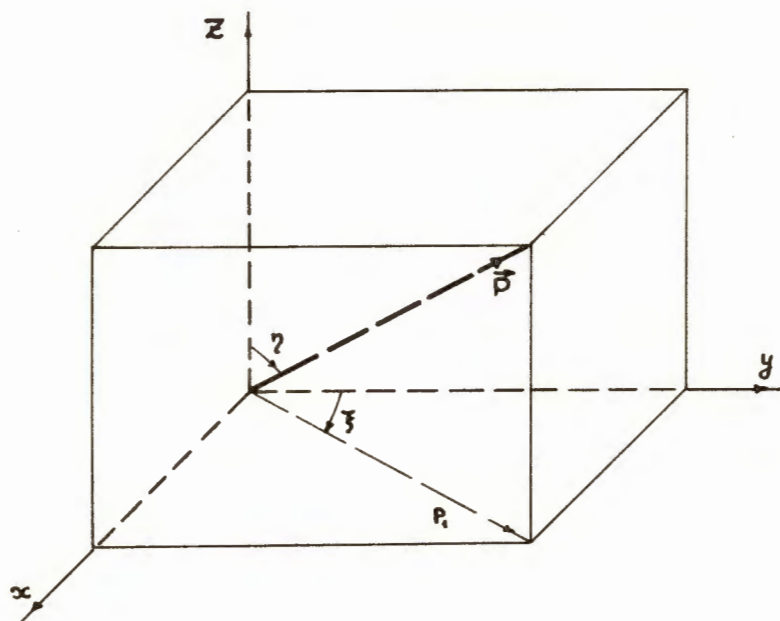
На втором этапе p_1, q, r предполагаются известными точно. В результате получаются значения k, σ_k, S_{2min} .

После этого ошибки уточняются согласно формулам:

$$\Delta p_1 = \sigma_p \sqrt{\frac{S_{1min}}{n-3}}; \quad \Delta q = \sigma_q \sqrt{\frac{S_{1min}}{n-3}}; \quad \Delta k = \sigma_k \sqrt{\frac{S_{2min}}{n-2}}.$$

Теперь мы располагаем всеми данными для определения величины импульса p и его направления в начальной точке траектории.

Окончательный результат выписан в полярной системе координат, связанной с камерой (см. рис. 3).



Р и с . 3.

$$\left. \begin{aligned} \sin \eta &= \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \\ \cos \eta &= \frac{k}{\sqrt{1+k^2}} \end{aligned} \right\} \quad \Delta \eta = \frac{\Delta k}{1+k^2} \frac{180^\circ}{\pi}$$

$$0 \leq \eta \leq 180^\circ$$

$$\left. \begin{aligned} \sin \xi &= \frac{Aq+B}{\sqrt{1+q^2}} \\ \cos \xi &= \frac{A-Bq}{\sqrt{1+q^2}} \end{aligned} \right\} \quad \Delta \xi = \frac{\Delta q}{1+q^2} \frac{180^\circ}{\pi}$$

$$0 \leq \xi \leq 360^\circ$$

$$P = |p_1| \sqrt{1+k^2}, \quad \Delta P = \frac{\sqrt{\Delta p_1^2 + p_1^2 \Delta \eta^2 \cos^2 \eta}}{\sin \eta}$$

Коэффициенты A, B те же, что в формулах (10).

5. Последующая обработка V^0 -события^{х)}

После определения импульсов и угловых величин всех треков вносятся поправки, учитывающие расходимость пучка K_2^0 -мезонов. Дальнейшая обработка состоит в применении к V^0 -событию законов сохранения импульса и энергии в предположении, что известна схема распада (ансамбль значений масс всех распадных частиц).

В задачу этой части программы входят:

- 1) определение совместности события с трехчастичным распадом K_2^0 -мезона по одной из известных схем распада;
- 2) определение совместности события со схемами двухчастичных распадов известных нестабильных частиц;
- 3) получение данных, необходимых для идентификации природы распадных частиц;
- 4) вычисление параметров, описывающих поведение частиц при прохождении через свинцовый экран.

^{х)} Эта часть программы по заданию, составленному Д. Нягу, написана Т.П. Кочкиной.

Л и т е р а т у р а

1. Р.Б. Малышев, Д. Нягу. Методика обработки V^0 -событий на электронно-вычислительной машине. Отчет ЛЯП и ВЦ ОИЯИ Б-3-1360, Дубна 1963.
2. Материалы Совещания по камерам Вильсона, диффузионным и пузырьковым камерам. Вып. 5, Дубна, 1959.
3. Н.Н. Говорун и др. Обработка экспериментальных данных, поступающих с просмотровых автоматов. Препринт ОИЯИ 1102, Дубна 1962.
4. Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшиц. "Теория поля", стр. 69, Физматгиз, 1960.
5. С.Н. Соколов, И.С. Силин. Нахождение минимумов функционалов методом линеаризации. Препринт ОИЯИ Д-810, Дубна 1961.
6. М. Аникина и др. Исследование распадов K^0_2 -мезонов. Препринт ОИЯИ Р-2065, Дубна 1965 г.

Рукопись поступила в издательский отдел
23 сентября 1965 г.