ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. П. Н. ЛЕБЕДЕВА АН СССР

Zh. eksper. Teor. Fiz., 1959, v 36 N 3, p 823-831

P-237

И. М. Франк

О роли групповой скорости света при излучении в преломляющей среде

г. Дубна, 1958 год

Р-237

И. М. Франк

О роли групповой скорости света при излучении в преломляющей среде

§ I. Введение

В последние годы эффект Вавилова-Черенкова широко используется в исследованиях по ядерной физике и особенно по физике частиц высокой энергии. В настоящее время на опыте наблюдают либо излучение отдельных заряженных частиц, движущихся в преломляющей среде, либо суммарное некогерентное между собой излучение, создаваемое многими зарядами, движущимися независимо друг от друга. Однако уже сейчас возникает вопрос об излучении движущейся системы частиц[x]. Система частиц может иметь собственные частоты колебаний. Поэтому рассмотрение особенностей движущегося в среде излучателя, имеющего произвольную собственную частоту колебаний, может иметь не только принципиальный, но и практический интерес.

Предметом статьи является выяснение роли групповой скорости света в излучении такого источника, равномерно движущегося в преломляющей изотропной среде, прозрачной для излучаемого света.

Как известно, излучение движущегося источника света существенно зависит от соотношения между скоростью излучателя и фазовой скоростью света для излучаемой частоты. Так для частицы, создающей постоянное во времени электромагнитное поле (электрический заряд, постоянный магнитный диполь и т.д.), т.е. при собственной частоте, равной нулю, возникает эффект Вавилова-Черенкова, когда скорость движения достигает и начинает превышать величину фазовой скорости света. При этом связь между направлением излучения света и излучаемой частотой ω_θ определяется отношением скорости движения v к фазовой скорости света $u = \frac{c}{n(\omega_\theta)}$ для этой частоты, а именно

$$\frac{v\cos\theta}{c/n(\omega_\theta)} = 1 \qquad n(\omega_\theta) = \frac{c}{v\cos\theta} \tag{I.I}$$

Если частица (или система частиц) при движении в среде создает переменное во времени поле частоты ω_0' (частота ω_0' в системе координат излучателя), то излучаемые частоты подчиняются условию Допплера. Так же, как и для эффекта Вавилова-Черенкова, допплеровская частота является функцией отношения $\frac{v}{c/n(\omega_\theta)} = \beta n(\omega_\theta)$. Действительно излучаемые допплеровские частоты удовлетворяют одному из соотношений

$$\omega_\theta = \frac{\omega_0}{1-\beta n(\omega_\theta)\cos\theta}\,; \qquad \beta n(\omega_\theta)\cos\theta < 1 \tag{I.2}$$

$$\omega_0 = \frac{\omega_0}{\beta n(\omega_\theta)\cos\theta - 1}\,; \qquad \beta n(\omega_\theta)\cos\theta > 1 \tag{I.3}$$

Здесь $\omega_0 = \omega_0'\sqrt{1-\beta^2}$ частота собственных колебаний, измеренная в системе координат, в которой среда покоится.

Первое из уравнений соответствует случаю, когда проекция скорости излучателя на направление луча $v\cos\theta$ меньше фазовой скорости света $u = \frac{c}{n(\omega_\theta)}$ для допплеровской частоты (допплe-

---

x) Такая постановка вопроса возникает, в частности, в связи с т.н. когерентным методом ускорения заряженных частиц, предложенным В.И.Векслером.

ровские частоты обычного типа). Вторая формула соответствует "сверхсветовому" эффекту Доплера, т.е.

$$v\cos\theta > \frac{c}{n(\omega_\theta)}$$

Групповая скорость света в рассмотренные выше соотношения в явном виде не входит. Известно, однако, что именно групповая скорость света определяет скорость распространения в среде излученной энергии. Естественным представляется поэтому вопрос о том, не возникают ли в явлениях излучения какие-либо особенности, если скорость движения превышает групповую скорость, т.е., если излучатель обгоняет излучаемую им световую энергию. Из дальнейшего будет видно, что это действительно так: равенство скорости движения излучателя величине групповой скорости света является необходимым (хотя и недостаточным) условием появления новых компонент излучения.

Для эффекта Вавилова-Черенкова этот результат элементарен. В самом деле наименьшая скорость, при которой возникает излучение Вавилова-Черенкова под углом θ согласно (I.I), равна

$$v_{мин.}\cos\theta = \frac{c}{n_{макс.}} \qquad (I.4)$$

где $n_{макс.}$ - максимальное значение, которое может принимать показатель преломления в данной среде (соответствующую ему частоту обозначим $\omega_{гран.}$). Так как величина групповой скорости W определяется соотношением

$$\frac{1}{W} = \frac{1}{c}\frac{d}{d\omega}(\omega n) = \frac{1}{c}\left(n + \omega\frac{dn}{d\omega}\right) \qquad (I.5)$$

и для максимума показателя преломления $\left[\frac{dn}{d\omega}\right]_{\omega=\omega_{гран.}} = 0$, то

$$W(\omega_{гран.}) = \frac{c}{n_{макс.}} \qquad (I.6)$$

Сравнивая с (I.4), получаем, что

$$\frac{v\cos\theta}{W(\omega_{гран})} = 1 \qquad (I.7)$$

Таким образом, условием порога является равенство $v\cos\theta$ величине групповой скорости света для частоты, первой появляющейся в спектре излучения Вавилова-Черенкова. Иными словами порог определяется выполнением условий (I.I) и (I.7) для одинаковой в обоих случаях частоты $\omega_\theta = \omega_{гран.}$.

Соотношение (I.7) осталось незамеченным, по-видимому, в связи с тем, что при определении порога излучения обычно иначе формулирует задачу. Обычно считает частоту излучения заданной, например, лежащей в оптической области спектра, и, зная показатель преломления для этой частоты, определяют пороговую скорость.

Условие типа (I.7) имеет значение и для других видов излучения в среде. Для выяснения этого необходимо обратиться к рассмотрению вопроса о расщеплении излучаемых частот, к т.н. "сложным" эффектам излучения[I].

Из (I.I) - (I.3) видно, что в случае среды, обладающей дисперсией, эти уравнения не являются линейными относительно ω_θ , поскольку показатель преломления $n(\omega_\theta)$ может зависеть от частоты сложным образом. В результате для заданных ω_0 , v и θ возможно несколько частот ω_θ , удовлетворяющих условию Доплера [I] (сложный эффект Доплера). Впервые Л.И.Мандельштам в своих лекциях указал, что возникновение сложного эффекта Доплера связано с величиной групповой скорости света[2 x)]. Действительно оказалось, что ранее полученное условие возникновения сложного эффекта Допплера[I] эквивалентно утверждению, что величина отношения $v \cos\theta$ к величине групповой скорости света для одной из допплеровских частот превышает единицу[3].

Условием для порога возникновения сложного эффекта излучения, а значит и порога для появления новых компонент в спектре, во всех случаях является условие (I.7).

Рассмотрение этого круга явлений позволяет сделать также и другие выводы. Так можно утверждать, что быстро движущийся излучатель, имеющий произвольную собственную частоту при любой скорости движения и в любой преломляющей среде, не может полностью обгонять излучаемую им световую энергию.

§ 2. Условия возникновения сложного состава излучения

Для более детального рассмотрения вопроса о спектре излучаемых частот воспользуемся графическим методом, несколько изменив его по сравнению с использованием для этой же цели ранее [I].

Напишем уравнения (I.2), (I.3) и (I.I) в таком виде, чтобы слева стояла величина $\frac{1}{c}\omega_\theta n(\omega_\theta)$ (В уравнении (I.I) для этой цели левую и правую части умножим на ω_θ)

$$\frac{1}{c}\omega_\theta n(\omega_\theta) = \frac{\omega_\theta - \omega_0}{v\cos\theta}\,; \quad n(\omega_\theta)\beta\cos\theta < 1 \tag{2.I}$$

$$\frac{1}{c}\omega_\theta n(\omega_\theta) = \frac{\omega_\theta + \omega_0}{v\cos\theta}\,; \quad n(\omega_\theta)\beta\cos\theta > 1 \tag{2.2}$$

$$\frac{1}{c}\omega_\theta n(\omega_\theta) = \frac{\omega_\theta}{v\cos\theta}\,; \quad n(\omega_\theta)\beta\cos\theta = 1 \tag{2.3}$$

Эти уравнения имеют простой физический смысл. Они являются следствием закона сохранения импульса при излучении фотона. Это сразу станет очевидным, если умножить правую и левую части всех равенств на величину $\hbar\cos\theta$. Тогда слева во всех равенствах получим $\frac{\hbar\omega_\theta}{c/n}\cos\theta$, т.е. проекцию вектора импульса излученного фотона на направление движения излучателя. Что касается величины, стоящей справа, то, как нетрудно убедиться, она равна величине импульса, теряемого движущейся системой на излучение. Действительно, во всех случаях это величина энергии ΔE, заимствованная на излучение из кинетической энергии движения, делённая на величину скорости v. Например, в (2.I) справа имеем $\frac{\hbar\omega_\theta - \hbar\omega_0}{v}$ т.е. деленную на v разность энергий излученного фотона и энергии перехода из возбужденного состояния. Очевидно, что величина этой разности покрывается за счет кинетической энергии. Что касается уравнения (2.2), то особенность сверхсветового

---

x) В опубликованном тексте лекций Л.И.Мандельштама[2] об этом сказано кратко и недостаточно отчетливо. См. также в [3].

эффекта Допплера состоит в том, что излучение фотона сопровождается возбуждением системы [3]. Поэтому из кинетической энергии заимствуется величина, равная сумме $\hbar\omega_\theta + \hbar\omega_o$
Правая часть уравнения (2.3) очевидна и пояснений не требует.

Изменение величины импульса при небольшом изменении кинетической энергии, как известно, удовлетворяет соотношению
$$\Delta p = \frac{\Delta E}{v} \qquad (2.4)$$
Таким образом, уравнения (2.I) - (2.3) действительно вытекают из законов сохранения энергии и импульса, причем (I.I) - (I.3) могут рассматриваться как их следствия.

Отметим также, что уравнение (2.3) является частным случаем уравнений (2.I) и (2.2). Оно соответствует, как и следовало ожидать, случаю стационарного во времени поля излучателя, т.е. $\omega_o = 0$. Очевидно, что (2.I) и (2.2) при $\omega_o = 0$ могут быть удовлетворены только при замене неравенства, стоящего справа, равенством. Различие (2.I) и (2.2) между собой также не является принципиальным, они получаются одно из другого изменением знака при ω_o или ω_θ, что с точки зрения волновой означает лишь перемену знака изменения фазы колебаний. Таким образом, уравнения (2.I) - (2.3) могут рассматриваться как различные случаи одного и того же соотношения.

Поле любого равномерно движущегося в среде излучателя может быть разложено в спектр по собственным частотам $\omega_o' = \frac{\omega_o}{\sqrt{1-\beta^2}}$. Поэтому следствия, вытекающие из уравнений (2.I)-(2.3) сохраняющие свое значение для произвольного ω_o', правильны и для любого спектра частот ω_o', т.е. охватывают общий случай излучения при равномерном движении в среде [x)].

На рис.I представлена графически величина волнового вектора
$$k(\omega) = \frac{1}{c}\,\omega\cdot n(\omega) \qquad (2.5)$$
как функция ω. Кривая $k(\omega)$ делит (при условии, что $n(\omega) > 0$) часть плоскости, ограниченной положительными полуосями координат на две области. Область I, лежащую ниже кривой $k(\omega)$, и область П, лежащую выше нее.

На том же рисунке проведены прямые, удовлетворяющие уравнениям:
$$a_1 = \frac{\omega - \omega_o}{v\cos\theta} \qquad (2.6)$$
$$a_2 = \frac{\omega + \omega_o}{v\cos\theta} \qquad (2.7)$$
$$a = \frac{\omega}{v\cos\theta} \qquad (2.8)$$
Пересечения этих прямых с кривой $k(\omega)$ дают очевидно величины ω_θ, удовлетворяющие соответственно (2.I), (2.2) и (2.3), т.е. дающие в рассматриваемой среде величины допплеровских

---

x) В частности путь, на котором происходит излучение, может быть ограниченным. Это соответствует такому спектру частот, при котором поле обращается в нуль вне заданного интервала времени.

частот для данного ω_o , v и θ и частоту излучения Вавилова-Черенкова для данных v и θ .

Для удобства рассмотрения во всех трех случаях на рис.I взяты одинаковые v и θ . Поэтому все три прямые параллельны и имеют наклон к оси ω , равный $\alpha = tg\varphi = \frac{1}{v\cos\theta}$ (на рис.I представлен случая $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, т.е. $\cos\theta > 0$). Прямая $a(\omega)$ проходит через начало координат,а прямые $a_1(\omega)$ и $a_2(\omega)$ сдвинуты относительно нее вверх и вниз величину $\pm \frac{\omega_o}{v\cos\theta}$. Величина параметров выбрана так, что каждая из прямых имеет несколько пересечений с $k(\omega)$, т.е. все эффекты сложные.

Характер пересечения прямых a с кривой $k(\omega)$ может быть различен. Если двигаться вдоль прямой в направлении увеличения ω , то в точке пересечения прямая может переходить из области I в область П, если наклон касательной к кривой $k(\omega)$, т.е. $\frac{dk}{d\omega}$ меньше, чем $\alpha = \frac{1}{v\cos\theta}$ Наоборот, если $\frac{dk}{d\omega} > \frac{1}{v\cos\theta}$, то в точке пересечения происходит переход из П в I. Наконец, $\frac{dk}{d\omega} = \frac{1}{v\cos\theta}$ соответствуют очевидно случаю касания (с внутренней или внешней стороны).

Наклон касательной к кривой $k(\omega)$ равен, как это очевидно из (2.5), обратной величине групповой скорости света для частоты ω

$$\frac{d}{d\omega} k(\omega) = \frac{1}{c} \frac{d}{d\omega} \omega n(\omega) = \frac{1}{W(\omega)} \tag{2.9}$$

Таким образом, имеем три случая:

$$\frac{v\cos\theta}{W(\omega_\theta)} < 1 \qquad \text{переход из I в П} \tag{2.I0}$$

$$\frac{v\cos\theta}{W(\omega_\theta)} > 1 \qquad \text{переход из П в I} \tag{2.II}$$

$$\frac{v\cos\theta}{W(\omega_\theta)} = 1 \qquad \text{касание} \tag{2.I2}$$

Переход из I в П или из П в I может осуществляться и в точке касания (касание в точке перегиба). Поэтому в уравнениях (2.I0) и (2.II) в принципе возможен также и знак равенства. В действительности, однако, угол θ всегда задан с точностью до некоторой возможно небольшой, но всегда конечной величины $\Delta\theta$, выделяющей некоторый интервал частот $\Delta\omega$, для которого и определяется величина W . Если касание происходит в точке перегиба, то в точках, соседних с ней как справа, так и слева, величина W удовлетворяет тому знаку неравенства, который характерен для соответствующего пересечения. Таким образом, в среднем по интервалу углов $\Delta\theta$ неравенство имеет определенный знак и знак равенства может быть отброшен.

Уравнение (2.I2) предполагает по этой же причине, что касание происходит без пересечения. В этом случае при переходе через точку касания неравенство меняет свой знак и, следовательно, в среднем по малому $\Delta\theta$ мы можем считать выполненным равенство.

На рис.I и на аналогичном рис.2 часть кривой $k(\omega)$ показана пунктиром. В этой области частот отождествление производной к кривой $k(\omega)$ с обратной величиной групповой скорости является незаконным. Это связано с тем, что в реальном случае среды, обладающей дисперсией, нельзя пренебрегать наличием поглощения света в некоторых интервалах частот. Это видно из следующего. При малых ω величина $n(\omega) > 1$ и значит кривая $k(\omega) = \frac{1}{c}\omega n(\omega)$ лежит выше прямой $\frac{1}{c}\omega$ (на рис.I и 2 эта прямая показана пунктиром). Для достаточно больших ω, $n(\omega) < 1$ и, следовательно, $k(\omega)$ лежит под прямой $\frac{1}{c}\omega$. В промежуточной области наклон к кривой, если его считать равным $\frac{1}{w}$, должен меньше $\frac{1}{c}$, т.е. $w > c$, что невозможно.

Несомненно, что эта область, а также и область отрицательных w (если она имеется), соответствует интервалу частот, в котором поглощением света пренебрегать нельзя. В этом случае, как известно, величине (I.5) не может быть приписан смысл групповой скорости света.

Сказанное относится только к физическому смыслу производной $k(\omega)$, Что касается самой кривой, то она сохраняет свое значение во всей области изменения ω, если под n понимать ее действительную часть и ее пересечения с прямыми a дают значения излучаемых частот. Мы не будем исключать из рассмотрения и область отрицательных w, так как в принципе они возможны, хотя в однородной преломляющей среде этот случай не осуществим вне области сильного поглощения.

Рассмотрим следствия, вытекающие из рассмотрения рис.I и уравнений (2.I0)-(2.I2). При достаточно больших ω величина $n(\omega)$ приближается к единице и, следовательно, наклон кривой $k(\omega) = \frac{1}{c}\omega n(\omega)$ равен $\left[\frac{1}{w}\right]_{\omega\to\infty} = \frac{1}{c} < \frac{1}{v\cos\theta}$ для $\theta \leq \frac{\pi}{2}$. Поэтому при достаточно больших ω все три прямые a оказываются в области П. Прямая a_1 пересечение которой с $k(\omega)$ определяет частоты обычного эффекта Допплера (уравнения (I.2)), при $\omega = \omega_0$ пересекает ось абсцисс и, следовательно, лежит в области I. Поэтому для прямой a_1 обязательно должно быть хотя бы одно пересечение с переходом из области I в область П (например, точка A_1 или C_1 рис.I). Это правильно не только для случая $\cos\theta \geqslant 0$, т.е. $\theta \leq \frac{\pi}{2}$, представленного на рис.I, но и для любого $0 \leq \theta \leq \pi$. При увеличении θ от 0 до π наклон прямой a_1 меняется в пределах от $\alpha' = +\frac{1}{v}$ до $\alpha'' = -\frac{1}{v}$ (см.рис.2 пунктир). Из рис.2 видно, что и для $\cos\theta < 0$ прямая a_1 обязательно пересекает кривую $k(\omega)$.

Таким образом, при любой скорости v для любого угла θ и собственной частоте ω_0 должна быть не менее, чем одна допплеровская частота, удовлетворяющая (I.2), причем такая, что для нее выполняется условие (2.I0).

Эффект Допплера может быть при этом сложным, так как к этой частоте могут добавляться еще несколько частот (пересечения B_1 и C_1 рис.I или B' и C'. рис.2). Число таких дополнительных частот обязательно четное, так как они должны быть обязаны равному числу переходов из области I в П и из П в I (в предельном случае касания они могут сливаться между собой). Таким образом, заведомо имеет место сложный эффект Допплера, если имеется хотя бы один переход из П в I или, по крайней мере, касание прямой a кривой $k(\omega)$ извне или изнутри. Отсюда получаем, что условием возникновения сложного эффекта Допплера является наличие допплеровской частоты, для которой согласно (2.II) или (2.I2)

$$\frac{v\cos\theta}{W(\omega_\theta)} \geqslant 1 \qquad (2.13)$$

Из рассмотрения рис.2 можно придти к выводу, что все сказанное относится и к случаю тупых углов θ. Для возникновения сложного эффекта Допплера и в этом случае необходимо выполнение (2.13). Так как при $\theta > \frac{\pi}{2}$, $\cos\theta < 0$, то это возможно лишь для отрицательной групповой скорости по абсолютной величине, меньшей чем $|v\cos\theta|$. При этом, если частота расщепляется, то большая из них удовлетворяет неравенству (2.10).

Сложный эффект Допплера может возникнуть и за счет появления сверхсветовых допплеровских компонент. Прямая a_2, определяющая эти частоты при малых ω, так же, как и при больших ω, лежит в области П и поэтому она может вообще не иметь пересечений с кривой $k(\omega)$. Это и понятно, так как в отличие от обычных частот, которые имеются всегда, сверхсветовые допплеровские частоты возникают дополнительно и только при определенных условиях и причем, разумеется, лишь для острых углов θ. Однако, если пересечения a_2 с $k(\omega)$ имеются, то их не менее двух (в общем случае четное число), так как после каждого перехода прямой a_2 из П в I при больших частотах происходит переход из I в П. Для первых переходов правильно (2.11), а для перехода, соответствующего большей частоте, выполнено (2.10). В предельном случае вместо пересечения происходит касание, т.е. пара таких частот сливается вместе. Таким образом, порогом для возникновения сверхсветового эффекта Допплера является (1.7). Для каждого данного θ сверхсветовой эффект Допплера всегда сложный, причем имеется компонента, удовлетворяющая (2.13).

Отсюда следует, что выполнение условия (2.13) для какой-либо допплеровской частоты является необходимым и достаточным условием того, что имеет место сложный эффект Допплера. Это и есть в несколько более общей форме ранее полученное условие возникновения сложного эффекта Допплера [1,3].

Сказанное легко обобщить на случай излучения Вавилова-Черенкова. Прямая a, как уже указывалось при больших ω, лежит в области П. При малых ω (если исключить из рассмотрения точку $\omega = 0$), она может лежать как ниже, так и выше кривой $k(\omega)$. В первом случае заведомо должно иметь место пересечение с переходом из I в П, т.е. излучаться в направлении θ свет с частотой, для которой имеет место условие (2.10). Кроме этой частоты в принципе возможно дополнительно еще четное число частот, определяемое равным числом переходов из I в П и П в I.

Во втором случае пересечений может вообще не быть, т.е. условие для возникновения эффекта Вавилова-Черенкова для данного θ не выполняется ни одной из частот. Если же пересечения имеются, то их два (в общем случае четное число), причем после каждого перехода из П в I больших θ происходит переход из I в П.

Порогом возникновения эффекта Вавилова-Черенкова или порогом появления новых дополнительных компонент излучения является очевидно касание прямой a кривой $k(\omega)$, т.е. (2.12) или что то же (1.7). Сложный эффект заведомо имеет место, если имеется компонента, для которой выполнено условие (2.11). В предельном случае, когда неравенство переходит в равенство (2.12), эти компоненты сливаются в двойную частоту.

Отметим, что на опыте обычно наблюдается как раз случай сложного эффекта Вавилова-Черенкова. Действительно эффект Вавилова-Черенкова практически всегда наблюдают в видимой или близкой ультрафиолетовой области спектра. Это область нормальной дисперсии, в которой $W(\omega) < \frac{c}{n}$, и так как согласно (I.I) для изучения Вавилова-Черенкова $\frac{c}{n} = v\cos\theta$, то, следовательно, для излучаемой частоты $W(\omega) < v\cos\theta$. Это значит , что в обычных условиях эффект Вавилова-Черенкова является сложным. Парные к наблюдаемым частотам лежат в ультрафиолетовой части спектра, в области аномальной дисперсии и не наблюдаются ввиду их сильного поглощения в радиаторе или на пути к регистрирующему свет устройству.

Таким образом, рассмотренные выше соотношения между величиной групповой скорости и скоростью движения являются общими для излучателя, равномерно движущегося в среде. При этом не следует забывать, что эти соотношения имеют смысл лишь в том случае, когда групповая скорость относится к частоте, удовлетворяющей соответствующему условию Допплера (I.2) - (I.3) или условию (I.I) для эффекта Вавилова-Черенкова.

Сказанное позволяет сделать некоторые выводы:

а) Если система, равномерно движущаяся в среде, излучает свет под углом θ к направлению своего движения и угол θ не является пороговым, то в спектре излучения всегда присутствует волна, для которой выполнено условие
$$\frac{v\cos\theta}{W(\omega)} < 1$$
где $v\cos\theta$ проекция скорости системы на направление излучения, а W групповая скорость света для излучаемой частоты.

б) Порогом для возникновения излучения или новых компонент излучения является условие
$$W(\omega_\theta) = v\cos\theta$$
причем W определяется группой волн, распространяющихся в интервале углов $\Delta\theta$, частота которых удовлетворяет одному из условий (2.I) - (2.3). При изменении θ или v в большую или меньшую стороны по сравнению с пороговым частота излучения распадается на несколько компонент. При этом, если какая-либо собственная частота колебаний ω_0' (в том числе и $\omega_0' = 0$) вызывает появление в направлении волны с частотой ω_0'' , для которой
$$\frac{v\cos\theta}{W(\omega_\theta'')} > 1$$
то состав излучения обязательно сложный, так как согласно в нем имеются компоненты или компонента, для которой
$$\frac{v\cos\theta}{W(\omega_\theta')} < 1$$
При этом, по крайней мере, одна из таких компонент расположена со стороны больших частот, так как за переходом прямой из П в I обязательно следует переход из I в П. Т.е. $\omega_\theta' > \omega_\theta''$.

§ 3. Интегральная запись условия Допплера

Выводы, полученные в предыдущем разделе, легко могут быть записаны в аналитическом виде. Однако, прежде чем это делать, обратимся к рассуждениям, с помощью которых получается формула Допплера. Ограничимся только случаем острых углов θ, т.е. $\cos\theta > 0$. Для пояснения сущности эффекта Допплера рассматривают волны, испущенные из последовательности точек, расстояние между которыми излучатель проходит за время одного колебания.

В случае обычного эффекта Допплера волна, испускаемая из каждой следующей из таких точек, должна отставать от предыдущей как раз на длину волны (в случае сверхсветового эффекта имеется не отставание, а опережение). На рис.3 представлена эта картина для обычного эффекта Допплера и острого угла θ. Построим конус с вершиной, совпадающей с мгновенным положением излучателя (точка a_n рис.3) и с образующими, перпендикулярными рассматриваемому направлению излучения. (Одна из двух образующих, лежащих в плоскости рисунка, $A_0 A_n$ показана на рис.3). Очевидно, что фаза всех волн на поверхности этого "волнового конуса" одинакова и совпадает с мгновенной фазой колебаний излучателя. Каждая из точек его поверхности движется вдоль луча со скоростью $v\cos\theta$. Например, длина $a_0 A_0$ равна $R(t) = vt\cos\theta$, а фаза колебания в точке A_0, $\omega_0 t$, если в точке a_0 излучатель находился в момент $t = 0$ и начальная фаза колебаний $\varphi = 0$. Отсюда следует, что для волны, излучаемой из a_0 с частотой ω'_θ, фаза в A_0 в момент t должна быть равна $\omega_0 t$, т.е.

$$\omega'_\theta\left(t - \frac{n}{c}R(t)\right) = \omega'_\theta t\left(1 - \frac{n}{c}v\cos\theta\right) = \pm\,\omega_0 t \tag{3.1}$$

Знак плюс или минус определяется тем, стоит ли слева в скобках положительная или отрицательная величина. Уравнение (3.I) действительно равносильно условию Допплера. Допустим теперь, что имеются две допплеровские частоты ω'_θ и ω''_θ. Тогда для каждой из них выполняется (3.I), т.е.

$$\omega'_\theta t\left(1 - \frac{n(\omega'_\theta)v\cos\theta}{c}\right) = \omega''_\theta t\left(1 - \frac{n(\omega''_\theta)v\cos\theta}{c}\right) \tag{3.2}$$

Здесь предполагается, что ω'_θ и ω''_θ одного типа, т.е. обычные или "сверхсветовые", в противном случае в одной из сторон равенства должен быть изменен знак на обратный. Смысл (3.2) очевидно состоит в том, что $v\cos\theta$ есть скорость, с которой распространяется одинаковая для обеих волн фаза. Очевидно, что это эквивалентно некоторой средней групповой скорости, тождественной с истинной групповой скоростью при сближении ω'_θ и ω''_θ. Действительно из (3.2) следует

$$\frac{1}{c}\,\frac{\omega'_\theta n(\omega'_\theta) - \omega''_\theta n(\omega''_\theta)}{\omega'_\theta - \omega''_\theta} = \frac{1}{v\cos\theta} \tag{3.3}$$

По определению, если интервал между ω'_θ и ω''_θ стремится к нулю, то слева стоит групповая скорость, т.е. в этом случае $W(\omega_\theta) = v\cos\theta$. Для конечного интервала $\omega'_\theta - \omega''_\theta$ формулу (3.3) очевидно можно записать так

$$\overline{\left(\frac{1}{W}\right)} = \frac{1}{\omega'_\theta - \omega''_\theta}\int_{\omega''_\theta}^{\omega'_\theta}\frac{1}{W(\omega)}\,d\omega = \frac{1}{v\cos\theta} \tag{3.4}$$

или

$$\int_{\omega''_\theta}^{\omega'_\theta}\left(\frac{v\cos\theta}{W(\omega)}-1\right)d\omega=0 \tag{3.5}$$

Таким образом, если излучается несколько частот одного типа, то средняя величина $\frac{1}{W}$ по интервалу между любой парой таких частот равна $\frac{1}{v\cos\theta}$. Отметим, что эти уравнения не содержат ω_0 и, следовательно, правильны как для эффекта Допплера, так и для излучения Вавилова-Черенкова. При этом скорость $v\cos\theta$ есть скорость, с которой движется вдоль луча образующая волнового конуса, роль которого особенно очевидна для излучения Вавилова-Черенкова.

Если известна одна из излучаемых частот, например, ω''_θ, то, считая ω'_θ в интегральном уравнении (3.4) или (3.5), переменной в принципе можно определить все остальные излучаемые частоты (данного типа).

Нетрудно также показать правильность утверждений, высказанных в конце § 2. Действительно допустим, что для $\omega=\omega''_\theta$ подинтегральная величина в (3.5) положительна, т.е. $\frac{v\cos\theta}{W(\omega)}>1$, Допустим, что при возрастании верхнего предела интегрирования интеграл впервые пройдет через нулевое значение при некотором $\omega=\omega'_\theta$ и станет отрицательным, т.е. в некотором интервале частот от $\omega'_\theta-\frac{\Delta\omega}{2}$ до $\omega'_\theta+\frac{\Delta\omega}{2}$ величина интеграла убывает. Отсюда следует, что подинтегральная величина должна быть около точки ω'_θ в среднем по $\Delta\omega$ отрицательной. Отсюда в сосгласии со сказанным $\frac{v\cos\theta}{W(\omega'_\theta)}<1$. При этом такое решение заведомо имеется, так как при достаточно больших ω величина

$$W(\omega)\longrightarrow c>v\cos\theta$$

Уравнения (3.4) или (3.5) имеют решения только при наличии нескольких частот излучения. Пользуясь (3.I) или (I.I) - (I.3), их легко обобщить на произвольный случай. Тогда получим

$$\int_0^{\omega_\theta}\left(\frac{1}{W(\omega)}-\frac{1}{v\cos\theta}\right)d\omega=\pm\frac{\omega_0}{v\cos\theta} \tag{3.6}$$

(Знак минус соответствует обычному эффекту Допплеру, знак плюс сверхсветовому и $\omega_0=0$ эффекту Вавилова-Черенкова). Это уравнение эквивалентно очевидно формулам (I.I)-(I.3) и (3.4) и (3.5) является их следствием.

Очевидно, что сделанное в начале этого раздела ограничение случаем $\cos\theta>0$ не существенно для уравнения (3.6). Единственное предположение, которое делается, состоит в том, что в рассматриваемом интервале частот величина $\frac{1}{W}$ имеет смысл и интегрирование по ней возможно. Та же оговорка необходима и для уравнений (3.4) и (3.5) и их применимости для $\cos\theta<0$. Этот случай равносилен допущению, что $W<0$ имеет физический смысл.

§ 4. О связи между скоростью излучателя и групповой скоростью света

На основании сказанного остается в значительной мере неясным, почему полученные соотношения связывают величину W именно с проекцией скорости излучателя на направление луча. Это можно пояснить следующим образом. Очевидно, что спектр излучаемых в направлении θ частот задается величиной ω_0 и произведением $v\cos\theta$. Мы получим тот же спектр частот при скорости $v' = v\cos\theta$ и том же ω_0. (Собственная частота системы при этом должна быть изменена, так как $\omega_0 = \omega_0'\sqrt{1-\beta^2}$). Он будет соответствовать излучению вперед, если $v' > 0$, т.е. $\cos\theta > 0$ или назад, если $v' < 0$, т.е. $\cos\theta$ отрицателен. Если отбросить случай, когда угол θ был граничным для возникновения излучения, то из того, что всегда имеется компонента, удовлетворяющая (2.10), получим, что в спектре излучения должна быть частота, для которой

$$\frac{v'}{W(\omega')} < 1 \tag{4.1}$$

Пусть v' положительно. Это значит, что вперед должен излучаться свет с частотой, для которой групповая скорость больше, чем скорость движения. Таким образом, при излучении вперед излучаемая энергия обязательно опережает движение источника. Это можно иллюстрировать с помощью рис.4. Пусть система, движущаяся со скоростью v, проходит за одну секунду путь AB. Положение группы волн может быть найдено, если отложить в направлении θ величину W. Тогда BD является образующей конуса группы. Он определяет мгновенное положение группы волн, распространяющихся в направлении θ. Свет, испущенный на пути от A до B, достигает соответственно точек конуса между D и B. Допустим теперь, что скорость убывает, а ω_0 остается постоянной (см. правую часть рис.4). Величина W при этом постоянна, так как ω не меняется и конус группы сжимается к направлению v'. При этом свет, испущенный из A', достигнет точки D', обогнав излучатель на расстояние BD', тем большее, чем раньше он испущен (чем больше $A'B'$).

Рассмотрим второй случай, а именно, когда v' отрицательно. Условие (4.1) выполнено при этом для любого $W > 0$. Таким образом, на величину групповой скорости света, излучаемого назад, не накладывается никаких ограничений.

Следствия из неравенства (4.1) можно распространить и на случай отрицательной групповой скорости. Этот случай заслуживает специального рассмотрения и поэтому здесь о нем будет сказано лишь вкратце[x)]. При отрицательной групповой скорости направления фазовой и групповой скорости противоположны. Если имеет место излучение, т.е. происходит унос энергии, то групповая скорость должна быть направлена вдоль луча от излучателя, а, следовательно, фазовая скорость должна быть направлена к излучателю. На рис.5 представлена картина, получающаяся при $W < 0$ для острого угла θ (по-прежнему, угол θ есть угол между направлением фазовой скорости u и скоростью излучателя v). Из рис.5-а видно, что излучаемая энергия уходит в этом случае под тупым углом $(\pi - \theta)$ к направлению скорости. На рис.5-б представлен случай $\theta = \theta_1 > \frac{\pi}{2}$. В этом случае энергия очевидно уносится под острым углом $(\pi - \theta_1)$ к направлению движения.

Обратимся теперь к следствиям из неравенства (4.1) при отрицательном W. Углу $\theta < \frac{\pi}{2}$ соответствует положительное v'. Неравенство (4.1) будет при этом выполнено для любого отрицательного W. В этом случае энергия уносится, как мы видели, назад и на скорость ее уноса,

---

x) Некоторые особенности, связанные с отрицательной групповой скоростью для эффекта Вавилова-Черенкова в кристаллах, обсуждаются в диссертации В.Е.Пафомова.

по-прежнему, не накладывается никаких условий.

Величина w может быть отрицательна и при $v' < 0$, соответствующему $\theta_1 > \frac{\pi}{2}$. В этом случае условие (4.I) выполнено, только если w по абсолютной величине больше v'. Так как энергия уносится при этом вперед, то это значит, что и здесь осуществляется случай, когда скорость распространения энергии опережает скорость излучателя.

В проведенном рассмотрении мы переходили от излучения под углом θ к направлению скорости к излучению той же частоты, направленному вперед, т.е. к $\theta = 0$. Очевидно возможен и обратный переход. Если бы для излучения, направленного вперед, отсутствовали компоненты, обгоняющие излучатель, то для того же ω_0 и $v\cos\theta = v'$ мы получили бы, что отсутствует компонента, удовлетворяющая (2.I0), что, как мы видели, невозможно.

Сложные эффекты излучения сопровождаются появлением компонент или компоненты, удовлетворяющих (2.II). Наряду с такой аномальной компонентной обязательно имеется нормальная, удовлетворяющая (2.I0) и притом имеющая большую частоту. Таким образом нормальная компонента, обгоняющая излучатель, несет в единичном интервале частоты большую энергию, чем аномальная.

Соотношения между величиной $v\cos\theta$ и групповой скоростью является непосредственным следствием того, что излучатель не может полностью обгонять световой сигнал, излучаемый им в направлении своего движения.

Условие (2.I2), соответствующее порогу появления или исчезновения частот, означает для $\theta' = 0$, что группа волн движется с той же скоростью, как и излучатель. Очевидно, что в этом случае излучение отсутствует и происходит просто перенос поля вместе с излучателем. То, что этот случай является пороговым при $\theta' = 0$, почти очевиден.

В проведенном рассмотрении не было наложено каких-либо условий на величину ω_0 и соответствующую ей начальну фазу колебаний. Таким образом спектр ω_0 произволен и, следовательно, все сказанное здесь о роли групповой скорости правильно и для любого равномерно движущегося в преломляющей среде источника света.

Литература

I. И.М.Франк, Известия АН СССР (серия физическая).

2. Л.И.Мандельштам, Собрание сочинений, т.5, стр.456.

3. В.Л.Гинзбург и И.М.Франк, ДАН, 56, 583, I947.

Работа поступила в издательский отдел 19 августа 1958 г.

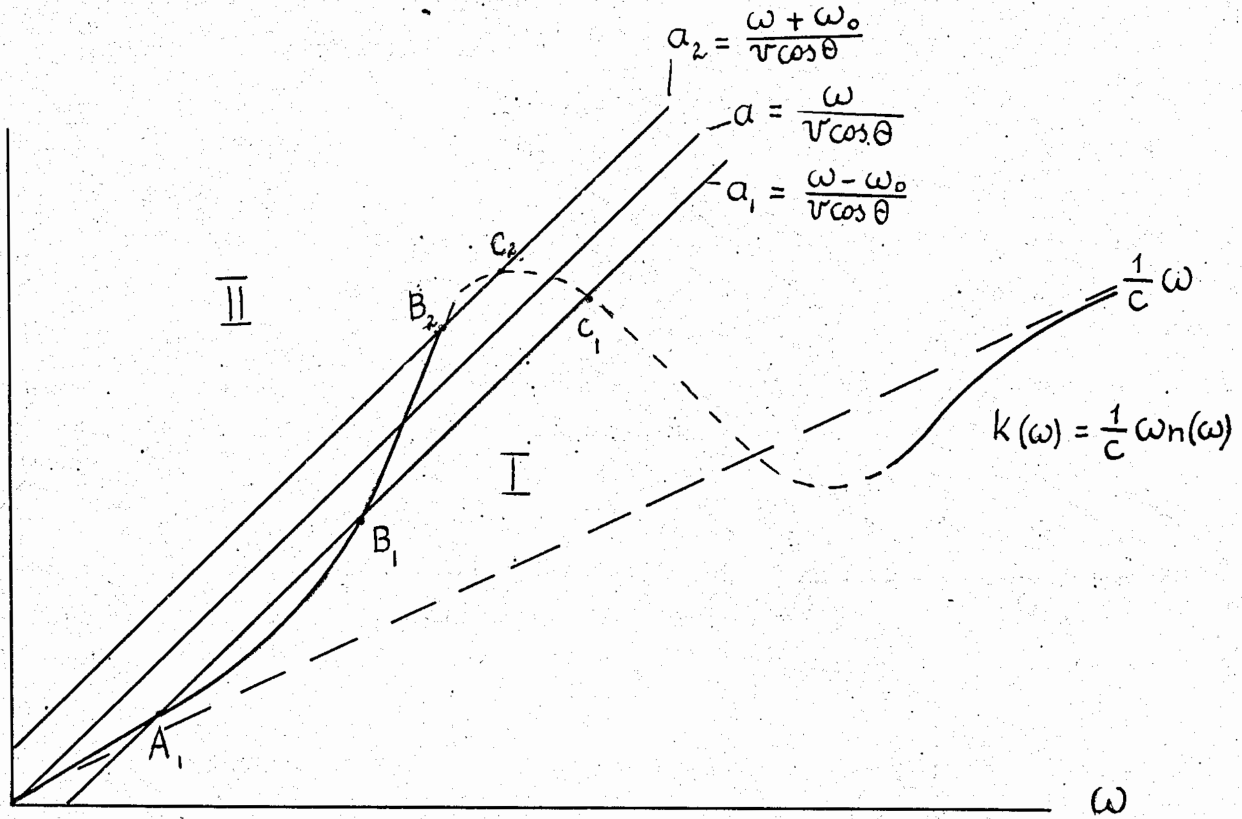

$a_2 = \frac{\omega + \omega_0}{v\cos\theta}$
$a = \frac{\omega}{v\cos\theta}$
$a_1 = \frac{\omega - \omega_0}{v\cos\theta}$
C_2
B_2
C_1
B_1
A_1
II
I
$\frac{1}{c}\omega$
$k(\omega) = \frac{1}{c}\omega n(\omega)$
ω

Рис. 1.

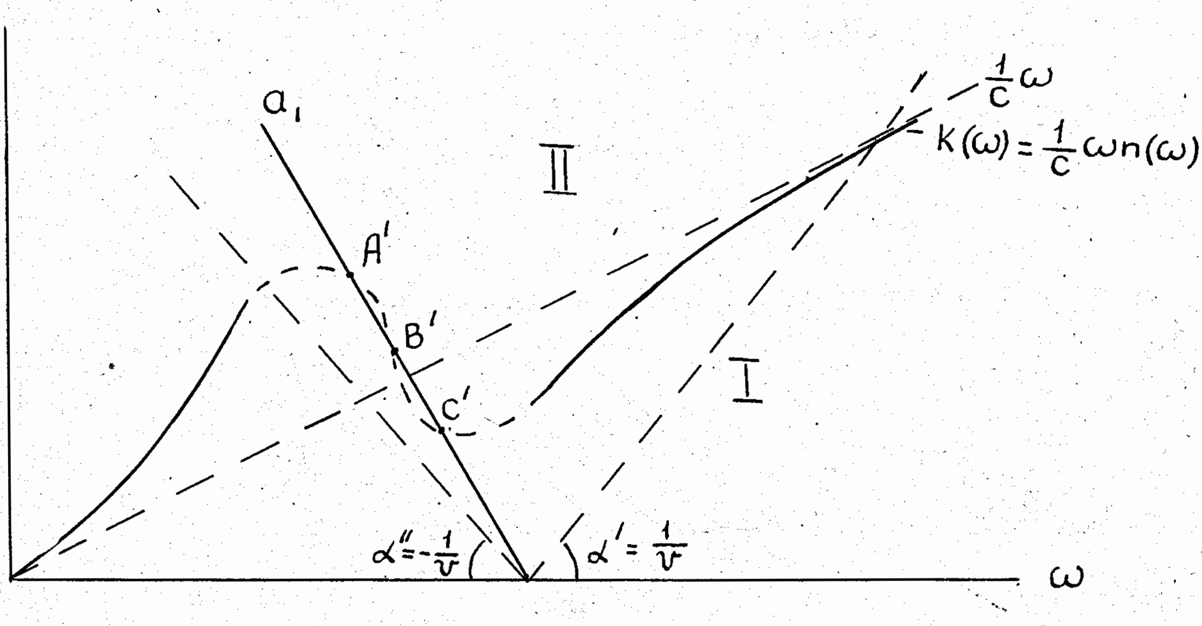

a_1
II
I
A'
B'
C'
$\frac{1}{c}\omega$
$k(\omega) = \frac{1}{c}\omega n(\omega)$
$\alpha'' = -\frac{1}{v}$
$\alpha' = \frac{1}{v}$
ω

Рис. 2.

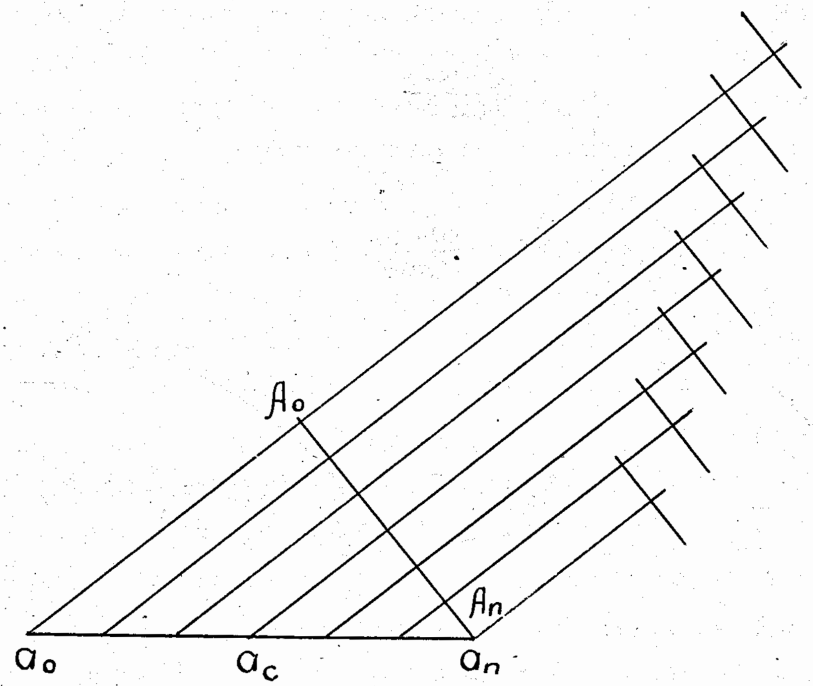


Рис. 3.

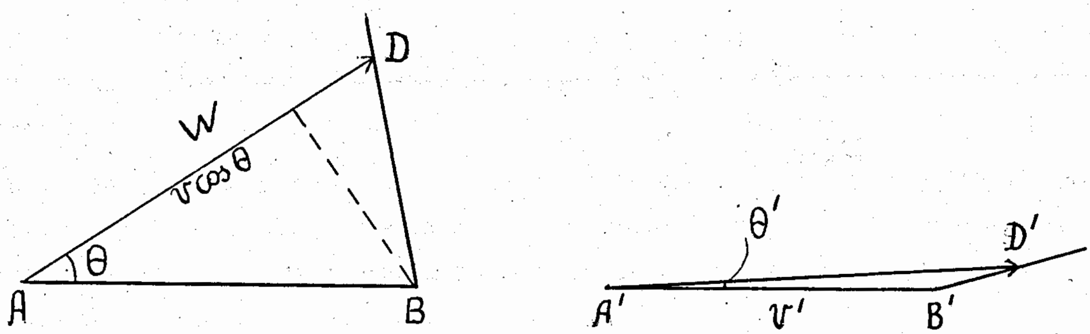
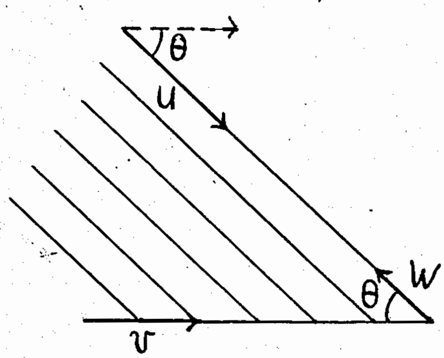
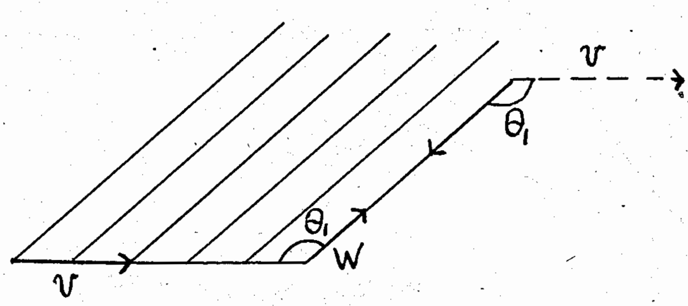


Рис. 4.



5а



5б