ЯФ, 1966, т.4, №6, с.1214-1222.

27/X-65

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ
Дубна

Р-2342

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

А.В. Николов, И.Т. Тодоров, Д.Г. Факиров

МАССОВЫЕ ФОРМУЛЫ В $SU(12) \supset Sp(6) \times SU(2)$-СИММЕТРИИ

1965

P - 2342

А.В. Николов, И.Т. Тодоров, Д.Г. Факиров

МАССОВЫЕ ФОРМУЛЫ В $SU(12) \supset Sp(6) \times SU(2)$-СИММЕТРИИ

Направлено в ЯФ

§ 1. Введение

Симплектическая симметрия элементарных частиц $Sp(6)$ была введена в [1,2] для того, чтобы не иметь дело с частицами с дробными зарядами (как, например, кварки в схеме $SU(3)$). Это достигается добавлением нового члена, пропорционального "суперзаряду" D, в формуле Гелл-Мана – Нишиджимы:

$$Q = I_3 + \tfrac{1}{2}Y + 1/3\,D \ . \tag{1.1}$$

Суперзаряд принимает лишь целочисленные значения и выражается через барионное число B и через Z –один из генераторов группы $Sp(6)$ (который диагонален для сильновзаимодействующих частиц вместе с I_3 и Y)[1,2] – следующим образом:

$$D = \frac{3}{2}(B - Z) \ . \tag{1.2}$$

Модель[1,2] строится так, чтобы не только электрический заряд Q, но и барионное число B, являющееся внегрупповой характеристикой частиц, принимало лишь целые значения.

Все хорошо изученные до сих пор "обычные" частицы и резонансы имеют суперзаряд $D = 0$ (т.е. $Z = B$). Для них странность равна

$$S = Y - Z \ . \tag{1.3}$$

Как отмечалось в[1], именно эту величину целесообразно отождествить со странностью и в случае суперзаряженных частиц. Действительно, с помощью (1.2) и (1.3) равенство (1.1) может быть переписано в форме, тождественной с классической формулой Гелл-Мана – Нишиджимы:

$$Q = I_3 + \frac{B + S}{2} \ ; \tag{1.4}$$

следовательно, число S должно сохраняться в силу законов сохранения I_3, Q и B при всех сильных и электромагнитных взаимодействиях. Наоборот, Y и Z в отдельности могут не сохраняться (например, при электромагнитных взаимодействиях), а это означало бы, что суперзаряженные частицы могут распадаться (в электромагнитных процессах) на обычные частицы.

Как известно, в течение последнего года большой успех выпал на долю теории группы $SU(6)$, рассматриваемой как объединение группы внутренних симметрий $SU(3)$ со спиновой группой $SU(2)$. Возникает вопрос: что соответствует группе $SU(6)$ в случае, когда внутренняя симметрия описывается симплектической группой, и сохраняются ли при этом известные результаты, полученные в рамках $SU(6)$ -симметрии ? Ответ на этот вопрос был дан в работе /3/, где было предложено объединение группы $Sp(6)$ с группой спина $SU(2)$ в рамках симметрии $SU(12)$ (и на этой основе были получены известные соотношения между магнитными моментами барионов). При этом использовался метод тензорного умножения алгебр /4/, в котором на промежуточном этапе группа внутренних симметрий $Sp(6)$ дополняется до $SU(6)$, выступающей затем как более широкая группа чисто внутренних симметрий (не затрагивающая спина).

Другой подход к этой проблеме содержится в недавней работе /5/. В ней в качестве группы, объединяющей спиновую и симплектическую симметрию, принимается группа $SO(12)$, сохраняющая квадратичную форму волновых функций трионов x/

$$\sum_{i,k=1}^{2} \epsilon_{ij} \sum_{\alpha=1}^{3} (t_{i\alpha} t_{j(-\alpha)} + t_{j(-\alpha)} t_{i\alpha}). \tag{1.5}$$

Так как $SO(12)$ является подгруппой $SU(12)$, то исследование нарушенной $SU(12)$-симметрии включает в себя исследование (нарушенной) $SO(12)$ -симметрии. В частности, присоединенное представление $\underline{143}$ группы $SU(12)$, к которому относятся мезоны со спином 0 и 1, распадается на два неприводимых представления относительно $SO(12)$:

$$\underline{143} = \underline{66} + \underline{77} . \tag{1.6}$$

Из содержания этих мультиплетов по $Sp(6) \times SU(2)$ /5/,

$$\underline{66} = (\underline{21},\underline{1}) + (\underline{14},\underline{3}) + (\underline{1},\underline{3}),$$
$$\underline{77} = (\underline{21},\underline{3}) + (\underline{14},\underline{1}), \tag{1.7}$$

следует, что известные псевдоскалярные и векторные мезоны принадлежат представлению $\underline{77}$, а не присоединенному представлению $\underline{66}$ группы $SO(12)$.

Настоящая работа посвящена главным образом получению массовых формул в схеме $SU(12)$. Члены, нарушающие $SU(12)$ - симметрию в массовом операторе, вы-

x/ Напомним, что трионами называются частицы, преобразующиеся по низшему нетривиальному (шестирядному) представлению группы $Sp(6)$ /1-3/.

бираются из самосопряженных представлений $\underline{1}$, $\underline{143}$, $\underline{4212}$ и $\underline{5940}$, входящих в разложение прямого произведения $\underline{143} \times \underline{143}$ на неприводимые представления:

$$\underline{143} \times \underline{143} = \underline{1} + 2 . \underline{143} + \underline{4212} + \underline{5005} + \underline{5005}^* + \underline{5940}. \tag{1.8}$$

В § 3 выписан по аналогии со схемой $SU(6)$ /6-8/ массовый оператор, квадратичный по генераторам группы и инвариантный относительно подгрупп спина $\vec{J}$, изоспина $\vec{I}$, странности S и гиперзаряда Y (а, следовательно, и относительно Z x/). Из этого массового оператора получаются (§ 4) известные из $SU(6)$ -теории массовые формулы для 56-плета обычных барионов, входящих в представление $\underline{364}$ группы $SU(12)$. Аналогичные формулы имеют место для 56-плета "зеркальных" барионов, получающихся из обычных изменением знака у Y и Z. Массовый оператор в мезонном представлении зависит от девяти независимых постоянных. Физические частицы в представлении $\underline{143}$ определяются (§5) как собственные функции не только операторов $\vec{J}^2$, $\vec{I}^2$, I_3, S, Y, но еще и квадратичных операторов Казимира группы $Sp(6)$ и некоторых групп $U(4)$ и $U(8)$, естественно возникающих в нарушенной $SU(12)$-симметрии. Это приводит, в частности, к правильному смешиванию для физических ϕ- и ω -мезонов. Затем постулируется, что массовый оператор диагонален по частицам, что соответствует поискам лишь линейных соотношений между квадратами масс мезонов. Тогда 4 из 9 констант, входящих в массовый оператор, обращаются в нуль и возникает ряд согласующихся с опытом соотношений между массами обычных мезонов, а также серия равенств между массами обычных и суперзаряженных мезонов.

§ 2. Некоторые определения и обозначения

Всюду в настоящей работе греческие ("спиновые") индексы принимают значения 1,2, а латинские ("симплектические" или "унитарные") индексы пробегают, вообще говоря, множество значений Δ_n, которое содержит произвольные n среди чисел 1, ...6, $1 \le n \le 6$. Пусть $A^{\alpha a}_{\beta b}$ - неэрмитовы генераторы Вейля группы $SU(12)$, которые в низшем нетривиальном представлении имеют следующие матричные элементы.

$$(A^{\alpha a}_{\beta b})^{\lambda \ell}_{\mu m} = \delta^{\alpha a}_{\mu m} \delta^{\lambda \ell}_{\beta b} - \frac{1}{12} \delta^{\alpha a}_{\beta b} \delta^{\lambda \ell}_{\mu m} . \tag{2.1}$$

Тогда операторы xx/

x/ Таким образом, мы выводим массовые формулы при предположении, что Y и Z сохраняются по отдельности в средне-сильных взаимодействиях.

xx/ Мы опускаем часто используемый нижний индекс 2 этих операторов, указывающий их порядок, так как нигде не будем пользоваться операторами Казимира более высокого порядка.

$$C^{(2n)}(\Delta_n) = \sum_{a,b\in\Delta_n} A^{\alpha a}_{\beta b} A^{\beta b}_{\alpha a} \,,$$

$$K^{(n)}(\Delta_n) = \sum_{a,b\in\Delta_n} A^{\alpha a}_{\alpha b} A^{\beta b}_{\beta a} \tag{2.2}$$

(по повторному греческому индексу здесь и в дальнейшем подразумевается суммирование от 1 до 2) являются при $n<6$ операторами Казимира подгрупп $U(2n)$ и $U(n)$ (соответственно) группы $SU(12)$, зависящих от Δ_n. При $n=6$ выражения (2.2) определяют операторы Казимира $C^{(12)} \equiv C^{(12)}(\Delta_6)$ и $K^{(6)} \equiv K^{(6)}(\Delta_6)$ групп $SU(12)$ и $SU(6)$.

Группа внутренних симметрий $SU(6)$, которая получается расширением (§ 1) группы $Sp(6)$, содержит пять коммутирующих генераторов. Наряду с I_3, Y и Z в эту пятерку входят два новых оператора, которые ниже обозначены через K_3 и X:

$$\begin{aligned}
I_3 &= \tfrac12 (A^{\alpha 1}_{\alpha 1} - A^{\alpha 2}_{\alpha 2} - A^{\alpha 4}_{\alpha 4} + A^{\alpha 5}_{\alpha 5}),\\
K_3 &= \tfrac12 (A^{\alpha 1}_{\alpha 1} - A^{\alpha 2}_{\alpha 2} + A^{\alpha 4}_{\alpha 4} - A^{\alpha 5}_{\alpha 5}),\\
X &= A^{\alpha 3}_{\alpha 3} + A^{\alpha 6}_{\alpha 6},\\
Y &= -\tfrac{2}{3}(A^{\alpha 1}_{\alpha 1} + A^{\alpha 2}_{\alpha 2} + A^{\alpha 3}_{\alpha 3}) - (A^{\alpha 3}_{\alpha 3} - A^{\alpha 6}_{\alpha 6}),\\
Z &= \tfrac{2}{3}(A^{\alpha 1}_{\alpha 1} + A^{\alpha 2}_{\alpha 2} + A^{\alpha 3}_{\alpha 3}).
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Принимая во внимание (2.2), (2.3) и соотношения

$$I_+ = A^{\alpha 1}_{\alpha 2} - A^{\alpha 5}_{\alpha 4}\,, \qquad I_- = A^{\alpha 2}_{\alpha 1} - A^{\alpha 4}_{\alpha 5}\,, \tag{2.4}$$

находим следующее выражение для квадрата изоспина:

$$\vec{I}^{\,2} = \tfrac12 [K^{(2)}(1,2) + K^{(2)}(4,5)] - \tfrac14 (Y+2Z)^2 - \tfrac12 \sum_{a,b=1}^{2} \{A^{\alpha a}_{\alpha b}, A^{\beta(a+3)}_{\beta(b+3)}\} \tag{2.5}$$

(скобки { } здесь и в дальнейшем обозначают антикоммутатор). Аналогичным образом можно записать оператор Казимира группы $Sp(6)$:

$$K^{(Sp)} = K^{(6)} - \sum_{a,b=1}^{3} \{A^{\alpha a}_{\alpha b}, A^{\beta(a+3)}_{\beta(b+3)}\} + \sum_{a,b=1}^{3} \{A^{\alpha a}_{\alpha(b+3)}, A^{\beta(a+3)}_{\beta b}\}\,. \tag{2.6}$$

Нам понадобятся также спиноподобные векторные операторы $\vec{J}^{\,a}$, определяемые равенствами

$$J^a_+ = A^{1a}_{2a}\,, \quad J^a_- = A^{2a}_{1a}\,, \quad J^a_3 = \tfrac12 (A^{1a}_{1a} - A^{2a}_{2a})\,. \tag{2.7}$$

Из определения следует, что

$$\vec{J}^{\,a}\vec{J}^{\,b} = \tfrac12 (J^a_+ J^b_- + J^a_- J^b_+) + J^a_3 J^b_3 = \tfrac12 A^{\alpha a}_{\beta a} A^{\beta b}_{\alpha b} - \tfrac14 A^{\alpha a}_{\alpha a} A^{\beta b}_{\beta b} \tag{2.8}$$

и что оператор спина $\vec{J}$ задается формулой

$$\vec{J} = \sum_{a=1}^{6} \vec{J}^{\,a}\,. \tag{2.9}$$

С помощью (2.8) и (2.9) находим

$$\vec{J}^{\,2} = \tfrac12 \sum_{a,b=1}^{6} A^{\alpha a}_{\beta a} A^{\beta b}_{\alpha b}\,. \tag{2.10}$$

Отметим, что $\vec{I}^{\,2}$ и $\vec{J}^{\,2}$ являются операторами Казимира групп $SU(2)_I$ и $SU(2)_J$, а операторы Y и Z часто рассматриваются как генераторы однопараметрических групп $U(1)_Y$ и $U(1)_Z$ (ср.[7,8]). Кроме того, согласно (2.8), $(\vec{J}^{\,a})^2$ выражаются посредством операторов $C^{(2)}(a)$ из (2.2) и генераторов (2.3).

Введем еще векторные операторы

$$\begin{aligned}
\vec{U} &\equiv \vec{J}^{\,1} + \vec{J}^{\,2} - \vec{J}^{\,4} - \vec{J}^{\,5} = (Y+2Z)\vec{J}\,,\\
\vec{V} &\equiv \vec{J}^{\,3} - \vec{J}^{\,6} = (Z-Y)\vec{J}\,,\\
\vec{W} &\equiv \vec{J}^{\,3} + \vec{J}^{\,6} - \tfrac{1}{3}\vec{J} = X\vec{J}
\end{aligned} \tag{2.11}$$

(последнее равенство в каждой цепочке справедливо лишь в шестирядном представлении). Заметим, что вектор $\vec{W}$ может быть представлен в виде $\vec{W} = \vec{S} - \tfrac13 \vec{J}$, где $\vec{S} = \vec{J}^{\,3} + \vec{J}^{\,6}$. В шестирядном представлении $\vec{S} = |S|\,\vec{J}$, так что $\vec{S}$ является аналогом "странного спина" (его можно было бы назвать спином странных трионов — ср.[7,8]). Генераторы S_i порождают некоторую подгруппу $SU(2)_S$ группы $SU(12)$. Оператор Казимира $\vec{S}^{\,2}$ этой подгруппы не коммутирует с оператором $K^{(Sp)}$, которым мы пользуемся при определении физических частиц (см. § 5).

§ 3. Массовый оператор

Пусть $T^{\alpha_1 a_1 \dots \alpha_p a_p}_{\beta_1 b_1 \dots \beta_q b_q}$ – произвольный смешанный тензор, преобразующийся по определенному представлению группы SU(12). Можно показать, что линейная комбинация

$$\sum_{(\alpha a)(\beta b)} K^{\alpha_1 a_1 \dots \alpha_p a_p}_{\beta_1 b_1 \dots \beta_q b_q} \; T^{\alpha_1 a_1 \dots \alpha_p a_p}_{\beta_1 b_1 \dots \beta_q b_q} \tag{3.1}$$

($K^{\alpha_1 a_1 \dots \alpha_p a_p}_{\beta_1 b_1 \dots \beta_q b_q}$ – заданные вещественные коэффициенты) инвариантна одновременно относительно $SU(2)_J$, $SU(2)_I$, $U(1)_Y$, $U(1)_Z$ тогда и только тогда, когда $K^{\alpha_1 a_1 \dots \alpha_p a_p}_{\beta_1 b_1 \dots \beta_q b_q}$ является собственным "вектором" операторов $\vec{J}^2$, $\vec{I}^2$, Y, Z, который соответствует собственным значениям, равным нулю.

Обозначим через $M^{(m)}_{(n)}$ линейную комбинацию типа (3.1), составленную из компонент неприводимого тензорного оператора размерности n по SU(12) и размерности m по $SU(6) \subset SU(12)$, инвариантную одновременно относительно $SU(2)_J$, $SU(2)_I$, $U(1)_Y$, $U(1)_Z$ [x]. По аналогии со схемой SU(6) /7,8/ мы постулируем, что массовый оператор M складывается из следующих комбинаций $M^{(m)}_{(n)}$:

$$M = M^{(1)}_{(1)} + M^{(35)}_{(143)} + M^{(1)}_{(4212)} + M^{(35)}_{(4212)} + M^{(1)}_{(5940)} + M^{(35)}_{(5940)}. \tag{3.2}$$

Представления <u>143</u>, <u>4212</u> и <u>5940</u> выступают здесь на месте представлений <u>35</u>, <u>189</u> и <u>405</u> в схеме SU(6) /7,8/, в то время как верхний значок (35) соответствует значку (8) в этой схеме. В силу теоремы Вигнера-Экарта матричные элементы тензорных операторов между состояниями, принадлежащими одному и тому же неприводимому представлению группы SU(12), выражаются посредством матричных элементов от полиномов от генераторов $A^{\alpha a}_{\beta b}$ этого представления (ср. /6-9/). Ограничиваясь вкладом членов степени не выше второй по $A^{\alpha a}_{\beta b}$, имеем (скобки [ ] и ( ) обозначают соответственно антисимметризацию и симметризацию по двум парным индексам, заключенным в них):

<u>143</u>:

$$T^{\alpha a}_{\beta b} = k_1 A^{\alpha a}_{\beta b} + k_2 \left(A^{\alpha a}_{\lambda \ell} A^{\lambda \ell}_{\beta b} - \frac{1}{12} \delta^{\alpha a}_{\beta b} A^{\mu m}_{\lambda \ell} A^{\lambda \ell}_{\mu m} \right),$$

[x] Для $M^{(m)}_{(n)}$, входящих в (3.2), из требования инвариантности относительно $U(1)_Y$ уже вытекает инвариантность относительно $U(1)_Z$, так что в рассматриваемом случае можно ограничиться требованием инвариантности лишь относительно $SU(2)_J$, $SU(2)_I$, $U(1)_Y$.

<u>4212</u>:

$$T^{\alpha a, \gamma c}_{(-)\beta b, \delta d} = k_- \Big(A^{[\alpha a}_{[\beta b} A^{\gamma c]}_{\delta d]} - \frac{6}{5} \delta^{[\alpha a}_{[\beta b} A^{\gamma c]}_{\delta d]} + \frac{1}{5} \delta^{[\alpha a}_{[\beta b} A^{\mu m}_{\delta d]} A^{\gamma c]}_{\mu m} -$$

$$- \frac{1}{110} \delta^{[\alpha a}_{[\beta b} \delta^{\gamma c]}_{\delta d]} A^{\mu m}_{\lambda \ell} A^{\lambda \ell}_{\mu m} \Big),$$

<u>5940</u>:

$$T^{\alpha a, \gamma c}_{(+)\beta b, \delta d} = k_+ \Big(A^{(\alpha a}_{(\beta b} A^{\gamma c)}_{\delta d)} + \frac{6}{7} \delta^{(\alpha a}_{(\beta b} A^{\gamma c)}_{\delta d)} - \frac{1}{7} \delta^{(\alpha a}_{(\beta b} A^{\mu m}_{\delta d)} A^{\gamma c)}_{\mu m} +$$

$$+ \frac{1}{182} \delta^{(\alpha a}_{(\beta b} \delta^{\gamma c)}_{\delta d)} A^{\mu m}_{\lambda \ell} A^{\lambda \ell}_{\mu m} \Big),$$

где коэффициенты $k_{1,2}$ и $k_\pm$ –постоянные, зависящие лишь от операторов Казимира группы SU(12); здесь уже подразумевается суммирование не только по повторному греческому индексу (от 1 до 2), но и по повторному латинскому индексу (от 1 до 6). Пользуясь этими соотношениями и указанным в начале этого параграфа критерием инвариантности, находим следующие выражения для отдельных членов в массовом операторе:

$$\begin{aligned} M^{(35)}_{(143)} &= a[M_U + k(Y + 2Z)] + b[M_V + k(Z - Y)] + c(M_W + kX), \\ M^{(1)}_{(\pm)} &= \alpha_\pm C^{(12)} + \beta_\pm (K^{(6)} \pm 2\vec{J}^2), \\ M^{(35)}_{(\pm)} &= a_\pm (N_U - \kappa_\pm M_U \pm 2\{\vec{J}, \vec{U}\}) + b_\pm (N_V - \kappa_\pm M_V \pm 2\{\vec{J}, \vec{V}\}) + \\ &+ c_\pm (N_W - \kappa_\pm M_W \pm 2\{\vec{J}, \vec{W}\}), \end{aligned} \tag{3.3}$$

где

$$M^{(m)}_{(+)} = M^{(m)}_{(5940)}, \; M^{(m)}_{(-)} = M^{(m)}_{(4212)}; \quad \kappa_+ = \frac{5}{7}, \; \kappa_- = \frac{1}{5},$$

$$\{\vec{J}, \vec{P}\} \equiv \vec{J}\vec{P} + \vec{P}\vec{J} = \sum_{i=1}^{3} \{J_i, P_i\}, \quad P = U, V, W$$

и, кроме того,

$$M_U = C^{(6)}(1,2,3) - C^{(6)}(4,5,6) + C^{(6)}(1,2,6) - C^{(6)}(3,4,5),$$

$$M_V = C^{(6)}(1,2,3) - C^{(6)}(4,5,6) - C^{(6)}(1,2,6) + C^{(6)}(3,4,5),$$

$$M_W = \frac{1}{3} C^{(12)} - C^{(6)}(1,2,4,5) + C^{(4)}(3,6),$$

$$N_U = K^{(3)}(1,2,3) - K^{(3)}(4,5,6) + K^{(3)}(1,2,6) - K^{(3)}(3,4,5),$$

$$N_V = K^{(3)}(1,2,3) - K^{(3)}(4,5,6) - K^{(3)}(1,2,6) + K^{(3)}(3,4,5),$$

$$N_W = \frac{1}{3}K^{(6)} - K^{(4)}(1,2,4,5) + K^{(2)}(3,6) \qquad (3.4)$$

(a , b , c , k , $a_\pm, \beta_\pm, a_\pm, b_\pm, c_\pm$ – постоянные, зависящие лишь от операторов Казимира группы $SU(12)$) . Полный массовый оператор M получается подстановкой (3.3) и (3.4) в (3.2). Мы увидим, что в важнейших частных случаях барионов из 364-плета и мезонов из 143-плета выражение для массового оператора сильно упрощается и из него получаются эффективные массовые формулы.

Отметим, что в массовых формулах в схеме $SU(6)$ также можно пользоваться операторами Казимира подгрупп $U(n)$ вместо $SU(n)$ ($n = 2,4$), как это обычно делается /7,8/; так, например,

$$2S(S+1) - C_2^{(4)} = C^{(2)}(3) - C^{(4)}(1,2), \qquad (3.5)$$

где $S(S+1) \equiv \vec{S}^2$ и $C_2^{(4)}$–операторы, используемые в /7,8/, а $C^{(2n)}(\Delta)$, $1 \le n \le 3$, определяются формулой (2.2), в которой $A^{\alpha a}_{\beta b}$ уже являются генераторами $SU(6) \supset SU(3) \times SU(2)_J$. Кроме того, имеем

$$\{\vec{J}, \vec{P}\} = \vec{J}^2 + \vec{P}^2 - (\vec{J} - \vec{P})^2, \quad P = U, V, W, \qquad (3.6)$$

так что аналогия со схемой $SU(6)$ является полной.

§ 4. Барионное представление

Элементарные частицы могут рассматриваться как "составленные" из трионов двух типов: $\psi^{\alpha a}$ и $\psi^{\overline{\alpha a}}$. Эти трионы отличаются лишь знаком барионного заряда; все их квантовые числа, содержащиеся в рассматриваемой здесь групповой схеме, совпадают (как уже отмечалось, барионный заряд не входит в эту схему). Барионы описываются тензором $\psi^{\overline{\alpha a}, \beta b, \gamma c}$, симметричным по трем парным индексам, т.е. они проебразуются по представлению <u>364</u> . В этом представлении справедливы следующие тождества:

$$M_U = 15(Y + 2Z),$$

$$M_V = 15(Z - Y),$$

$$M_W = 15X,$$

$$C^{(12)} = \frac{165}{8},$$

$$K^{(6)} = 2\vec{J}^2 + 15,$$

$$2\{\vec{J}, \vec{U}\} = N_U - 3(Y + 2Z),$$

$$2\{\vec{J}, \vec{V}\} = N_V - 3(Z - Y), \qquad (4.1)$$

$$2\{\vec{J}, \vec{W}\} = N_W - 3X.$$

Подставляя (4.1) в (3.3), а затем полученный таким образом результат – в (3.2), приходим к следующему выражению для массового оператора в барионном представлении:

$$M = A + BX + CY + DZ + EN_U + FN_V + GN_W + H\vec{J}^2, \qquad (4.2)$$

где A , ..., H – новые постоянные (являющиеся линейными комбинациями старых).

Оказывается, что можно получить соотношения, в которых участвуют только массы обычных барионов (с $Z = B = 1$). Их волновые функции имеют следующий вид:

$$\Lambda^0 = \psi^{\bar{1}1,13,22} + \psi^{11,1\bar{3},22} + \psi^{11,13,2\bar{2}} - \psi^{1\bar{2},13,21} - \psi^{12,1\bar{3},21} - \psi^{12,13,2\bar{1}},$$

$$\Sigma^0 = \frac{1}{\sqrt{3}}\Big(2\psi^{\bar{1}1,12,23} + 2\psi^{11,1\bar{2},23} + 2\psi^{11,12,2\bar{3}} -$$

$$- \psi^{1\bar{1},13,22} - \psi^{11,1\bar{3},22} - \psi^{11,13,2\bar{2}} - \psi^{1\bar{2},13,21} - \psi^{12,1\bar{3},21} - \psi^{12,13,2\bar{1}}\Big), \qquad (4.3)$$

$$\Sigma^+ = \sqrt{\frac{2}{3}}\Big(2\psi^{1\bar{1},11,23} + \psi^{1\bar{1},11,2\bar{3}} - \psi^{\bar{1}1,13,21} - \psi^{11,1\bar{3},21} - \psi^{11,13,2\bar{1}}\Big),$$

$$\Sigma^- = \sqrt{\frac{2}{3}}\,(2\psi^{1\bar{2},12,23} + \psi^{12,2,2\bar{3}} - \psi^{1\bar{2},13,22} - \psi^{12,1\bar{3},22} - \psi^{12,13,2\bar{2}}),$$

$$\Xi^0 = \sqrt{\frac{2}{3}}\,(2\psi^{1\bar{3},13,21} + \psi^{13,13,2\bar{1}} - \psi^{1\bar{1},13,23} - \psi^{11,1\bar{3},23} - \psi^{11,13,2\bar{3}}),$$

$$\Xi^- = \sqrt{\frac{2}{3}}\,(2\psi^{1\bar{3},13,22} + \psi^{13,13,2\bar{2}} - \psi^{1\bar{2},13,23} - \psi^{12,1\bar{3},23} - \psi^{12,13,2\bar{3}}),$$

$$p = \sqrt{\frac{2}{3}}\,(2\psi^{1\bar{1},11,22} + \psi^{11,11,2\bar{2}} - \psi^{1\bar{1},12,21} - \psi^{11,1\bar{2},21} - \psi^{11,12,2\bar{1}}),$$

$$n = \sqrt{\frac{2}{3}}\,(2\psi^{1\bar{2},12,21} + \psi^{12,12,2\bar{1}} - \psi^{1\bar{1},12,22} - \psi^{11,1\bar{2},22} - \psi^{11,12,2\bar{2}}),$$

$$\Delta^0 = \psi^{1\bar{1},12,12} + 2\psi^{11,12,1\bar{2}}, \tag{4.3}$$

$$\Delta^+ = 2\psi^{1\bar{1},11,12} + \psi^{11,11,1\bar{2}},$$

$$\Delta^{++} = \sqrt{3}\,\psi^{1\bar{1},11,11},$$

$$\Delta^- = \sqrt{3}\,\psi^{1\bar{2},12,12},$$

$$\Sigma^{*0} = \sqrt{2}\,(\psi^{1\bar{1},12,13} + \psi^{11,1\bar{2},13} + \psi^{11,12,1\bar{3}}),$$

$$\Sigma^{*+} = 2\psi^{1\bar{1},11,13} + \psi^{11,11,1\bar{3}},$$

$$\Sigma^{*-} = 2\psi^{1\bar{2},12,13} + \psi^{12,12,1\bar{3}},$$

$$\Xi^{*0} = \psi^{1\bar{1},13,13} + 2\psi^{11,13,1\bar{3}},$$

$$\Xi^{*-} = \psi^{1\bar{2},13,13} + 2\psi^{12,13,1\bar{3}},$$

$$\Omega^- = \sqrt{3}\,\psi^{1\bar{3},13,13},$$

т.е. для всех них $a, b, c = 1,2,3$. Здесь, как и в [3], волновые функции частиц нормированы на единицу, а $\psi^{\bar{\alpha}a,\beta b,\gamma c}$ нормированы условием

$$\|\psi^{\bar{\alpha}a,\beta b,\gamma c}\|^2 = \frac{1}{6}(1 + \delta^{\beta b,\gamma c}). \tag{4.4}$$

Если считать и различные спиновые состояния каждой из 18 частиц (4.3), то мы получим всего 56 состояний (преобразующихся по неприводимому представлению группы $SU(6) \supset SU(3) \times SU(2)_J$) . Наряду с ними в представление <u>364</u> входит столько же барионов с $Z = -B = -1$. Их волновые функции получаются из (4.3) заменой $1,2,3 \to 4,5,6$. Физически эти новые барионы отличаются от обычных лишь изменением знака у Y и Z , поэтому их можно назвать "зеркальными". Мы будем обозначать барионы зеркальные к обычным тем же символом, но со значком $\blacktriangledown$ сверху. Тогда

замена $1,2,3 \to 4,5,6$ приводит к следующей замене волновых функций:

$$\begin{gathered}
\Lambda^0 \to \check{\Lambda}^+,\quad \Sigma^- \to \check{\Sigma}^0,\quad \Sigma^0 \to \check{\Sigma}^+,\quad \Sigma^+ \to \check{\Sigma}^{++};\\
\Xi^- \to \check{\Xi}^+,\quad \Xi^0 \to \check{\Xi}^{++},\quad p \to \check{p},\quad n \to \check{n},\\
\Delta^- \to \check{\Delta}^-,\quad \Delta^0 \to \check{\Delta}^0,\quad \Delta^+ \to \check{\Delta}^+,\quad \Delta^{++} \to \check{\Delta}^{++},\\
\Sigma^{*-} \to \check{\Sigma}^{*0},\quad \Sigma^{*0} \to \check{\Sigma}^{*+},\quad \Sigma^{*+} \to \check{\Sigma}^{*++},\\
\Xi^{*-} \to \check{\Xi}^{*+},\quad \Xi^{*0} \to \check{\Xi}^{*++},\quad \Omega^- \to \check{\Omega}^{++}.
\end{gathered} \tag{4.5}$$

Принимая во внимание, что в рассматриваемых двух случаях имеем либо $a,b,c = 1,2,3$, либо $a,b,c = 4,5,6$, мы приходим к упрощению формулы (2.5) – в подпространствах обычных и зеркальных барионов вместо (2.5) имеем

$$2\vec{I}^2 = K^{(2)}(1,2) + K^{(2)}(4,5). \tag{4.6}$$

Аналогично, пользуясь (2.3) , находим

$$X = -YZ. \tag{4.7}$$

Соотношения (2.3), (2.10), (3.4), (4.6) и (4.7) приводят к равенствам

$$\begin{gathered}
N_U = \left(\frac{9}{2} + 5YZ + 2\vec{I}^2 - \tfrac{1}{2}Y^2 + 2\vec{J}^2\right)Z,\\
N_V = \left(\frac{9}{2} - 5YZ - 2\vec{I}^2 + \tfrac{1}{2}Y^2 + 2\vec{J}^2\right)Z,\\
N_W = \frac{3}{2} - 5YZ - 2\vec{I}^2 + \tfrac{1}{2}Y^2 + \frac{2}{3}\vec{J}^2
\end{gathered} \tag{4.8}$$

(конечно, все эти тождества имеют место лишь в упомянутых подпространствах , в которых $Z = \pm B$). Подставляя полученные результаты в (4.2), в конечном счете приходим к следующему выражению для массового оператора в рассматриваемом случае:

$$M = M_0^{\pm} + M_1^{\pm} Y + M_2^{\pm}(\vec{I}^2 - \tfrac{1}{4}Y^2) + M_3^{\pm}\vec{J}^2, \tag{4.9}$$

где $M_i^{\pm}$, $i = 0,1,2,3$ – новые постоянные (линейные комбинации старых), относящиеся к случаям $Z = \pm B$. Итак, для обычных барионов получается такой же массовый оператор, как и в схеме SU(6) /7,8/, так что известные массовые формулы останутся в силе и здесь. Более того, из (4.9) вытекает, что для зеркальных барионов будут иметь место аналогичные формулы, получаемые из формул для обычных барионов заменой (4.5).

Мы не будем заниматься здесь исследованием остальных 252 барионных состояний, входящих в представление $\underline{364}$, а также формул, связывающих массы обычных и суперзаряженных барионов (с такого рода формулами в мезонном случае мы встретимся в следующем параграфе).

§ 5. Мезонное представление

Мезоны причисляются к представлению $\underline{143}$, по которому преобразуется тензор $\Psi^{\alpha a}_{\beta b}$ с нулевым шпуром. Согласно /3/, это представление имеет следующее содержание по подгруппе $Sp(6) \times SU(2) \subset SU(12)$:

$$\underline{143} = (\underline{14},\underline{1}) + (\underline{21},\underline{1}) + (\underline{21},\underline{3}) + (\underline{14},\underline{3}) + (\underline{1},\underline{3}) \ . \qquad (5.1)$$

Первый 14-плет содержит октет обычных псевдоскалярных мезонов (π, K, η), а второй 21-плет содержит нонет обычных векторных мезонов (ρ, K^*, ω, ϕ); это следует из разложения 14-плета и 21-плета на неприводимые представления подгруппы $SU(3) \subset Sp(6)$:

$$\underline{14} = \underline{8} + \underline{3} + \underline{3}^* , \qquad \underline{21} = (\underline{8} + \underline{1}) + \underline{6} + \underline{6}^* . \qquad (5.2)$$

Можно показать, что в представлении $\underline{143}$ справедливы следующие тождества:

$$\begin{aligned} &N_P = \tfrac{1}{2} M_P \, , \quad P = U, V, W \, , \\ &C^{(12)} = 12 \, , \\ &\{\vec{J}, \vec{P}\} = \frac{1}{12} \vec{J}^2 M_P \, , \quad P = U, V, W \, . \end{aligned} \qquad (5.3)$$

Подставляя (5.3) в (3.3), а затем полученный таким образом результат – в (3.2), приходим к следующему выражению для оператора квадрата масс мезонов:

$$m^2 = m_0^2 + \alpha K^{(6)} + \beta \vec{J}^2 + (a_U + b_U \vec{J}^2) M_U + (a_V + b_V \vec{J}^2) M_V + (a_W + b_W \vec{J}^2) M_W \qquad (5.4)$$

где m_0, α, β, a_P, b_P, $P = U, V, W$ – новые постоянные (линейные комбинации старых); здесь мы учли, что в силу равенства масс частиц и античастиц коэффициенты

перед первыми степенями генераторов (т.е. перед X, Y, Z) должны исчезать. Кроме того, как легко показать, в представлении $\underline{143}$ справедливы два дополнительных тождества:

$$M_W = 6C^{(4)}(3,6) - 16 = -3C^{(8)}(1,2,4,5) + 32 . \qquad (5.5)$$

Формула (5.4), так же как и соответствующая формула для квадрата масс мезонов в схеме SU(6) /7/, оказывается малоэффективной из-за большого числа произвольных постоянных; при этом, кроме линейных соотношений между квадратами масс мезонов, имеют место еще квадратичные и кубичные. Приведем в качестве примера два линейных соотношения:

$$\begin{aligned} &\pi + \underset{\sim}{\pi} + 6(\eta + \zeta + \psi) = 10(K + \underset{\sim}{K}) \, , \\ &\rho + \underset{\sim}{\rho} + 6(\chi + \omega + \phi) = 10(K^* + \underset{\sim}{K}^*) . \end{aligned} \qquad (5.6)$$

Символ частицы здесь и в аналогичных формулах в дальнейшем отождествляется с квадратом ее массы (относительно обозначений мезонов из представления $\underline{143}$ см. таблицу 1). Чтобы сократить число независимых постоянных в (5.4), мы постулируем, что массовый оператор должен быть диагональным по физическим частицам, которые мы определим (в мезонном представлении) как собственные подпространства следующих девяти операторов:

$$I_3, Y, Z, \vec{J}^2 \equiv J(J+1) \, , \ \vec{I}^2 \equiv I(I+1), \ K^{(Sp)}, K^{(6)}, \ C^{(4)}(3,6), \ C^{(8)}(1,2,4,5).$$

Каждое инвариантное подпространство этих операторов в представлении $\underline{143}$ $(2J+1)$-мерно, причем различные векторы в одном подпространстве соответствуют одной и той же частице с разными проекциями спина J_3. Так как для всех мезонов $B = 0$, то в рассматриваемом теперь случае из (1.2), (1.3) и (1.4) вытекает

$$I_3 = Q - \tfrac{1}{2} S \, , \quad Y = S - \frac{2}{3} D \, , \quad Z = -\frac{2}{3} D \ ;$$

согласно (5.5) имеем еще

$$C^{(8)}(1,2,4,5) = 16 - 2C^{(4)}(3,6).$$

Кроме того, значения операторов Казимира $K^{(Sp)}$ и $K^{(6)}$ определяются размерностью n неприводимого представления группы $Sp(6)$, которому принадлежит данный мезон. Пользуясь всем этим, мы можем задать вектор состояния любой частицы из представления $\underline{143}$ следующим образом:

$$|J, J_3 \, ; Q, S, D \, ; I, n, C^{(4)}(3,6)\rangle \, .$$

В таблице 1 приведены значения величин S, D, I, n, $C^{(4)}(3,6)$ для псевдоскалярных и векторных мезонов из представления $\underline{143}$ (символы частиц согласованы с обозначениями в работе /1/).

Т а б л и ц а 1

Квантовые числа мезонов (представление 143)

Символ частицы	Псевдоскалярные мезоны				
	S	D	I	n	$C^{(4)}(3,6)$
π	0	0	1	14	0
K	1	0	1/2	14	4
$\bar{K}$	-1	0	1/2	14	4
η	0	0	0	14	16/3
π'	0	1	0	14	0
K'	1	1	1/2	14	4
$\bar{\pi}'$	0	-1	0	14	0
$\bar{K}'$	-1	-1	1/2	14	4
$\underset{\sim}{\pi}$	0	0	1	21	0
$\underset{\sim}{K}$	1	0	1/2	21	4
$\underset{\sim}{\bar{K}}$	-1	0	1/2	21	4
ζ	0	0	0	21	0
ψ	0	0	0	21	8
$\underset{\sim}{\pi}'$	0	1	1	21	0
$\underset{\sim}{K}'$	1	1	1/2	21	4
ψ'	2	1	0	21	8
$\underset{\sim}{\bar{\pi}}'$	0	-1	1	21	0
$\underset{\sim}{\bar{K}}'$	-1	-1	1/2	21	4
$\bar{\psi}'$	-2	-1	0	21	8

Символ частицы	Векторные мезоны				
	S	D	I	n	$C^{(4)}(3,6)$
ρ	0	0	1	21	0
K^*	1	0	1/2	21	4
$\bar{K}^*$	-1	0	1/2	21	4
ω	0	0	0	21	0
ϕ	0	0	0	21	8
ρ'	0	1	1	21	0
$K^{*\prime}$	1	1	1/2	21	4
ϕ'	2	1	0	21	8
$\bar{\rho}'$	0	-1	1	21	0
$\bar{K}^{*\prime}$	-1	-1	1/2	21	4
$\bar{\phi}'$	-2	-1	0	21	8
$\underset{\sim}{\rho}$	0	0	1	14	0
$\underset{\sim}{K}^*$	1	0	1/2	14	4
$\underset{\sim}{\bar{K}}^*$	-1	0	1/2	14	4
$\underset{\sim}{\chi}$	0	0	0	14	16/3
$\underset{\sim}{\rho}'$	0	1	0	14	0
$\underset{\sim}{K}^{*\prime}$	1	1	1/2	14	4
$\underset{\sim}{\bar{\rho}}'$	0	-1	0	14	0
$\underset{\sim}{\bar{K}}^{*\prime}$	1	-1	1/2	14	4
H	0	0	0	1	16/3

Целесообразность включения оператора $C^{(4)}(3,6)$ в систему характеристик частиц оправдывается тем, что с его помощью получается правильное разделение физических ω и ϕ, а также аналогичное разделение для их аналогов ζ и ψ среди псевдоскалярных мезонов. Заметим, что в выбранной нами системе характеристик мезонов

нельзя включить $\vec{S}^2$ потому что, как это уже отмечалось (§ 2), $\vec{S}^2$ не коммутирует с $K^{(Sp)}$, т.е. $\vec{S}^2$ смешивает состояния, принадлежащие различным $Sp(6)$ - мультиплетам; конечно, то же самое можно сказать и о $(J-\vec{S})^2$.

Теперь нетрудно проверить, что массовый оператор (5.4) диагонален по физическим частицам тогда и только тогда, когда[x/]

$$a_U = a_V = b_U = b_V = 0. \tag{5.7}$$

Это следует, например, из соотношений

$$\langle\eta|m^2|\zeta\rangle = 32\sqrt{3}\,a_U,$$

$$\langle\eta|m^2|\psi\rangle = -32\sqrt{6}\,a_V,$$

$$\langle\chi|m^2|\omega\rangle = 32\sqrt{3}(a_U + 2b_U),$$

$$\langle\chi|m^2|\phi\rangle = -32\sqrt{6}(a_V + 2b_V)$$

(операторы $K^{(6)}$, $\vec{J}^2$ и M_W диагональны). Окончательно, из (5.4) и (5.7) получаем следующую формулу для массового оператора в мезонном представлении 143:

$$m^2 = m_0^2 + \alpha K^{(6)} + \beta\vec{J}^2 + (a_W + b_W\vec{J}^2)M_W. \tag{5.8}$$

Из (5.8) вытекают известные соотношения между массами мезонов из 35-плета $SU(6)$ /6/:

$$3\eta + \pi = 4K, \quad \phi + \rho = 2K^*, \quad \omega = \rho \tag{5.9}$$

и аналогичные равенства для пока что не обнаруженных на опыте супернейтральных мезонов:

$$3\chi + \underset{\sim}{\rho} = 4\underset{\sim}{K}^*, \quad \psi + \underset{\sim}{\pi} = 2\underset{\sim}{K}, \quad \zeta = \underset{\sim}{\pi}, \tag{5.10}$$

а также равенство масс суперзаряженных и супернейтральных мезонов с одинаковыми J и $C^{(4)}(3,6)$:

$$\pi = \pi' = \underset{\sim}{\pi} = \underset{\sim}{\pi}' \ (=\zeta), \quad K = K' = \underset{\sim}{K} = \underset{\sim}{K}', \quad \psi = \psi',$$

$$\rho = \rho' = \underset{\sim}{\rho} = \underset{\sim}{\rho}' \ (=\omega), \quad K^* = K^{*\prime} = \underset{\sim}{K}^* = \underset{\sim}{K}^{*\prime}, \quad \phi = \phi'. \tag{5.11}$$

x/ Отметим, что операторы M_U и M_V могут быть представлены в виде обратимых линейных комбинаций операторов $\Delta m(21,1)$ и $\Delta m(21,8)$, используемых в /1/, так что, согласно (5.4), равенства (5.7) эквивалентны равенствам $\Delta m(21,1) = 0$ и $\Delta m(21,8) = 0$, с помощью которых выводятся массовые формулы в /1/.

Те из равенств, которые связывают частицы одного $Sp(6)$ -мультиплета, совпадают с равенствами, полученными в /1/. Заметим, что правило интервалов $K^* - \rho = K - \pi$, так же как и в случае схемы $SU(6)$ /7,8/, получается лишь при некотором дополнительном предположении относительно коэффициентов в массовом операторе (5.4) (а именно, при $b_W = 0$).

Несмотря на соответствие с предыдущими работами, на наш взгляд, нельзя считать полученные массовые формулы для мезонов вполне убедительными. Дело в том, что в формуле (5.8) нет зависимости от оператора Казимира группы $Sp(6)$, а зависимость от изоспина лишь частично учитывается оператором $C^{(4)}(3,6)$. Заслуживает внимания учет вклада последующих инвариантных (относительно $SU(2)_J$, $SU(2)_I$, $U(1)_Y$, $U(1)_Z$) членов, входящих в представления $\underline{4212}$ и $\underline{5940}$, в частности, инвариантных членов типа $M^{(189)}_{(\pm)}$ и $M^{(405)}_{(\pm)}$ (ср. § 3), преобразующихся по представлениям $(\underline{1},\underline{1})$, $(\underline{14},\underline{1})$ и $(\underline{21},\underline{1})$ группы $Sp(6) \times SU(2)_J$. Заметим, кстати, что инвариантные члены типа $M^{(1)}_{(\pm)}$ и $M^{(35)}_{(\pm)}$ преобразуются именно по этим представлениям.

В заключение авторы выражают искреннюю благодарность Б.В. Струминскому, совместно с которым было начато настоящее исследование и обсуждался ряд вопросов, а также Р.Т. Денчеву за полезную дискуссию.

Литература

1. H.Bacry, J.Nuyts and L. Van Hove. Phys. Lett., 9, 279 (1964); 12, 285 (1964); 35, 510 (1965).
2. Б.В. Струминский. ЯФ, 1, 701 (1965).
3. Б.В. Струминский, И.Т. Тодоров и Д.Г. Факиров., Группа SU(12) как объединение симплектической и спиновой симметрии. Препринт ОИЯИ, Р-2175, Дубна, 1965.
4. V.G.Kadyshevsky, R.M.Muradyan, A.N.Tavkhelidze and I.T.Todorov. Phys. Lett., 15, 180 (1965).
5. L. Van Hove, SU_3-Triplets with Integral Electric Charge and the Baryon Structure, Preprint CERN 65/648/ 5-Th. 548, Geneva, 1965.
6. T.K.Kuo and Tsu Yao. Phys. Rev. Lett., 13, 415 (1964).
7. M.A.B.Bég and V.Singh. Phys. Rev. Lett., 13, 418 (1964).
8. В.Г. Кадышевский, Р.М. Мурадян, Я.А. Смородинский. SU(6) -симметрия в сильных и электромагнитных взаимодействиях элементарных частиц. Препринт ОИЯИ, Р-2061, Дубна, 1965.
9. S.Okubo. Progr. Theor. Phys., 27, 949 (1962).

Рукопись поступила в издательский отдел
18 августа 1965 г.