

34

Л. Я. П.
Л. И. Ландису

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория теоретической физики

Г. В. Ефимов

P-234

β - γ -корреляция при запрещенном β -распаде
ориентированных ядер

г. Дубна, 1958 год

Г. В. Ефимов

P-234

**β - γ -корреляция при запрещенном β — распаде
ориентированных ядер**

А Н Н О Т А Ц И Я

Получено удобное выражение для волновой функции электрона с учётом кулоновского поля для больших и малых Z , что позволило записать гамильтониан β -распада для переходов произвольного порядка запрещения. Расчёт угловых корреляций производится на основе преобразования статистической матрицы плотности в результате распада. Использование методики Левинсона, тензорных сферических операторов и обобщенных сферических гармоник позволило получить выражение для β - γ -корреляции с учётом поляризации β -активных ядер при переходах произвольного порядка запрещения, в котором выделены в замкнутом виде угловая часть и квадратичные комбинации констант взаимодействия.

Введение

В связи с открытием несохранения чётности в слабых взаимодействиях большое значение приобрело исследование корреляционных эффектов при β -распаде ориентированных ядер.

В данной работе предлагается метод расчёта корреляционных эффектов при β -переходах произвольного порядка запрещения. В литературе ¹⁻⁶ подробно рассмотрены только разрешенные переходы, переходы первого запрещения и "уникальные переходы второго запрещения. О переходах произвольного порядка имеется работа Долгинова ⁵, однако используемая им методика кажется довольно сложной, а полученные результаты труднообозримыми. Сложность расчёта эффектов при β -переходах произвольного запрещения в большей части определяется тем, что влияния кулоновского поля в запрещенных переходах очень существенно, а учёт этого влияния довольно сложен. В ряде работ ^{3,4,5,6,7,8}, получено выражение волновой функции электрона с учётом кулоновского поля, но все эти выражения даже для первого запрещения громоздки, и ими трудно оперировать. Однако эта сложность объясняется просто превышением точности, заключающейся в том что, с одной стороны, учитываются только максимальные матричные элементы при разложении по степеням ρZ , а с другой стороны, по второму малому параметру Ze^2 , который порядка ρZ , разложения не производится. Если же учесть малость как ρZ так и Ze^2 , то можно получить удобное выражение для волновой функции электро-

на с учётом кулоновского поля.

Метод расчёта корреляционных эффектов, используемый в данной работе, основан на преобразованиях статистической матрицы плотности ансамбля ядер в результате распада. Этот метод кажется более простым и наглядным, чем обычно используемый в литературе^{9,10}. Применение этого метода было бы почти невозможным без знания так называемой методики Левинсона^{II}, которая, к сожалению, ещё не получила широкой известности (поэтому изложение её помещено в приложении).

Ограничимся рассмотрением только $\beta\gamma$ -корреляции при распаде ориентированных ядер при β -распаде произвольного порядка запрещения. Учёт поляризации электронов или направления вылета нейтрино, т.е. ядер отдачи, проводится по аналогичной схеме.

В связи с тем, что последние экспериментальные данные поставили под сомнение существование только вариантов β -взаимодействия S , T и P , учтём все варианты.

§ I. Волновая функция электрона

В задаче о β -распаде в качестве волновой функции электрона следует выбрать функцию 4,6:

$$\Psi_{\vec{p}\mu}^{(-)} = 4\pi \sum_{j\ell m} \begin{pmatrix} G_{j\ell}(z) \Omega_{j\ell m}(\vec{n}) \\ F_{j\ell}(z) \Omega_{j\ell m}(\vec{n}) \end{pmatrix} (\Omega_{j\ell m}^+(\vec{n}), \nu_{\mu}) \quad (I.1)$$

где

$$G_{j\ell}(z) = B_{j\ell} \sqrt{\frac{\varepsilon+m}{2\varepsilon}} (2\rho z)^{\gamma_{j\ell}-1} e^{-i\gamma_{j\ell} z} 2 \operatorname{Re} e^{-i\rho z + i\gamma_{j\ell} z} (\gamma_{j\ell} + i\nu) F(\gamma_{j\ell} + i\nu, 2\gamma_{j\ell} + 1, 2i\rho z)$$

$$F_{j\ell}(z) = B_{j\ell} \sqrt{\frac{\varepsilon-m}{2\varepsilon}} (2\rho z)^{\gamma_{j\ell}-1} e^{-i\gamma_{j\ell} z} 2i \operatorname{Im} e^{-i\rho z + i\gamma_{j\ell} z} (\gamma_{j\ell} + i\nu) F(\gamma_{j\ell} + i\nu, 2\gamma_{j\ell} + 1, 2i\rho z)$$

$$B_{j\ell} = \frac{|\Gamma(\gamma_{j\ell} + i\nu)|}{\Gamma(2\gamma_{j\ell} + 1)} \exp\left(i\frac{\pi}{2}(\gamma_{j\ell} - 1) + \frac{\pi}{2}\nu + i \arg \Gamma(\gamma_{j\ell} + i\nu)\right)$$

$$\gamma_{j\ell} = \sqrt{\alpha_{j\ell}^2 - Z^2 e^4}; \quad \alpha_{j\ell} = \begin{cases} -\ell - 1 & \text{при } j = \ell + \frac{1}{2} \\ \ell & \text{при } j = \ell - \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$e' = 2j - \ell$$

$$e^{2i\gamma_{j\ell} z} = \frac{-\alpha_{j\ell} + i\mu}{\gamma_{j\ell} + i\nu}; \quad \nu = Ze^2 \frac{\varepsilon}{p}; \quad \mu = Ze^2 \frac{m}{p}$$

$$\Omega_{j\ell m}(\vec{n}) = \sum_{m+\mu=M} (e^{\frac{1}{2}} m \mu | j M) Y_{\ell m}(\vec{n}) \nu_{\mu}; \quad \vec{n} = \frac{\vec{z}}{r}; \quad \vec{e} = \frac{\vec{p}}{p}$$

$(e^{\frac{1}{2}} m \mu | j M)$ - унитарный коэффициент Клебша-Гордона¹³

$Y_{\ell m}(\vec{n})$ - сферическая гармоника, нормированная $\int |Y_{\ell m}(\vec{n})|^2 d\vec{n} = 1$

ν_{μ} - ортонормированный спинор в пространстве спина $\frac{1}{2}$, $\nu_{\mu}^+ \nu_{\mu'} = \delta_{\mu\mu'}$.

Функция $\Psi_{\vec{p}\mu}^{(-)}$ является решением уравнения Дирака с учётом кулоновского поля и имеет на бесконечности асимптотическое поведение:

$$\Psi_{\vec{p}\mu}^{(-)} = U_{\vec{p}\mu} e^{i\vec{p}\vec{z} - i\nu\ln(rz + \vec{p}\vec{z})} + \frac{F_{\vec{p}\mu}}{z} e^{-i\vec{p}\vec{z} + i\nu\ln 2rz} \quad (I.2)$$

Эта функция описывает после взаимодействия на бесконечности электрон, имеющий определенное направление импульса \vec{p} в пространстве и определенную проекцию спина μ ¹⁴.

При таком выборе волновой функции электрона искажение кулоновского поля в ядре не учитывается.

Введём обозначение

$$A_{e_1 e_2}^j = \sum_M \Omega_{j e_1 M}(\vec{n}) \Omega_{j e_2 M}^+(\vec{z}) \quad (I.3)$$

Раскрывая в (I.1) сумму по j и используя тождества $\sum_{j \in e} a_{j e} b_{j e'} \equiv \sum_{j \in e} a_{j e} b_{j e}$ и $A_{e e'}^j \equiv A_{e e}^j(\vec{\sigma}\vec{z})$ ¹⁵, получим

$$\Psi_{\vec{p}\mu}^{(-)} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \Psi_{\ell} \quad (I.4)$$

где

$$\Psi_0 = 4\pi \begin{pmatrix} G_{\frac{1}{2},0}(z) A_{00}^{\frac{1}{2}} \\ F_{\frac{1}{2},1}(z) A_{00}^{\frac{1}{2}}(\vec{\sigma}\vec{z}) \end{pmatrix} \mathcal{V}_{\mu} = \begin{pmatrix} G_{\frac{1}{2},0}(z) \\ F_{\frac{1}{2},1}(z)(\vec{\sigma}\vec{z}) \end{pmatrix} \mathcal{V}_{\mu}$$

$$\Psi_{\ell} = 4\pi \begin{pmatrix} G_{\ell+\frac{1}{2},\ell}(z) A_{\ell\ell}^{\ell+\frac{1}{2}} + G_{\ell-\frac{1}{2},\ell}(z) A_{\ell\ell}^{\ell-\frac{1}{2}} \\ [F_{\ell+\frac{1}{2},\ell+1}(z) A_{\ell\ell}^{\ell+\frac{1}{2}} + F_{\ell-\frac{1}{2},\ell-1}(z) A_{\ell\ell}^{\ell-\frac{1}{2}}](\vec{\sigma}\vec{z}) \end{pmatrix} \mathcal{V}_{\mu} \quad (I.4a) \quad \ell \geq 1$$

Можно показать, смотри, например I6, что

$$A_{\ell\ell}^j = \frac{1}{4\pi} \left\{ (j+\frac{1}{2}) P_\ell(\vec{n}\vec{e}) + (-)^{\ell+j+\frac{1}{2}} P_\ell'(\vec{n}\vec{e}) i (\vec{\sigma}[\vec{n}\vec{e}]) \right\} \quad (I.5)$$

где $P_\ell(\vec{n}\vec{e})$ полином Лежандра от $(\vec{n}\vec{e})$.

Следовательно ψ_0 является волновой функцией разрешенных переходов, а ψ_ℓ ℓ -того запрещения ($\ell \geq 1$).

Так как в теории β -распада учитывается поведение в.ф. электрона только вблизи начала координат, то при рассмотрении β -переходов произвольного запрещения (включая разрешенные переходы) обычно учитываются только наибольшие матричные элементы по ρz (ρ - импульс электрона, z - размер ядра), так называемое запрещение по отношению размера ядра к длине волны электрона. Поэтому можно уже в выражении волновой функции электрона (I.4) оставить наименьшую степень ρz , соответствующую рассматриваемому переходу, которая и войдет в наибольший матричный элемент.

Асимптотика функций $G_{j\ell}(z)$ и $F_{j\ell}(z)$ при $\rho z \ll 1$ дается формулами:

$$G_{j\ell}(z) \approx B_{j\ell} (2\rho z)^{\gamma_{j\ell}-1} \sqrt{\frac{\varepsilon+m}{2\varepsilon}} \times \\ \times \left\{ [\gamma_{j\ell} - \alpha_{j\ell} + i(\nu-\mu)] + [\gamma_{j\ell} + \alpha_{j\ell} + i(\nu+\mu)] \frac{i\rho z}{2\gamma_{j\ell}+1} \right\}$$

$$F_{je}(z) = B_{je} (2pz)^{\gamma_{je}-1} \sqrt{\frac{\varepsilon-m}{2\varepsilon}} \times \left\{ [\gamma_{je} + x_{je} + i(\nu + \mu)] + [\gamma_{je} - x_{je} + i(\nu - \mu)] \frac{zpz}{2\gamma_{je} + 1} \right\} \quad (I.6)$$

Волновая функция электрона разрешенных переходов φ_0 может быть переписана

$$\varphi_0 = d_0 (2pz)^{\gamma_1-1} \begin{pmatrix} 1 \\ Q_0(\vec{\sigma} \vec{z}) \end{pmatrix} \mathcal{V}_\mu \quad (I.7)$$

где $Q_0 = \frac{\rho}{\varepsilon+m} \frac{\gamma_1 + 1 + i(\nu + \mu)}{\gamma_1 + 1 + i(\nu - \mu)}$; $\gamma_1 = \sqrt{1 - Z^2 e^4}$

$$d_0 = B_{\frac{1}{2},0} \sqrt{\frac{\varepsilon+m}{2\varepsilon}} (\gamma_1 + 1 + i(\nu - \mu))$$

При малых Z (когда можно пренебречь $Z^2 e^4$) имеем

$$\varphi_0 = (1 + iZe^2 \frac{\varepsilon-m}{2\rho}) \sqrt{\frac{\varepsilon+m}{2\varepsilon}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\vec{\sigma} \vec{p}}{\varepsilon+m} (1+i\mu) \end{pmatrix} \mathcal{V}_\mu \quad (I.7a)$$

При $Z \rightarrow 0$ φ_0 переходит в нулевой член разложения плоской волны $\mathcal{U}_{\vec{p}\mu}$.

Для запрещенных переходов волновая функция электрона φ_e даётся формулой (I.4), однако для предельных случаев больших и малых Z можно получить более простые выражения. Рассмотрим φ_e и выведем условия, когда Z считается малым или большим. Ограничимся только рассмотрением функций $G_{\ell+\frac{1}{2},\ell}(z)$ и $G_{\ell-\frac{1}{2},\ell}(z)$, так как для $F_{\ell+\frac{1}{2},\ell+1}(z)$ и $F_{\ell-\frac{1}{2},\ell-1}(z)$ все выводы аналогичны.

Асимптотика $G_{\ell+\frac{1}{2},\ell}(z)$ и $G_{\ell-\frac{1}{2},\ell}(z)$ при $pz \ll 1$ даётся формулой (I.6)

$$G_{l+\frac{1}{2},l}(z) \approx B_{l+\frac{1}{2},l}(2pz)^{\gamma_e-1} \sqrt{\frac{\varepsilon+m}{2\varepsilon}} \left\{ [\gamma_e+l+1+i(\nu-\mu)] + [\gamma_e-l-1+i(\nu+\mu)] \frac{ipz}{2\gamma_e+1} \right\}$$

$$G_{l-\frac{1}{2},l}(z) \approx B_{l-\frac{1}{2},l}(2pz)^{\gamma_e-1} \sqrt{\frac{\varepsilon+m}{2\varepsilon}} \left\{ [\gamma_e-l+i(\nu-\mu)] + [\gamma_e+l+i(\nu+\mu)] \frac{ipz}{2\gamma_e+1} \right\}$$

где $\gamma_e = \sqrt{l^2 - z^2 e^4}$

Заметим, что при оценочных расчётах можно считать $\gamma_e = l$ с очень хорошей точностью.

В выражении для $G_{l+\frac{1}{2},l}(z)$ второй член в фигурных скобках меньше первого на множитель $ze^2 pz$, и им можно пренебречь. Но в выражении для $G_{l-\frac{1}{2},l}(z)$ этого сделать нельзя, так как первый член порядка ze^2 , а второй pz .

Большими Z будем считать такие Z , для которых выполнено

$$\gamma_e - l + i(\nu - \mu) \gg [\gamma_e + l + i(\nu + \mu)] \frac{ipz}{2\gamma_e + 1}$$

или

$$ze^2 \gg \frac{2l}{2l+1} (\varepsilon+m) z$$

Считая $\frac{2l}{2l+1} (\varepsilon+m) \approx 1 \text{ мев}$ и $z \approx 10^{-13} \text{ А}^{1/3} \text{ см}$, получим условие:

$$Z \gg A^{1/3}$$

Рассматривая далее отношение $G_{e+\frac{1}{2},e}(z)$ к $G_{e-\frac{1}{2},e}(z)$, получим:

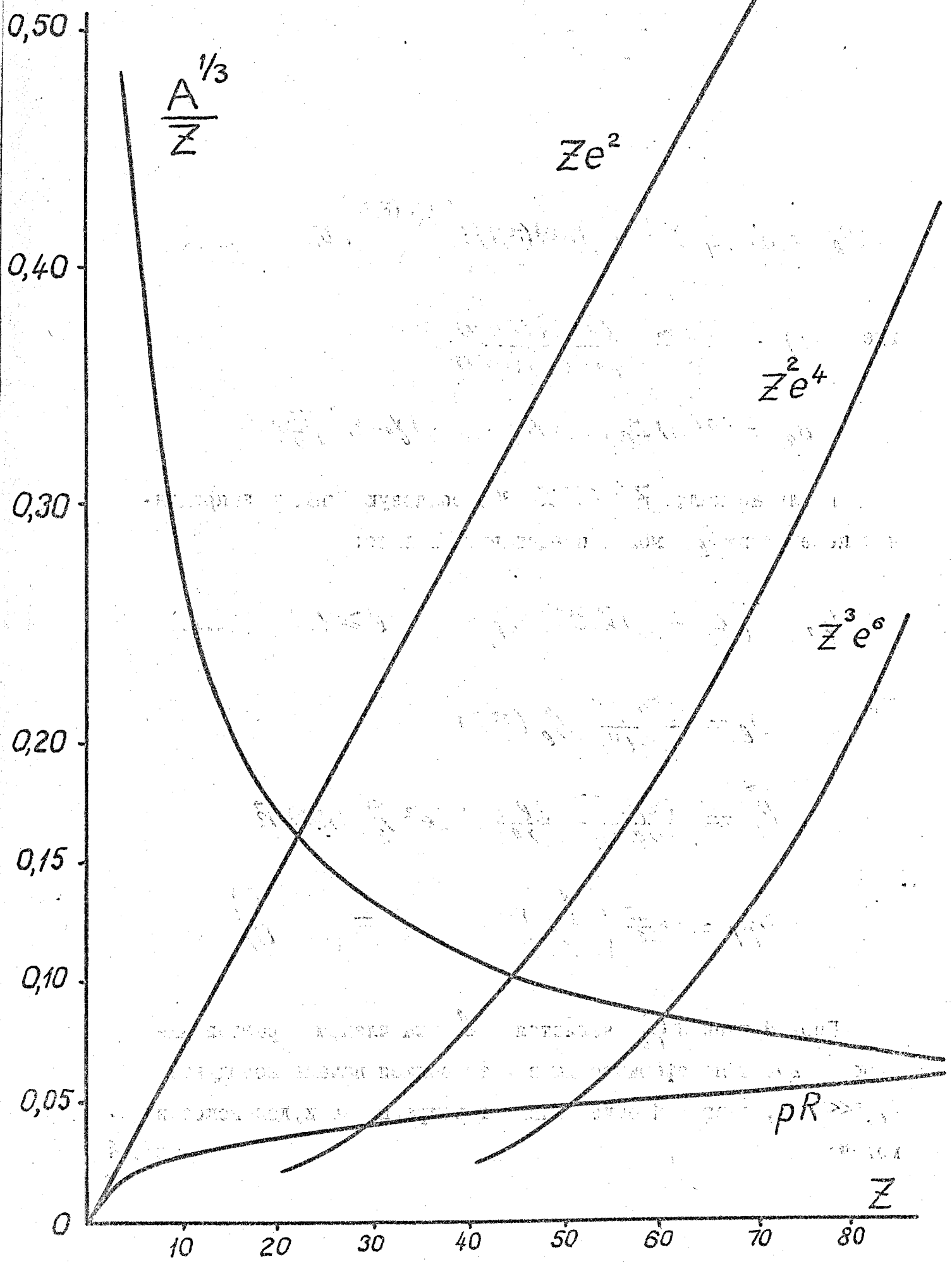
$$\frac{G_{e+\frac{1}{2},e}(z)}{G_{e-\frac{1}{2},e}(z)} \approx \frac{A^{1/3}}{z}$$

Значит членом $G_{e+\frac{1}{2},e} A e^{e+\frac{1}{2}}$ в φ_e можно пренебречь по сравнению с $G_{e-\frac{1}{2},e}(z) A e^{e-\frac{1}{2}}$ с той же точностью, с какой z считается большим в смысле критерия (I.8).

Поведение $\frac{A^{1/3}}{z}$ в зависимости от z показано на графике, откуда видно, что если требуемая теоретическая точность порядка 15%, то большими z можно считать $z \geq 25:30$, а для 10% $z \geq 50$. Для сравнения приведена кривая зависимости $p\tau$ ($p \sim 1 \text{ мев}$, $\tau \sim 10^{-13} A_{\text{ан}}^{1/3}$) от z , т.е. кривая обычной теоретической точности с которой учитываются только основные матричные элементы при разложении по степеням $p\tau$, а остальные отбрасываются.

Если условие (I.8) нельзя считать выполненным, то выражение (I.4a) для φ_e можно разлагать по степеням ze^2 . Кривые ze^2 , z^2e^4 , z^3e^6 и т.д. показывают теоретическую точность, с которой можно оставлять те или иные степени ze^2 в разложении φ_e для данного z . Так для $z \lesssim 30$ необходимо ограничиться только линейными по z членами разложения.

Волновая функция $\varphi_e (e \gg 1)$ в случае больших z (в смысле (I.8)) запишется:



$$\Psi_l = d_l (2\rho r)^{\gamma_l - 1} P_{l-1}(\vec{n}\vec{e})(\vec{\sigma}\vec{n}) \begin{pmatrix} Q_l(\vec{\sigma}\vec{e}) \\ 1 \end{pmatrix} \mathcal{V}_\mu \quad (1.9)$$

где
$$Q_l = \frac{\varepsilon + m}{\rho} \frac{\gamma_l - l + i(\nu - \mu)}{\gamma_l - l + i(\nu + \mu)}$$

$$d_l = (2l-1) B_{l-1, l} \left[iZe^2 + \frac{\rho}{\varepsilon + m} (\gamma_l - l) \right] \sqrt{\frac{\varepsilon + m}{2\varepsilon}}$$

В случае малых Z ($Z \lesssim 30$) волновую функцию запрещенных переходов Ψ_l можно представить в виде:

$$\Psi_l = [a_l - \gamma_5(\vec{b}_l \vec{\sigma})] \mathcal{U}_{\vec{p}\mu}, \quad l \geq 1 \quad (1.10)$$

где
$$a_l = \frac{(i\rho r)^l}{(2l-1)!!} P_l(\vec{n}\vec{e})$$

$$\vec{b}_l = \frac{(i\rho r)^{l-1}}{(2l-1)!!} \cdot \frac{2l-1}{2l} iZe^2 P_{l-1}(\vec{n}\vec{e}) \cdot \vec{n}$$

$$\mathcal{U}_{\vec{p}\mu} = \sqrt{\frac{\varepsilon + m}{2\varepsilon}} \begin{pmatrix} 1 \\ (\vec{\sigma}\vec{p}) \\ \varepsilon + m \end{pmatrix} \mathcal{V}_\mu; \quad \gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$$

Первый член в Ψ_l является l -тым членом в разложении плоской волны по сферическим волнам вблизи начала координат ($\rho r \ll 1$), а второй обуславливает поправку на кулоновское взаимодействие.

Заметим, что условие (I.8) для больших Z означает, что в выражении (I.10) первый член от плоской волны отбрасывается, так как он меньше второго. Волновая функция ψ_e в (I.9) при малых Z переходит во второй член в (I.10).

§ 2. Гамильтониан β -распада и матричные элементы
отвечающие за переход $\Delta J = \ell$.

Общая форма гамильтониана β -распада, когда чётность не сохраняется, может быть записана

$$H_{\text{взаим.}} = \sum_{\kappa} \left\{ C_{\kappa} (\bar{\psi}_p O_{\kappa} \psi_n) (\bar{\psi}_e O_{\kappa} \psi_v) + C'_{\kappa} (\bar{\psi}_p O_{\kappa} \psi_n) (\bar{\psi}_e O_{\kappa} \gamma_5 \psi_v) \right\} \quad (2.1)$$

где $C_s = 1$ $O_T = \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_{ik} = -\frac{2i}{\sqrt{8}} (\gamma_i \gamma_k - \gamma_k \gamma_i)$
 $O_v = \gamma_i$
 $O_p = \gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ $O_A = \gamma_i \gamma_5$

Все десять постоянных C_{κ} и C'_{κ} , вообще говоря, комплексны.

Представим $H_{\text{взаим.}}$ в виде

$$H_{\text{взаим.}} \equiv H_{(+)} + H_{(-)} = \sum_{\alpha=-1,+1} H_{(\alpha)} \quad (2.2)$$

где
$$H_{(\alpha)} = \sum_K C_K^{(\alpha)} (\bar{\Psi}_p O_K \Psi_n) (\bar{\Psi}_e O_K (1 + \alpha \gamma_5) \Psi_\nu)$$

$$C_K^{(\alpha)} = \frac{1}{2} (C_K + \alpha C_K') ; \quad \alpha = \pm 1$$

В случае справедливости двухкомпонентной теории нейтрино $H_{(\pm)} \equiv 0$, если спин нейтрино параллелен его импульсу, или $H_{(\pm)} \equiv 0$ в противном случае.

Если же двухкомпонентная теория несправедлива, то интерференция между $H_{(+)}$ и $H_{(-)}$ равна нулю после суммирования по проекциям спина нейтрино, т.е. во всех случаях, когда направление спина в опыте не фиксируется, и значит эффект от $H_{\text{взаим.}}$ равен сумме эффектов от $H_{(+)}$ и $H_{(-)}$.

Поэтому можно рассматривать один гамильтониан $H_{(\alpha)}$ и только в окончательном результате полагать то или иное значение α . Такое разбиение $H_{\text{взаим.}}$ на $H_{(+)}$ и $H_{(-)}$ упрощает все выкладки.

Рассматривая $H_{(\alpha)}$ как оператор, действующий на волновую функцию ядра, и опуская для простоты оператор τ , переводящий нейтрон в протон, получим из (2.2)

$$\begin{aligned} H_{(\alpha)} = & (C_S^{(\alpha)} \beta + \alpha C_P^{(\alpha)} \beta \gamma_5) (\bar{\Psi}_e (1 + \alpha \gamma_5) \Psi_\nu) + \\ & + (C_V^{(\alpha)} \beta - \alpha C_A^{(\alpha)} \beta \gamma_5) \gamma_i (\bar{\Psi}_e \gamma_i (1 + \alpha \gamma_5) \Psi_\nu) + \\ & + \frac{1}{2} C_T^{(\alpha)} \beta \sigma_{ik} (\bar{\Psi}_e \sigma_{ik} (1 + \alpha \gamma_5) \Psi_\nu) \end{aligned} \quad (2.3)$$

Выберем волновую функцию электрона в виде (I.10). Хотя это только случай малых Z ($Z \lesssim 30$), но он качественно может описать и случай больших Z , если в (I.10) положить $a_e = 0$.

Подставляя выражение для ψ_e в (2.3), получим:

$$\begin{aligned}
 H(\alpha) = & \left\{ (C_S^{(\alpha)} \beta + \alpha C_P^{(\alpha)} \beta \gamma_5) v_\mu^+ (1 + \alpha \frac{\vec{p} \vec{\sigma}}{\varepsilon + m}) [A^+ + (\vec{B}^+ \vec{\sigma})] e^{-i\vec{k} \vec{r}} + \right. \\
 & + (C_V^{(\alpha)} + \alpha C_A^{(\alpha)} \gamma_5) v_\mu^+ (1 - \alpha \frac{\vec{p} \vec{\sigma}}{\varepsilon + m}) [A^+ - (\vec{B}^+ \vec{\sigma})] e^{-i\vec{k} \vec{r}} + \\
 & + C_T^{(\alpha)} \beta (1 + \alpha \gamma_5) v_\mu^+ (1 + \alpha \frac{\vec{p} \vec{\sigma}}{\varepsilon + m}) [A^+ + (\vec{B}^+ \vec{\sigma})] e^{-i\vec{k} \vec{r}} (\vec{S} \vec{\sigma}) - \\
 & \left. - (C_A^{(\alpha)} + \alpha C_V^{(\alpha)} \gamma_5) v_\mu^+ (1 - \alpha \frac{\vec{p} \vec{\sigma}}{\varepsilon + m}) [A^+ - (\vec{B}^+ \vec{\sigma})] e^{-i\vec{k} \vec{r}} (\vec{S} \vec{\sigma}) \right\} \times \\
 & \times (1 - \alpha (\vec{\sigma} \vec{v})) \frac{\omega_\lambda}{\sqrt{2}} \quad (2.6)
 \end{aligned}$$

где \vec{S} - оператор спина ядра (матрицы Паули); $\vec{v} = \frac{\vec{k}}{K}$, где \vec{k} - импульс нейтрино, ω_λ - спинор, описывающий спин нейтрино.

$$A = \sum_{e=0}^{\infty} a_e ; \quad \vec{B} = \sum_{e=1}^{\infty} \vec{b}_e$$

Изменение спина ядра ΔJ при β -распаде обеспечивается оператором $Y_{e m}(\vec{n})$. В гамильтониане $H(\alpha)$ членами, зависящими от \vec{n} является $[A^+ \pm (\vec{B}^+ \vec{\sigma})] e^{-i\vec{k} \vec{r}}$.

Можно показать, что

$$[A^+ \pm (\vec{B}^+ \vec{\sigma})] e^{-i\vec{k}\vec{r}} = \sum_p (a_p^* \pm (\vec{b}_p^* \vec{\sigma})) \sum_s \frac{(-i\kappa r)^s}{(2s-1)!!} P_s(\vec{n}\vec{v}) =$$

$$= \sum_{\ell} \sum_{q=0,1} \sum_m \xi^q \sum_{\rho} (-1)^m i^{\ell} (\rho R)^{\ell q} Y_{\ell m}(\vec{n}) \sum_{\rho+s=\ell} \alpha_{\rho s}^{\ell q} Y_{\ell-m}(n_q(\rho\vec{e}, s\vec{v}), T_q^{\frac{1}{2}}) \quad (2.7)$$

где будем считать $\xi = +1$ для вариантов S , T и P и $\xi = -1$ для V и A , $Y_{\ell-m}(n_q(\rho\vec{e}, s\vec{v}), T_q^{\frac{1}{2}})$ - обобщенная сферическая гармоника (см. приложение III), $T_q^{\frac{1}{2}}$ - сферический тензор в пространстве спина $1/2$ (см. приложение II),

при $q=0$, $n_0 = \ell$, $\rho_0 = \rho$; $(\rho R)^{\ell_0} = (-\rho r)^{\ell}$; $\alpha_{\rho s}^{\ell_0} = \left(\frac{\kappa}{\rho}\right)^s \frac{(ps00|\ell_0)}{(2\rho-1)!!(2s-1)!!} \sqrt{2}$

при $q=1$, $n_1 = \ell-1$, $\rho_1 = \rho-1$; $(\rho R)^{\ell_1} = \sqrt{2} e^2 (-\rho r)^{\ell-1}$; $\alpha_{\rho s}^{\ell_1} = \left(\frac{\kappa}{\rho}\right)^s \frac{(ps00|\ell_0)}{(2\rho-1)!!(2s-1)!!} \sqrt{\frac{2\rho-1}{2\rho}}$

$$(2s-1)!! \equiv 1 \text{ при } s=0$$

В формуле (2.7) суммирование по всем ρ и s , образующим с ℓ треугольник, заменено суммой по $\rho+s=\ell$, так как учитывается только максимальный матричный элемент по ρr , т.е. с минимальной степенью ρr . Подставляя (2.7) в (2.6), получим гамильтониан $H(\alpha)$, в котором оставлены только главные члены в разложении по ρr .

Оценим теперь операторы β , γ_s , $\beta\gamma_s$. Средняя кинетическая энергия, приходящаяся на нуклон в ядре равна по порядку величины $10-20$ Мев, откуда $\frac{v_{\text{нуклона}}}{c} \approx 0,1 \div 0,2$. Поэтому необходимо считать $\beta=1$, а γ_s , $\beta\gamma_s$ порядка $\frac{v}{c}$. Матричные элементы с γ_s и $\beta\gamma_s$ дадут величины одного порядка, но различ-

ные, так как они различно перепутывают большие и малые компоненты волновых функций. $\frac{v}{c}$ является малым параметром и обычно пренебрегается по сравнению с единицей.

Гамильтониан β -распада для запрещенного перехода с изменением спина ядра $\Delta J = l$ ($l \geq 2$) и изменением чётности $\Delta \pi = (-)^l$ может быть представлен в виде:

$$\begin{aligned}
 H(\alpha) = & \sum_{q=0,1} \left\{ \sum_m i^l (-)^m (pR)^{lq} Y_{lm}(\vec{n}) [C_S^{(\alpha)} A_{l,-m}^{q(+)}(q\ell) + C_V^{(\alpha)} A_{l,-m}^{q(-)}(q\ell)] + \right. \\
 & + \sum_m i^l (-)^m (pR)^{lq} Y_{lm}(\ell\vec{n}, \vec{1}\vec{s}) [C_T^{(\alpha)} A_{l,-m}^{q(+)}(1,\ell) - C_A^{(\alpha)} A_{l,-m}^{q(-)}(1,\ell)] + \\
 & + \sum_m i^l (-)^m (pR)^{lq} Y_{l+1,m}(\ell\vec{n}, \vec{1}\vec{s}) [C_T^{(\alpha)} A_{l+1,-m}^{q(+)}(1,\ell) - C_A^{(\alpha)} A_{l+1,-m}^{q(-)}(1,\ell)] + \\
 & + \sum_m i^{l-1} (-)^m (pR)^{lq} \beta \gamma_s Y_{lm}((l-1)\vec{n}, \vec{1}\vec{s}) \alpha C_T^{(\alpha)} A_{l,-m}^{q(+)}(1, l-1) - \\
 & \left. - \sum_m i^{l-1} (-)^m (pR)^{lq} \gamma_s Y_{lm}((l-1)\vec{n}, \vec{1}\vec{s}) \alpha C_A^{(\alpha)} A_{l,-m}^{q(-)}(1, l-1) \right\} \quad (2.8)
 \end{aligned}$$

где $A_{LM}^{q(\mp)}(z, \ell) = v_{\mu}^{+} \left(1 + \alpha \vec{\zeta} \frac{\vec{p} \vec{\sigma}}{\varepsilon + m} \right) \vec{\zeta}^q \times$

$$\times \sum_{p+s=\ell} \sqrt{2} \alpha_{ps}^{lq} (-)^{L+l+2} Y_{LM}(\ell[n_q(p\vec{e}, s\vec{v}), T_1^{\frac{1}{2}}], T_2^{\frac{1}{2}}) (1 - \alpha(\vec{\sigma}\vec{v})) \frac{v_{\lambda}}{\sqrt{2}}$$

Гамильтониан β -распада для "уникального" перехода, т.е. перехода с изменением спина ядра $\Delta J = \ell + 1$ и изменением четности $\Delta \pi = (-)^{\ell}$ может быть представлен в виде:

$$H(\alpha) = \sum_{q=0,1} \sum_m i^{\ell(-)^m} (pR)^{\ell q} y_{\ell+1,m}(\ell\vec{n}, 1\vec{3}) [C_T^{(\alpha)} A_{\ell+1,-m}^{q(+)}(1,\ell) - C_A^{(\alpha)} A_{\ell+1,-m}^{q(-)}(1,\ell)] \quad (2.9)$$

В такой записи гамильтонианов ядерной оператор выделяется в виде сферического оператора, т.е. оператор, преобразующегося при вращении по некоторому неприводимому представлению группы вращений.

Запишем наибольшие по величине (при разложении по степеням p^2) матричные элементы, отвечающие за переход $\Delta J = \ell$ ($\ell \geq 0$), в таблицу.

Разрешенные переходы		Первое запрещение	
$\Delta J=0,1; \Delta \pi=-1$	Вариант	$\Delta J=0,1,2; \Delta \pi=-1$	Вариант
$\langle 1 \rangle$	S, V	$\langle \delta s \rangle$	A
		$\langle \beta \delta s \rangle$	P
		$\langle \vec{s} \delta s \rangle$	V
$\langle \vec{s} \rangle$	T, A	$\langle \vec{s} \beta \delta s \rangle$	T
		$Ze^2 \langle (\vec{s} \vec{n}) \rangle$	$\langle \vec{s} \vec{r} \rangle$ T, A
		$Ze^2 \langle \vec{n} \rangle$	$\langle \vec{r} \rangle$ S, V
		$Ze^2 \langle \vec{n} \times \vec{s} \rangle$	$\langle \vec{r} \times \vec{s} \rangle$ T, A
		$Ze^2 \langle Y_{2m}(\vec{n}, \vec{s}) \rangle$	$\langle r Y_{2m}(\vec{n}, \vec{s}) \rangle$ T, A

Переход $\Delta J = \ell, \Delta \pi = (-)^{\ell} \quad (\ell \geq 2)$		
$Ze^2 \langle r^{\ell-1} Y_{\ell m}(\vec{n}) \rangle$	$\langle r^{\ell} Y_{\ell m}(\vec{n}) \rangle$	S, V
$Ze^2 \langle r^{\ell-1} Y_{\ell m}(\ell \vec{n}, \vec{s}) \rangle$	$\langle r^{\ell} Y_{\ell m}(\ell \vec{n}, \vec{s}) \rangle$	T, A
$Ze^2 \langle r^{\ell-1} Y_{\ell+1, m}(\ell \vec{n}, \vec{s}) \rangle$	$\langle r^{\ell} Y_{\ell+1, m}(\ell \vec{n}, \vec{s}) \rangle$	T, A
$Ze^2 \langle r^{\ell-2} \gamma_s Y_{\ell m}((\ell-1) \vec{n}, \vec{s}) \rangle$	$\langle r^{\ell-1} \gamma_s Y_{\ell m}((\ell-1) \vec{n}, \vec{s}) \rangle$	V
$Ze^2 \langle r^{\ell-2} \beta \gamma_s Y_{\ell m}((\ell-1) \vec{n}, \vec{s}) \rangle$	$\langle r^{\ell-1} \beta \gamma_s Y_{\ell m}((\ell-1) \vec{n}, \vec{s}) \rangle$	T

"Уникальный" переход $\Delta J = \ell+1; \Delta \pi = (-)^{\ell} \quad (\ell \geq 1)$		
$Ze^2 \langle r^{\ell-1} Y_{\ell+1, m}(\ell \vec{n}, \vec{s}) \rangle$	$\langle r^{\ell} Y_{\ell+1, m}(\ell \vec{n}, \vec{s}) \rangle$	T, A

Таким образом, запрещенный β -переход $\Delta J = \ell$, $\Delta \pi = (-)^{\ell}$, ($\ell \geq 2$) определяется десятью различными матричными элементами. Заметим, что для больших Z ($Z \geq 40 \div 50$) матричные элементы типа $Z e^2 \langle z^{\ell-1} y_{\ell} \rangle$ больше матричных элементов типа $\langle z^{\ell} y_{\ell} \rangle$. По порядку величины

$$\frac{\rho^{\ell} \langle z^{\ell} y_{\ell} \rangle}{\rho^{\ell-1} \langle z^{\ell-1} y_{\ell} \rangle} \approx \rho R \approx 0,05$$

поэтому матричными элементами типа $\langle z^{\ell} y_{\ell} \rangle$ можно пренебречь, и β -переход определяется только пятью матричными элементами. К этому результату можно также прийти, если в качестве волновой функции взять выражение её для больших Z , см. формулу (I.9). Если же ещё учесть, что β -распад описывается либо вариантами S , T и P , либо V и A , то за запрещенный β -переход $\Delta J = \ell$, $\Delta \pi = (-)^{\ell}$ ($\ell \geq 2$) отвечают лишь четыре различных матричных элемента в случае больших Z и восемь в случае малых.

§ 3. Матрица плотности ансамбля ориентированных ядер
и угловая корреляция

При изучении угловых эффектов для описания ансамбля ориентированных ядер воспользуемся статистической матрицей плотности

ρ . Будем считать, что ядра имеют спин J с проекциями $M = -J, \dots, J$, причём состояние с определенным значением магнитного квантового числа M описывается волновой функцией Ψ_M^J . Элементы матрицы плотности $\rho_{MM'}^J$ определяются:

$$\rho_{MM'}^J = \overline{\Psi_M^J \Psi_{M'}^{J*}} \quad (3.1)$$

где усреднение производится по всем остальным параметрам, характеризующим ансамбль. Матрица плотности ρ^J нормируется условием:

$$\text{Sp } \rho^J = \sum_M \rho_{MM}^J = 1 \quad (3.2)$$

Диагональные элементы $\rho_{MM}^J = a_M$ имеют смысл чисел заполнения, т.е. вероятностей того, что ядро имеет проекцию спина M на выбранную ось квантования.

Разложим матрицу плотности ρ^J по сферическим тензорным операторам $T_{q\alpha}^J$ (см. приложение II):

$$\rho^J = \sum_{q\alpha} \rho_{q\alpha}^J T_{q\alpha}^J \quad (3.3)$$

где
$$\rho_{q\alpha}^J = \sum_{M-M'=\alpha} (-)^{J-M'} (JJM, -M' | q\alpha) \rho_{MM'}^J$$

Коэффициенты разложения $\rho_{q\alpha}^J$ обычно называются неприводимыми тензорами поляризации. Если заданы числа заполнения вдоль некоторой оси, единичный вектор которой обозначим через \vec{J} , то в этом случае:

$$\rho_{q\alpha}^J = \rho_{q0}^J (-)^{\alpha} Y_{q,\alpha}(\vec{J}) \quad (3.4)$$

где
$$\rho_{q0}^J = \sum_M (-)^{J-M} (JJM, -M | q0) a_M$$

Величины ρ_{q0}^J с точностью до множителя, зависящего только от J и q , совпадают с обычно вводимыми числами f_q , определяющими степень поляризации.

Вместо величин ρ_{q0}^J удобно ввести степени поляризации ρ_q , связанные с ρ_{q0}^J соотношением:

$$\rho_q = \frac{\rho_{q0}^J}{(JJJ-J|q0)} = \sqrt{\frac{(2J+q+1)!(2J-q)!}{[(2J)!]^2(2q+1)}} \rho_{q0}^J \quad (3.5)$$

Это соотношение выражает тот факт, что степень поляризации не может быть больше единицы, т.е. $\rho_q \leq 1$.

Пусть теперь ядра со спином J_i переходят в результате

распада, описываемого гамильтонианом H , в некоторые другие ядра со спином J_f . Тогда элементы матрицы плотности дочернего ядра определяются:

$$\rho_{NN'}^{J_f} = \sum_{MM'} \langle J_f N | H | J_i M \rangle \rho_{MM'}^{J_i} \langle J_i M' | H^\dagger | J_f N' \rangle \quad (3.6)$$

Гамильтониан H всегда может быть представлен в виде

$$H = \sum_{\ell m} (-)^m A_{-m}^\ell B_m^\ell \quad (3.7)$$

где будем считать, что B_m^ℓ ядерный оператор, действующий на волновые функции ядра и преобразующийся по непроводимому представлению группы вращений порядка ℓ . A_{-m}^ℓ - функция, не содержащая ядерных операторов, но она может зависеть от операторов всех других частиц, участвующих в реакции.

Матричные элементы от оператора B_m^ℓ определяются (см. например [3])

$$\begin{aligned} \langle J_1 N_1 | B_m^\ell | J_2 N_2 \rangle &= (-)^{J_2 - N_2} (J_1 J_2 N_1 - N_2 | \ell m) \frac{\langle J_1 || B^\ell || J_2 \rangle}{\sqrt{2\ell+1}} \\ \langle J_1 N_1 | B_m^{\ell+} | J_2 N_2 \rangle &= (-)^{J_1 - N_1} (J_2 J_1 N_2 - N_1 | \ell m) \frac{\langle J_1 || B^\ell || J_2 \rangle^*}{\sqrt{2\ell+1}} \end{aligned} \quad (3.8)$$

где $\langle J_1 || B^\ell || J_2 \rangle$ и $\langle J_2 || B^\ell || J_1 \rangle$ уже не зависят от магнитных квантовых чисел.

Вводя неприводимые тензоры поляризации начального и конечного состояний, формулу (3.6) можно преобразовать:

$$\begin{aligned}
 (-)^{J_f} \rho_{q, \alpha}^{J_f} &= \sum_{q_0} \sum_L \sum_{l_1} \sum_{l_2} (-)^{l_1+L} \sqrt{(2L+1)(2q_0+1)} \begin{Bmatrix} J_f & J_f & q \\ J_i & J_i & q_0 \\ l_1 & l_2 & L \end{Bmatrix} \times \\
 &\times \langle J_f \| B^{l_1} \| J_i \rangle \langle J_f \| B^{l_2} \| J_i \rangle \sum_{M+\alpha_0=2}^* (L q_0 M \alpha_0 | q \alpha) Y_{LM}^{(l_1 l_2)} (-)^{J_i} \rho_{q_0, \alpha_0}^{J_i}
 \end{aligned}
 \tag{3.9}$$

где

$$\begin{Bmatrix} J_1 & J_2 & J_3 \\ l_1 & l_2 & l_3 \\ K_1 & K_2 & K_3 \end{Bmatrix} \quad \text{-симметричный коэффициент Фано}^{I7}.$$

Матрица плотности дочернего ядра запишется

$$\rho^{J_f} = \sum_{q\alpha} \rho_{q\alpha}^{J_f} T_{q\alpha}^{J_f}$$

причём $\rho_{q\alpha}^{J_f}$ берутся из (3.9). Так как ρ^{J_f} ещё не нормирована условием (3.2) вероятность процесса пропорциональна

$$W(\alpha) \sim Sp \rho^{J_f} = \sqrt{2J_f+1} \rho_{00}^{J_f}$$

Из формулы (3.9) получим

$$\begin{aligned}
 Sp \rho^{J_f} &= \sum_{q_0} (-)^{q_0} \sum_{l_1 l_2} (-)^{J_f+J_i} \begin{Bmatrix} J_i & J_i & q_0 \\ l_1 & l_2 & J_f \end{Bmatrix} \times \\
 &\times \langle J_f \| B^{l_1} \| J_i \rangle \langle J_f \| B^{l_2} \| J_i \rangle \sum_{\alpha_0}^{J_i} \rho_{q_0, \alpha_0}^{J_i} Y_{q_0, \alpha_0}^{(l_1 l_2)}
 \end{aligned}
 \tag{3.10}$$

где

$$\begin{Bmatrix} J_i & J_i & q_0 \\ l_1 & l_2 & J_f \end{Bmatrix} \quad \text{-симметричный коэффициент Рака}^{I7}.$$

Заметим, что $Sp \rho^{J_f}$ играет роль квадрата модуля матричного элемента, и поэтому точное выражение для дифференциальной вероятности распада дается формулой

$$d\omega = \frac{2\pi}{\hbar} Sp \rho^{J_f} \rho_E$$

где ρ_E -объем в фазовом пространстве образовавшихся частиц,

отнесенный к единичному интервалу полной энергии. Если же интересоваться только угловыми корреляциями, то множитель $\frac{2\pi}{k} \rho E$ можно нигде не учитывать.

При исследовании каскадного распада (например, $\beta - \gamma$ -корреляция при β -распаде ориентированных ядер), формулу (3.9) надо применить последовательно несколько раз.

В качестве примера приведем выражение для углового распределения γ -радиации из поляризованных ядер. Гамильтониан радиационного перехода записывается в виде:

$$H = (\vec{A} \vec{N}) = \sum_{\lambda \mu} (-)^{\mu} Y_{\lambda - \mu}(\lambda \vec{\gamma}, 1 \vec{e}) U_{\lambda \mu}$$

где $\vec{A} = \vec{c} A \exp i k(\vec{\gamma} \vec{e})$ - вектор-потенциал электромагнитного поля, $\vec{c} = \cos \alpha \vec{e}_1 - i \sin \alpha \vec{e}_2$ - вектор поляризации, A_0 - нормировочная постоянная, k - величина импульса γ -кванта, $\vec{\gamma}$ - единичный вектор в направлении импульса γ -кванта, \vec{N} и $U_{\lambda \mu}$ - ядерные операторы, связанные друг с другом простыми соотношениями, явный вид которых не понадобится при изучении корреляционных эффектов, $Y_{\lambda \mu}(\lambda \vec{\gamma}, 1 \vec{e})$ - обобщенная сферическая гармоника (см. приложение III).

Угловое распределение магнитных 2^{λ} -польных γ -квантов при радиационном переходе $J \rightarrow J'$ описывается формулой:

$$W(\alpha) \sim \sum_{q-\text{четное}} \left\{ \begin{matrix} J' & J & \lambda \\ q & \lambda & J \end{matrix} \right\} (\lambda \lambda - 1, 1 | q 0) \sum_{\alpha} Y_{q\alpha}(\vec{\gamma}) \rho_{q\alpha}^J +$$

$$+ \sin 2\alpha \sum_{q-\text{нечетное}} \left\{ \begin{matrix} J' & J & \lambda \\ q & \lambda & J \end{matrix} \right\} (\lambda \lambda - 1, 1 | q 0) \sum_{\alpha} Y_{q\alpha}(\vec{\gamma}) \rho_{q\alpha}^J \quad (3.11)$$

Первый член описывает неполяризованное излучение, а второй эллиптически-поляризованное (если $\alpha = \frac{\pi}{4}$, то - циркулярно-поляризованное). Этот результат совпадает с результатом I8. Чтобы получить угловое распределение электрических 2^{λ} -х полевых γ -квантов необходимо произвести замену $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2} + \alpha$.

§ 4. Угловые корреляции при запрещенном β -распаде ориентированных ядер

Расчёт корреляционных эффектов сводится к вычислению элементов матрицы плотности дочернего ядра по формуле (3.9). Гамильтониан запрещенного β -распада, представленный в виде (3.7), даётся выражениями (2.8) и (2.9). В формуле (3.9) для $\rho_{q\alpha}^{J_f}$ стоит сумма по всем матричным элементам, составленным в квадратичные комбинации типа:

$$\langle J_f \| (pR)^{L_1} Y_{L_1}(\hat{e}_1, \vec{n}_1, \hat{r}_1, \vec{s}) \| J_i \rangle \langle J_f \| (pR)^{L_2} Y_{L_2}(\hat{e}_2, \vec{n}_2, \hat{r}_2, \vec{s}) \| J_i \rangle^* \quad (4.1)$$

Нам будет достаточно найти $Y_{LM}^{(L_1, L_2)}$, соответствующую этой произвольной комбинации матричных элементов, а все остальные члены будут являться лишь частными случаями этого общего выражения.

Итак вычислим $Y_{LM}^{(L_1, L_2)}$, соответствующую произвольной ком-

бинации матричных элементов (4.1)

$$y_{LM}^{(L_1, L_2)} = \sum_{M_1 + M_2 = M} (L_1 L_2 M_1 M_2 | LM) A_{L_1 M_1}^{q_1(\vec{\zeta}_1)}(\vec{r}_1, \ell_1) (-)^{M_2} A_{L_2 M_2}^{q_2(\vec{\zeta}_2)}(\vec{r}_2, \ell_2) \quad (4.2)$$

Это выражение надо просуммировать по проекциям спина электрона и нейтрино, а также проинтегрировать по направлениям импульса нейтрино.

Используя методику, развитую Левинсоном (см. приложение I), можно получить:

$$y_{LM}^{(L_1, L_2)} = Y_{LM}(\vec{e}) \cdot Q_{(\alpha)}^L \begin{pmatrix} L_1 \ell_1 q_1 r_1 \vec{\zeta}_1 \\ L_2 \ell_2 q_2 r_2 \vec{\zeta}_2 \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

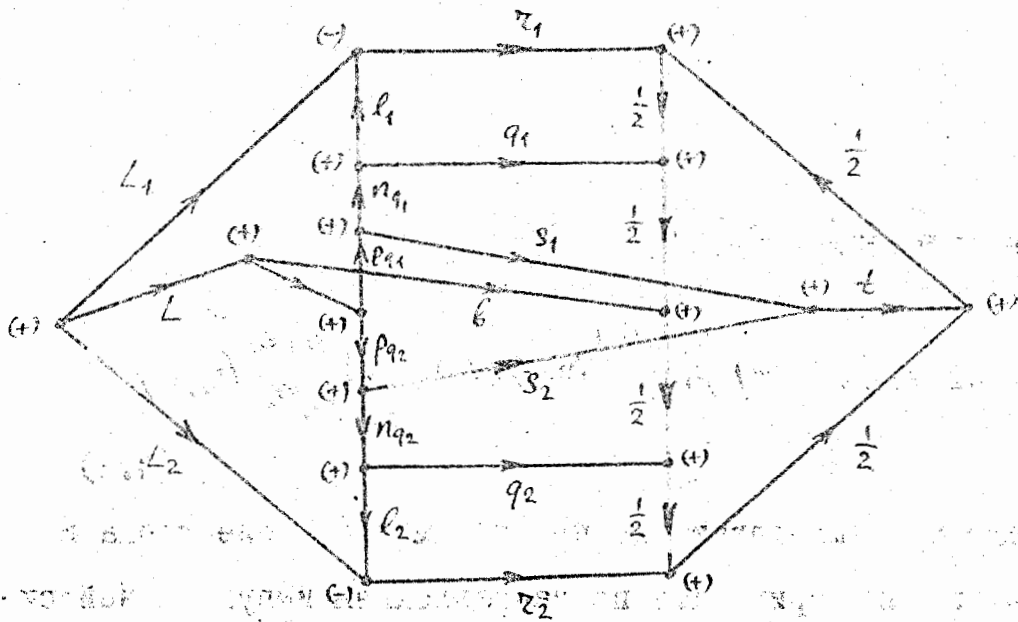
где $Q_{(\alpha)}^L \begin{pmatrix} L_1 \ell_1 q_1 r_1 \vec{\zeta}_1 \\ L_2 \ell_2 q_2 r_2 \vec{\zeta}_2 \end{pmatrix} = 16\pi \vec{\zeta}_1^{q_1} \vec{\zeta}_2^{q_2} \times$

$$\times \sum_{p_1 + s_1 = \ell_1} \sum_{p_2 + s_2 = \ell_2} \alpha_{p_1 s_1}^{\ell_1} \alpha_{p_2 s_2}^{\ell_2} [(\varepsilon + m) + \vec{\zeta}_1 \vec{\zeta}_2 (\varepsilon - m)] \sum_b \left(\frac{\alpha(\vec{\zeta}_1 + \vec{\zeta}_2) p}{(\varepsilon + m) + \vec{\zeta}_1 \vec{\zeta}_2 (\varepsilon - m)} \right)^b \times$$

$$\times \sum_t (-\alpha)^t \sum_p \sqrt{(2L+1)(2n_{q_1}+1)(2n_{q_2}+1)(2\ell_1+1)(2\ell_2+1)(2b+1)(2q_1+1)(2q_2+1)(2r_1+1)(2r_2+1)} \times$$

$$\times (s_1 s_2 00 | t_0) (p_{q_1} p_{q_2} 00 | p_0) (L 0 0 0 | p_0) S^L \begin{pmatrix} L_1 \ell_1 r_1 q_1 n_{q_1} p_{q_1} s_1 \\ L_2 \ell_2 r_2 q_2 n_{q_2} p_{q_2} s_2 \\ b, t, p \end{pmatrix}$$

S^L , согласно обозначениям Левинсона, представляет собой граф следующего вида:



S^L - есть просто число, зависящее от величин L_1, L_2, l_1, l_2 , и т.д., и его можно вычислить в любом конкретном случае, Например, его можно представить в виде:

$$S^L = \sum_{j_1} \sum_{j_2} \sum_{j_3} (2j_1+1)(2j_2+1)(2j_3+1) (-1)^{q_1+q_2+l_1+l_2+j_1+\frac{1}{2}+L_1} \times$$

$$\begin{Bmatrix} j_1, \frac{1}{2}, L_1 \\ n_{q_1}, q_1, l_1 \\ \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, r_1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} j_2, \frac{1}{2}, L_2 \\ n_{q_2}, q_2, l_2 \\ \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, r_2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} j_1, j_2, p \\ L_1, L_2, L \\ \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \beta \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} s_1, s_2, t \\ \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, j_3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} n_{q_1}, p_{q_1}, s_1 \\ j_1, \frac{1}{2}, j_1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} n_{q_2}, p_{q_2}, s_2 \\ j_2, \frac{1}{2}, j_2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} p_{q_1}, p_{q_2}, p \\ j_1, j_1, j_3 \end{Bmatrix} \quad (4.4)$$

Заметим, что коэффициенты Фано табулированы в работах 19, 20, а коэффициенты Рака в 17.

Легко видеть, что S^L обладает следующей симметрией

$$S^L \left(\begin{matrix} L_1, l_1, q_1, r_1, p_{q_1}, s_1 \\ L_2, l_2, q_2, r_2, p_{q_2}, s_2 \end{matrix} ; t, p \right) = S^L \left(\begin{matrix} L_2, l_2, q_2, r_2, p_{q_2}, s_2 \\ L_1, l_1, q_1, r_1, p_{q_1}, s_1 \end{matrix} ; t, p \right) \quad (4.5)$$

$Q_{(\alpha)}^L(L_1, l_1, q_1, r_1, \xi_1; L_2, l_2, q_2, r_2, \xi_2)$ - представляет собой полином степени $(l_1 + l_2)$ от $\frac{\kappa}{p}$ и обладает симметрией

$$Q_{(\alpha)}^L \left(\begin{matrix} L_1, l_1, q_1, r_1, \xi_1 \\ L_2, l_2, q_2, r_2, \xi_2 \end{matrix} \right) = Q_{(\alpha)}^L \left(\begin{matrix} L_2, l_2, q_2, r_2, \xi_2 \\ L_1, l_1, q_1, r_1, \xi_1 \end{matrix} \right) \quad (4.6)$$

Подставляя $Y_{LM}^{(L_1, L_2)}$ из (4.3) в формулу (3.9) и суммируя по всем матричным элементам, отвечающим за β -переход, получим:

$$(-)^{J_f} \rho_{q_1, x}^{J_f} = \sum_{q_0} \sum_L \rho_{q_0}^{J_i} Y_{q_0} (L \vec{e}, q_0 \vec{J}_i) R_{q_0}^L \quad (4.7)$$

где $R_{q_0}^L = \sum_{\text{по всем матричным элементам}} (-)^{L+L_1} \frac{1}{\sqrt{(2L+1)(2q_0+1)}} \begin{Bmatrix} J_f & J_f & q \\ J_i & J_i & q_0 \\ L_1 & L_2 & L \end{Bmatrix} \sum_{q_1 q_2} Q_{(\alpha)}^L (L_1 l_1 q_1 \vec{z}_1, L_2 l_2 q_2 \vec{z}_2)$

$$\times \begin{cases} 2 \operatorname{Re} [C_1^{(\alpha)} C_2^{(\alpha)*} i^{l_1-l_2} \langle J_f \| (PR) Y_{L_1}^{q_1} (l_1 \vec{n}_1, z_1 \vec{s}) \| J_i \rangle \langle J_f \| (PR) Y_{L_2}^{q_2} (l_2 \vec{n}_2, z_2 \vec{s}) \| J_i \rangle^* \\ \quad \text{если } L+q+q_0 = \text{четное} \\ 2i \operatorname{Im} [C_1^{(\alpha)} C_2^{(\alpha)*} i^{l_1-l_2} \langle J_f \| (PR) Y_{L_1}^{q_1} (l_1 \vec{n}_1, z_1 \vec{s}) \| J_i \rangle \langle J_f \| (PR) Y_{L_2}^{q_2} (l_2 \vec{n}_2, z_2 \vec{s}) \| J_i \rangle^* \\ \quad \text{если } L+q+q_0 = \text{нечетное} \end{cases}$$

Здесь под $C_1^{(\alpha)}$ понимаем ту константу взаимодействия, которая стоит перед матричным элементом $\langle J_f \| (PR) Y_{L_1}^{q_1} (l_1 \vec{n}_1, z_1 \vec{s}) \| J_i \rangle$ в гамильтониане (2.8) и (2.9).

Итак формула (4.7) даёт выражение для тензоров поляризации дочернего ядра после β -перехода произвольного порядка запрещения. Теперь с помощью этой формулы легко можно рассчитать любые корреляционные эффекты.

Угловое распределение электронов, изучаемых из поляризованных ядер, дается формулой:

$$W(\alpha) \sim \sum_{q_0} \rho_{q_0}^{J_i} \frac{(-)^{q_0}}{\sqrt{2q_0+1}} P_{q_0}(\vec{e} \vec{J}_i) R_{q_0}^{q_0} \quad (4.8)$$

где q_0 изменяется от нуля до меньшей из величин $2J_i$ или $2(l+1)$.

Выпишем ещё формулы для β - γ -корреляции, с учётом поляризации материнских ядер при излучении неполяризованных γ -квантов мультипольности λ при радиационном переходе $J_f \rightarrow J_f'$

$$W(\alpha) \sim \sum_{q=\text{четные}} \sum_{q_0} \sum_L \int_{q_0,0}^{J_i} P(L\vec{e}, q_0 \vec{J}_i | q\vec{\gamma}) (\lambda\lambda-1,1|q_0) \left\{ \begin{matrix} J_f' \lambda J_f \\ q J_f \lambda \end{matrix} \right\} R_{qq}^L \quad (4.9)$$

где $P(L\vec{e}, q_0 \vec{J}_i | q\vec{\gamma})$ - обобщенный полином Лежандра (см. приложение III).

Если материнские ядра не поляризованы, то

$$W(\alpha) \sim \sum_{q=\text{четные}} P_q(\vec{e}\vec{\gamma}) (\lambda\lambda-1,1|q_0) \left\{ \begin{matrix} J_f' \lambda J_f \\ q J_f \lambda \end{matrix} \right\} R_{q,0}^q \quad (4.10)$$

Заметим, что в то время как при разрешенных переходах β - γ -корреляция при распаде неполяризованных ядер отсутствует, при запрещенных переходах она имеет место. Наличие β - γ -корреляции говорит о том, что в результате β -перехода дочернее ядро поляризуется, причём направление поляризации определяется вектором \vec{e} , и в его матрице плотности оказываются чётные тензоры поляризации. При разрешенных переходах в матрице плотности дочернего ядра может быть отличным от нуля лишь тензор поляризации первого ранга, так как уносимый электроном момент определяется

только его спином. При запрещенных переходах электрон уносит ещё и большой орбитальный момент, что и обуславливает сильную поляризацию дочерних ядер.

З а к л ю ч е н и е

В работе получен простой вид волновой функции электрона с учётом кулоновского поля. Это позволило записать гамильтониан β -распада в удобной для расчёта форме и с помощью методики, развитой Левинсоном, рассчитать угловые распределения электронов и β - γ -корреляцию при β -переходах произвольного порядка запрещения. Как уже говорилось, учёт поляризации электронов и β - ν -корреляции может быть проведен по той же схеме.

Использование матрицы плотности ансамбля ориентированных ядер для учёта поляризационных эффектов обладает тем преимуществом, что позволяет сразу выделить угловую зависимость какого-либо эффекта от остальных параметров. Результаты § 3 можно применять не только в теории β -распада, но также при исследовании всех распадов и реакций, где имеет место закон преобразования матрицы плотности (3.6):

В заключение приношу глубокую благодарность профессору Я.А. Смородинскому за постановку задачи и постоянный интерес к ней, Л.Д. Пузикову за большую помощь при выполнении работы, Л.А. Максимову за ценные замечания и дискуссии.

П Р И Л О Ж Е Н И Е

I. Методика Левинсона ^{X/}

Пусть имеется сумма по магнитным квантовым числам от некоторого числа коэффициентов Клебша-Гордона. Введём в рассмотрение симметричный коэффициент Вигнера, связанный с унитарным коэффициентом Клебша-Гордона соотношением:

$$(j_1 j_2 m_1 m_2 | j_1 j_2 j m) = \sqrt{(j)} (-)^{j_1 - j_2 + j} (-)^{j - m} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & -m \end{pmatrix} \quad (I.1)$$

где будем считать $(j) \equiv 2j+1$. Отметим основные свойства симметричных коэффициентов Вигнера:

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} j_2 & j_3 & j_1 \\ m_2 & m_3 & m_1 \end{pmatrix} = (-)^{j_1 + j_2 + j_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_3 & j_2 \\ m_1 & m_3 & m_2 \end{pmatrix} = (-)^{j_1 + j_2 + j_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ -m_1 & -m_2 & -m_3 \end{pmatrix} \quad (I.2)$$

$$\sum_{m_1, m_2} (j) (-)^{j_1 - m_1 + j_2 - m_2} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j' \\ -m_1 & -m_2 & -m' \end{pmatrix} = \delta_{j, j'} (-)^{j - m} \delta_{m, m'} \quad (I.3)$$

$$\sum_{j, m} (j) (-)^{j - m} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ -m_1 & -m_2 & -m \end{pmatrix} = (-)^{j_1 - m_1} \delta_{m, m_1} (-)^{j_2 - m_2} \delta_{m, m_2} \quad (I.4)$$

Поставим в соответствие с симметричным коэффициентом Вигнера узел с тремя линиями:

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & -m_3 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{matrix} j_1 & & j_3 \\ & \searrow & \nearrow \\ & (+) & \\ & \nearrow & \searrow \\ j_2 & & \end{matrix} \quad \text{или} \quad \begin{matrix} j_2 & & j_3 \\ & \searrow & \nearrow \\ & (-) & \\ & \nearrow & \searrow \\ j_1 & & \end{matrix} \quad (I.5)$$

^{X/} Здесь изложены результаты работ Левинсона ^{II}, причём все доказательства опущены.

причём условимся, что линия j_i будет исходящей из узла, если m_i стоит со знаком плюс, и входящей, если m_i стоит со знаком минус, и что узел, берется со знаком (+) при расположении $j_1 j_2 j_3$ в направлении против часовой стрелки и со знаком (-) в противном случае. Соотношения (I.2) при этом запишутся:

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{c} j_1 \\ (+) \swarrow \\ \downarrow j_2 \\ \nwarrow j_3 \end{array} = (-) \begin{array}{c} j_1 + j_2 + j_3 \\ (+) \swarrow \\ \downarrow j_1 \\ \nwarrow j_3 \end{array} = (-) \begin{array}{c} j_1 + j_2 + j_3 \\ (+) \swarrow \\ \downarrow j_2 \\ \nwarrow j_3 \end{array} = (-) \begin{array}{c} j_1 + j_2 + j_3 \\ (+) \swarrow \\ \downarrow j_3 \\ \nwarrow j_1 \end{array} \\
 & \hspace{15em} (I.2a)
 \end{aligned}$$

Суммирование по магнитному числу m двух линий с одинаковым аргументом j поставим в соответствие соединению этих линий, причём обязательно наличие фазового множителя $(-)^{j-m}$, а линии должны входить одна в другую. Например:

$$\sum_{m_1, m_2, \chi_2} (-)^{j_1 - m_1 + j_2 - m_2 + q_2 - \chi_2} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & -m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & q_1 & q_2 \\ -m_1 & \chi_1 & \chi_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_2 & l_1 & q_2 \\ -m_2 & \chi_1 & \chi_2 \end{pmatrix} = \begin{array}{c} q_1 \swarrow (+) \quad j_1 \quad (+) \swarrow \\ \downarrow q_2 \quad \downarrow j_2 \\ \nwarrow (-) \quad \nwarrow l_1 \end{array} \quad (I.6)$$

Получившуюся фигуру назовем графом, в котором аргументы $j_1 j_2 q_2$ назовем замкнутыми линиями, а аргументы l_1, q_1 и j_1 , по магнитным квантовым числам которых нет суммирования, свободными квантованными числами, или свободными концами.

Таким образом, любой сумме по магнитным квантовым числам от симметричных коэффициентов Вигнера можно поставить в соответствие

определенный граф. Графы могут быть незамкнутыми (по некоторым магнитным квантовым числам нет суммирования), как в приведенном примере, и замкнутыми (по всем магнитным квантовым числам произведено суммирование). Примерами замкнутых графов могут служить симметричные коэффициенты Рака и Фано 17,19,20:

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{matrix} \right\} = \begin{matrix} (-) \\ \swarrow \quad \searrow \\ \text{---} \quad \text{---} \\ \swarrow \quad \searrow \\ (-) \end{matrix} \quad ; \quad \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ l_1 & l_2 & l_3 \\ \kappa_1 & \kappa_2 & \kappa_3 \end{matrix} \right\} = \begin{matrix} (-) & & (+) \\ \swarrow & & \searrow \\ \text{---} & & \text{---} \\ \swarrow & & \searrow \\ (-) & & (+) \end{matrix} \quad (I.7)$$

Будем обозначать замкнутый граф от произвольного числа коэффициентов Вигнера блоком

$$F = \boxed{F} \quad \text{или} \quad F = \begin{matrix} \text{---} \quad \text{---} \\ \text{---} \quad \text{---} \\ \text{---} \quad \text{---} \end{matrix} \quad (I.8)$$

если необходимо видеть зависимость графа от аргументов j_1, j_2, \dots, j_n , q_1, q_2 . Незамкнутые графы со свободными магнитными числами у аргументов j_1, j_2, \dots, j_n будем обозначать:

$$F \left(\begin{matrix} j_1 & \dots & j_n \\ m_1 & \dots & m_n \end{matrix} \right) = \boxed{F} \begin{matrix} \text{---} \rightarrow j_1 \\ \text{---} \rightarrow j_2 \\ \text{---} \rightarrow j_n \end{matrix} \quad (I.9)$$

Отметим два очевидных, но важных для учёта фазового множителя свойства замкнутых линий и узлов в графах:

$$1) \quad \boxed{F} \begin{matrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{matrix} \rightarrow j = (-)^{2j} \quad \boxed{F} \begin{matrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{matrix} \rightarrow j ; \quad 2) \quad \boxed{F} \begin{matrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \end{matrix} \rightarrow (-) = (-)^{j_1+j_2+j_3} \quad \boxed{F} \begin{matrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} j_1 \\ j_2 \\ j_3 \end{matrix} \rightarrow (+) \quad (I.10)$$

Итак, любая сумма от коэффициентов Вигнера представима в виде замкнутого или незамкнутого графа. Рассмотрим незамкнутые графы. Так как они, вообще говоря, могут иметь очень сложную структуру, то возникает задача выделить наиболее простую комбинацию из свободных магнитных квантовых чисел.

Наиболее простой комбинацией свободных магнитных чисел являются так называемые обобщенные коэффициенты Вигнера

$$V_{a_1 \dots a_{n-3}} \begin{pmatrix} j_1 \dots j_n \\ m_1 \dots m_n \end{pmatrix} = \begin{array}{c} \begin{array}{c} j_3 \quad j_4 \\ \nearrow \quad \nearrow \\ (+) \quad (-) \\ a_1 \quad a_2 \\ \searrow \quad \searrow \\ j_2 \quad j_1 \\ (+) \quad (-) \end{array} \quad \dots \quad \begin{array}{c} j_{n-1} \\ \nearrow \quad \searrow \\ (-) \quad (-) \\ a_{n-3} \\ \searrow \quad \searrow \\ j_n \end{array} \end{array} \quad (I.II)$$

где все m_i взяты со знаком плюс. Ориентация узлов и параметров a_i неопределенна, но фиксирована в каждом отдельном случае. Способ связи аргументов j_1, \dots, j_n параметрами выбирается из соображений удобства в каждом конкретном случае. Обобщенные коэффициенты Вигнера отличны от нуля при условиях:

- а) j_1, \dots, j_n образуют многоугольник с целым периметром,
- б) $m_1 + \dots + m_n = 0$

Отметим основные свойства обобщенных коэффициентов Вигнера:

$$V_{a_1 \dots a_{n-3}} \begin{pmatrix} j_1 \dots j_n \\ m_1 \dots m_n \end{pmatrix} = (-1)^{j_1 + \dots + j_n} V_{a_1 \dots a_{n-3}} \begin{pmatrix} j_1 \dots j_n \\ -m_1 \dots -m_n \end{pmatrix} \quad (I.I2)$$

$$\sum_{m_1 \dots m_n} (-1)^{\sum_{i=1}^n (j_i - m_i)} V_{a_1 \dots a_{n-3}} \left(\begin{matrix} j_1 \dots j_n \\ m_1 \dots m_n \end{matrix} \right) V_{a'_1 \dots a'_{n-3}} \left(\begin{matrix} j_1 \dots j_n \\ -m_1 \dots -m_n \end{matrix} \right) = \prod_{i=1}^{n-3} \frac{\delta_{a_i a'_i}}{(a_i)}$$

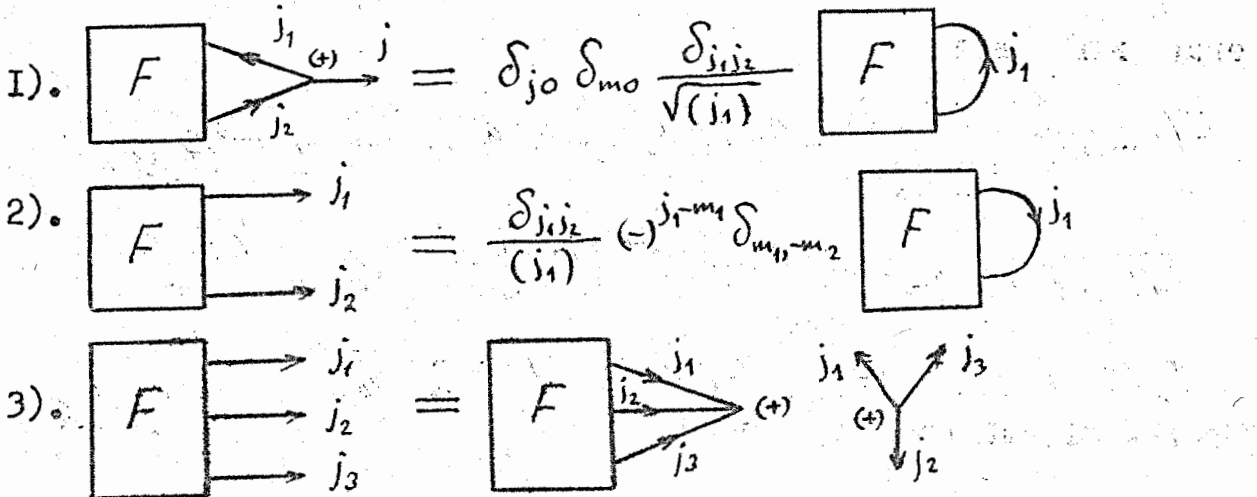
$$\sum_{a_1 \dots a_{n-3}} (a_1) \dots (a_{n-3}) V_{a_1 \dots a_{n-3}} \left(\begin{matrix} j_1 \dots j_n \\ m_1 \dots m_n \end{matrix} \right) V_{a_1 \dots a_{n-3}} \left(\begin{matrix} j_1 \dots j_n \\ -m'_1 \dots -m'_n \end{matrix} \right) = \prod_{i=1}^n (-1)^{j_i - m_i} \delta_{m_i m'_i} \quad (\text{I.13})$$

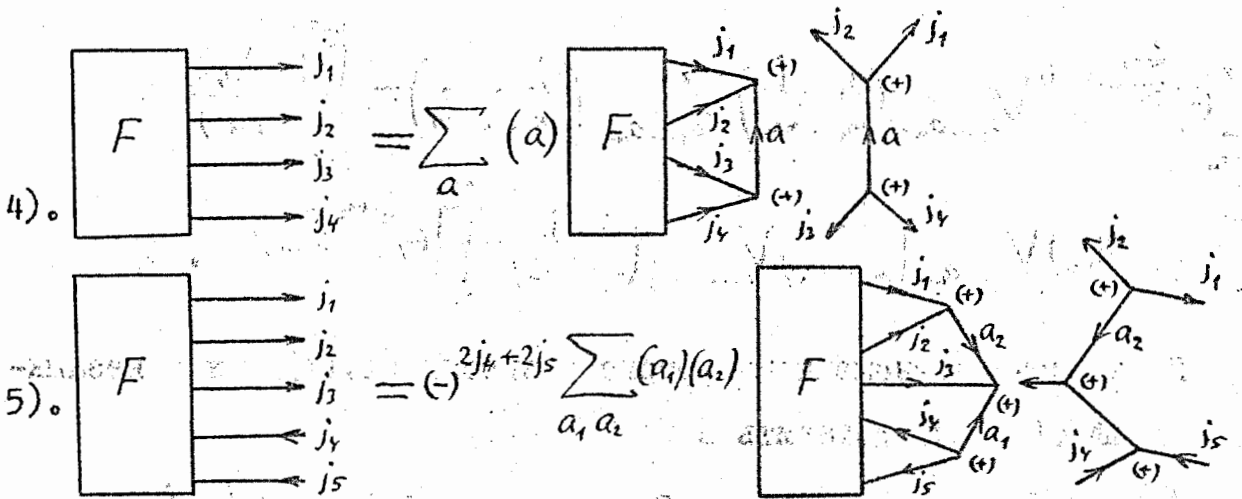
Пользуясь соотношениями ортогональности (I.13) можно незамкнутый граф (I.9) представить в виде:

$$F \left(\begin{matrix} j_1 \dots j_n \\ m_1 \dots m_n \end{matrix} \right) = \sum_{a_1 \dots a_{n-3}} (a_1) \dots (a_{n-3}) R(a_1 \dots a_{n-3}; j_1 \dots j_n) V_{a_1 \dots a_{n-3}} \left(\begin{matrix} j_1 \dots j_n \\ m_1 \dots m_n \end{matrix} \right) \quad (\text{I.14})$$

где $R(a_1 \dots a_{n-3}; j_1 \dots j_n) = \sum_{m_1 \dots m_n} (-1)^{\sum_{i=1}^n (j_i - m_i)} F \left(\begin{matrix} j_1 \dots j_n \\ m_1 \dots m_n \end{matrix} \right) V_{a_1 \dots a_{n-3}} \left(\begin{matrix} j_1 \dots j_n \\ -m_1 \dots -m_n \end{matrix} \right)$
 причём $R(a_1 \dots a_{n-3}; j_1 \dots j_n)$ уже является замкнутым графом. Заметим, если в графе $F \left(\begin{matrix} j_1 \dots j_n \\ m_1 \dots m_n \end{matrix} \right)$ часть свободных магнитных чисел стоит со знаком минус, то в этом случае правую часть формулы (I.14) надо домножить на $(-1)^{\sum_i' 2j_i}$, где сумма \sum_i' берется по j_i , соответствующим этим магнитным числам.

Приведём ряд частных случаев, часто встречающихся на практике.





Таким образом, любой незамкнутый граф можно представить в виде суммы произведений замкнутых графов на обобщенные коэффициенты Вигнера.

Вычисление замкнутых графов производится путем представления их в виде суммы от табулированных коэффициентов Рака и Фано. В связи с этим введём так называемую операцию разрезания графов. Граф F называется разрезаемым по линиям j_1, \dots, j_n , если он представим в виде:

$$F(j_1, \dots, j_n) = \boxed{F} = \boxed{F_1} \begin{array}{c} \xrightarrow{j_1} \\ \xrightarrow{j_2} \\ \vdots \\ \xrightarrow{j_n} \end{array} \boxed{F_2} \quad (I.15)$$

Пользуясь соотношениями ортогональности (I.13) граф F можно представить в виде

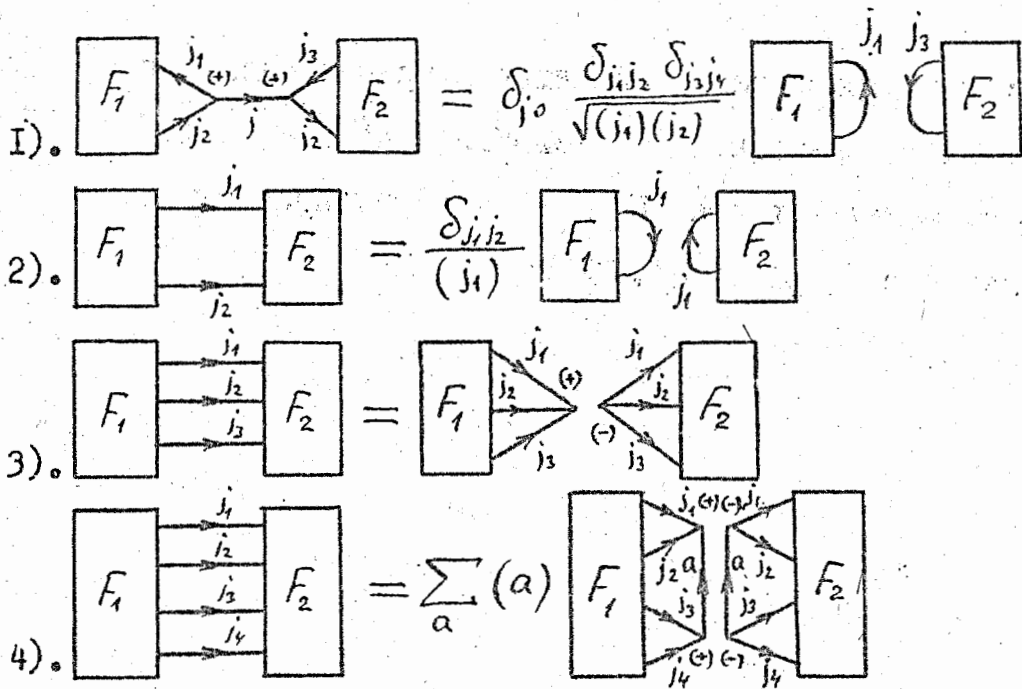
$$F(j_1, \dots, j_n) = \sum_{a_1, \dots, a_{n-3}} (a_1) \dots (a_{n-3}) F_1(j_1, \dots, j_n; a_1, \dots, a_{n-3}) F_2(j_1, \dots, j_n; a_1, \dots, a_{n-3}) \quad (I.16)$$

где

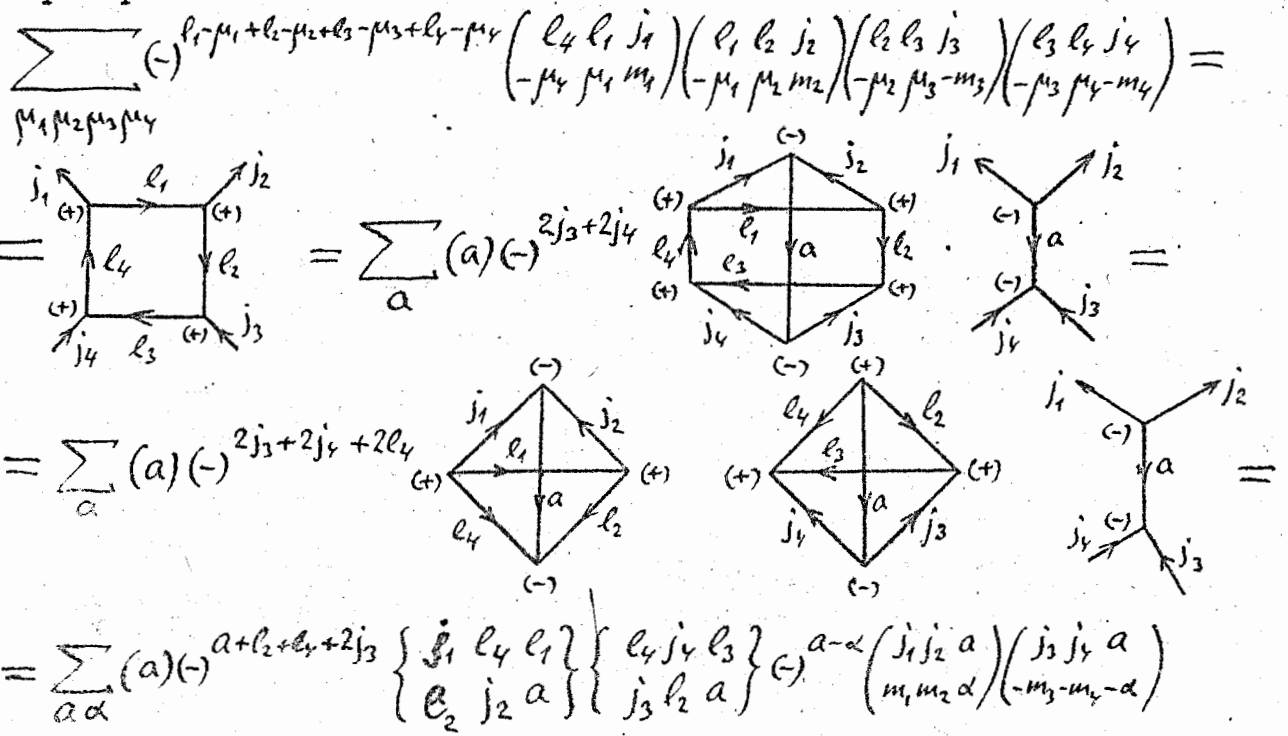
$$F_1(j_1, \dots, j_n; a_1, \dots, a_{n-3}) = \sum_{m_1, \dots, m_n} (-1)^{\sum_{i=1}^n (j_i - m_i)} F_1(j_1, \dots, j_n; m_1, \dots, m_n) V_{a_1, \dots, a_{n-3}} \begin{pmatrix} j_1, \dots, j_n \\ -m_1, \dots, -m_n \end{pmatrix}$$

$$F_2(j_1, \dots, j_n; a_1, \dots, a_{n-3}) = \sum_{m_1, \dots, m_n} (-1)^{\sum_{i=1}^n (j_i - m_i)} F_2(j_1, \dots, j_n; m_1, \dots, m_n) V_{a_1, \dots, a_{n-3}} \begin{pmatrix} j_1, \dots, j_n \\ m_1, \dots, m_n \end{pmatrix}$$

Приведём ряд частных случаев:



Путем разрезания замкнутых графов получаются графы более простой структуры. Последовательным разрезанием граф любой сложности можно свести к сумме от симметричных коэффициентов Рака и Фано (I.7). В качестве иллюстрации изложенной методики приведем пример:



Суммирование по параметрам произведений графов является действием, обратным разрезанию и основано на свойстве (I.13) обобщенных коэффициентов Вигнера. Поэтому при суммировании по параметрам используется формула (I.16).

II. ТЕНЗОРНЫЕ СФЕРИЧЕСКИЕ ОПЕРАТОРЫ^{xx/}

Пусть v_{σ}^s ($\sigma = -s, \dots, s$) ортонормированный спинор в пространстве спина S . Спинор v_{σ}^s записывается в виде столбца из $(2S+1)$ чисел, которые будем обозначать $(v_{\sigma}^s)_{\mu}$, где μ так называемый спинорный индекс, принимающий значения $-S, \dots, S$. Условие ортонормировки записывается:

$$v_{\sigma}^s + v_{\sigma'}^s = \sum_{\mu} (v_{\sigma}^s)_{\mu}^* (v_{\sigma'}^s)_{\mu} = \delta_{\sigma\sigma'} \quad (\text{II.1})$$

Выберем в качестве базиса совокупность ортонормированных спиноров χ_{σ}^s , компоненты которых равны:

$$(\chi_{\sigma}^s)_{\mu} = \delta_{\sigma\mu} \quad (\text{II.2})$$

Любой спинор v_{σ}^s может быть получен путем некоторого вращения $\omega = (\psi, \theta, \varphi)$, где ψ, θ, φ - углы Эйлера, базисной системы χ_{σ}^s :

$$v_{\sigma}^s = \sum_{\sigma'} D_{\sigma'\sigma}^s(\omega) \chi_{\sigma'}^s \quad (\text{II.3})$$

где $D_{\sigma'\sigma}^s(\omega)$ матричные элементы неприводимого представления группы вращения D_S .

Определим тензорный сферический оператор $T_{q\alpha}^s$ в пространстве

xx/ В этом пункте использованы результаты неопубликованной работы Л.Д. Пузикова.

спина S следующим образом:

$$T_{q\alpha}^S = \sum_{\sigma, \sigma'=\alpha} (-1)^{S-\sigma'} (S, S, \sigma, -\sigma' | q\alpha) \chi_{\sigma}^S \chi_{\sigma'}^{S+} \quad (\text{II.4})$$

Заметим, что $\chi_{\sigma}^S \chi_{\sigma'}^{S+}$ представляет собой квадратную матрицу, единственный отличный от нуля матричный элемент которой стоит на пересечении σ -строки и σ' -столбца и равен единице.

Легко видеть, что при вращении $T_{q\alpha}^S$ преобразуется по неприводимому представлению группы вращений порядка q . Операторы $T_{q\alpha}^S$ образуют $(2S+1)^2$ линейно-независимых матриц в пространстве спина S . Матрицы $T_{q\alpha}^S$ взаимноортогональны в смысле

$$\text{Sp } T_{q\alpha}^{S+} T_{q'\alpha'}^S = \delta_{qq'} \delta_{\alpha\alpha'} \quad (\text{II.5})$$

Условие эрмитовского сопряжения для $T_{q\alpha}^S$ имеет вид:

$$T_{q\alpha}^{S+} = (-1)^{\alpha} T_{q, -\alpha}^S \quad (\text{II.6})$$

Заметим, что в частном случае спина $\frac{1}{2}$ операторы $T_{1\alpha}^{\frac{1}{2}}$ являются комбинациями матриц Паули σ_i :

$$T_{1\alpha}^{\frac{1}{2}} = \begin{cases} \frac{\sigma_x \pm i\sigma_y}{2}, & \alpha = \pm 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_z, & \alpha = 0 \end{cases} \quad (\text{II.7})$$

Так как операторы $T_{q\alpha}^s$ образуют полную ортогональную систему матриц в пространстве $(2s+1)^2$ измерений, то можно разложить по ним произвольную матрицу A в этом пространстве с матричными элементами $A_{\sigma\sigma'}$.

$$A = \sum_{q\alpha} A_{q\alpha}^s T_{q\alpha}^s \quad (II.8)$$

где $A_{q\alpha}^s = Sp T_{q\alpha}^{s+} A = \sum_{\sigma-\sigma'=\alpha} (-)^{s-\sigma'} (SS\sigma, -\sigma' | q\alpha) A_{\sigma\sigma'}$

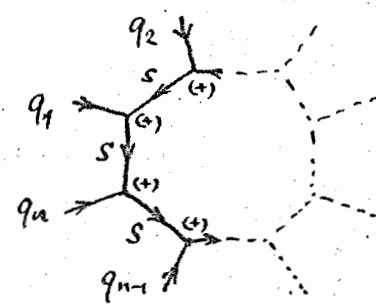
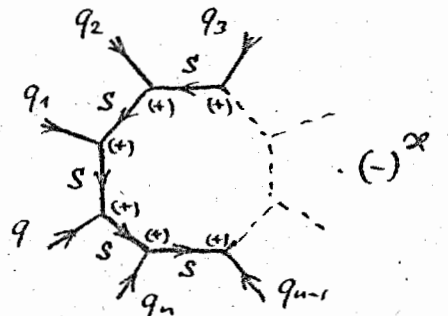
Коэффициенты разложения матрицы плотности ρ по сферическим тензорам называются непроводимыми тензорами поляризации, или статистическими тензорами и обозначаются через $\rho_{q\alpha}^s$.

Когда приходится иметь дело с произведениями от большого числа сферических тензоров, то оказываются полезными следующие формулы:

$$T_{q_1\alpha_1}^s T_{q_2\alpha_2}^s \dots T_{q_n\alpha_n}^s = \sum_q \sqrt{(q_1)(q_2)\dots(q_n)(q)} \cdot (-)^{\alpha} T_{q\alpha}^s \quad (II.9)$$

где $\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$

$$Sp T_{q_1\alpha_1}^s T_{q_2\alpha_2}^s \dots T_{q_n\alpha_n}^s = \sqrt{(q_1)(q_2)\dots(q_n)} \quad (II.10)$$



В этих формулах введены обозначения Левинсона (см. приложение I.)

Вычислим ещё матричный элемент от сферического тензора $T_{q\alpha}^s$ в состоянии, описываемом спинором v_6^s (см. формулу (II.3)). Несложный расчёт приводит к результату:

$$v_6^{s+} T_{q\alpha}^s v_6^s = (-)^{s-\sigma} (SS\sigma, -\sigma | q0) Y_{q\alpha}(\vec{\zeta}) \quad (\text{II.II})$$

где $Y_{q\alpha}(\vec{\zeta})$ - сферическая гармоника от единичного вектора $\vec{\zeta}$, определяющего направление спина, описываемого спинором v_6^s , и нормированная условием $\int |Y_{q\alpha}(\vec{\zeta})|^2 d\vec{\zeta} = \frac{4\pi}{2q+1}$ (подробнее см. приложение III).

III. ОБОБЩЕННЫЕ СФЕРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Сферическую гармонику порядка l от единичного вектора \vec{a} с компонентами

$$a_x = \sin \theta \cos \varphi$$

$$a_y = \sin \theta \sin \varphi$$

$$a_z = \cos \theta$$

будем записывать в виде

$$\left. \begin{aligned} Y_{lm}(\vec{a}) &= (-)^m \sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} \frac{d^m}{da_z^m} P_l(a_z) (a_x + ia_y)^m \\ Y_{l,-m}(\vec{a}) &= (-)^m Y_{lm}^*(\vec{a}) \end{aligned} \right\} m \geq 0 \quad (\text{III.1})$$

В такой записи сферические гармоники нормированы условием:

$$\sum_{m=-l}^l (-)^m Y_{lm}(\vec{a}) Y_{l,-m}(\vec{b}) = P_l(\vec{a} \vec{b})$$

или

$$\int |Y_{lm}(\vec{a})|^2 d\vec{a} = \frac{4\pi}{2l+1} \quad (\text{III.2})$$

Выпишем связь с обычными обозначениями

$$Y_{lm}(\vec{a}) \equiv \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} Y_{lm}(\theta, \varphi) = (-)^m \sqrt{\frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_l^m(\cos \theta) e^{im\varphi} \quad (\text{III.3})$$

Будем называть обобщенной сферической функцией порядка l тензор, зависящий от некоторого произвольного числа сферических гармоник различных векторов и тензорных сферических операторов и преобразующийся при вращении по неприводимому представлению группы вращений порядка l .

Например:

$$Y_{LM}(e[n(p\vec{e}, s\vec{v}), T_q^{s_1}], T_z^{s_2}) = \quad (III.4)$$

$$= \sum_{m+\rho=M} (l_2 m_\rho | LM) \sum_{\nu+\chi=m} (n q \nu \chi | l m) \sum_{\pi+\sigma} (p s \pi \sigma | m \nu) Y_{p\pi}(\vec{e}) Y_{s\sigma}(\vec{v}) T_{q\chi}^{s_1} T_z^{s_2}$$

т.е. $Y_{p\pi}(\vec{e})$ складывается с $Y_{s\sigma}(\vec{v})$ в момент n , момент n складывается с $T_{q\chi}^{s_1}$ в момент l и момент l складывается с $T_z^{s_2}$ в момент L .

Рассмотрим подробно обобщенную сферическую функцию, зависящую от двух сферических гармоник:

$$Y_{LM}(l_1 \vec{a}, l_2 \vec{b}) = \sum_{m_1+m_2=M} (l_1 l_2 m_1 m_2 | LM) Y_{l_1 m_1}(\vec{a}) Y_{l_2 m_2}(\vec{b}) \quad (III.5)$$

Эта функция обладает следующими очевидными свойствами:

$$Y_{LM}(l_1 \vec{a}, l_2 \vec{b}) = (-1)^{l_1+l_2+L} Y_{LM}(l_2 \vec{b}, l_1 \vec{a}) \quad (III.6a)$$

$$Y_{LM}^*(l_1 \vec{a}, l_2 \vec{b}) = (-1)^{l_1+l_2+L} (-1)^M Y_{LM}(l_1 \vec{a}, l_2 \vec{b}) \quad (III.6b)$$

$$Y_{LM}(0 \vec{a}, l_2 \vec{b}) = \delta_{L l_2} Y_{LM}(\vec{b}) \quad (III.6c)$$

$$Y_{00}(l_1 \vec{a}, l_2 \vec{b}) = \delta_{l_1 l_2} \frac{(-1)^{l_1}}{\sqrt{2l_1+1}} P_{l_1}(\vec{a} \vec{b}) \quad (III.6d)$$

$$Y_{LM}(l_1 \vec{a}, l_2 \vec{a}) = (l_1 l_2 00 | L 0) Y_{LM}(\vec{a}) \quad (\text{III.6e})$$

Заметим, что тензорный сферический оператор $T_{q\alpha}^S$ можно считать сферической гармоникой от "вектора" $\vec{S} (S_x, S_y, S_z)$ - матриц в пространстве спина S . Учитывая нормировки (II.5) и (II.2), получим:

$$T_{q\alpha}^S = \frac{1}{\sqrt{2S+1}} Y_{q\alpha}(\vec{S})$$

Поэтому, если в выражении для $Y_{LM}(l_1 \vec{a}, l_2 \vec{b})$ вместо, например, $Y_{l_2 m_2}(\vec{b})$ стоит тензорный оператор $T_{l_2 m_2}^S$, то все свойства (III.6) выполняются, если понимать под вектором \vec{b} матрицы $\vec{S} (S_x, S_y, S_z)$, за исключением (III.6e), где необходимо пользоваться законом преобразования тензорных операторов (II.9), что приводит к результату:

$$Y_{LM}(T_{l_1}^S, T_{l_2}^S) = (-)^{2S+L} \left\{ \begin{matrix} l_1 l_2 L \\ S S S \end{matrix} \right\} T_{LM}^S$$

При расчётах корреляционных эффектов, где учитываются три направления (например, $\beta - \gamma$ - корреляция с учётом поляризации распадающихся ядер или с учётом поляризации электрона) необходимо вычислять суммы типа:

$$\sum_m (-)^m Y_{lm}(\vec{c}) Y_{l,-m}(l_1 \vec{a}, l_2 \vec{b}) = P(l_1 \vec{a}, l_2 \vec{b} | l \vec{c})$$

Будем называть $P(l_1 \vec{a}, l_2 \vec{b} | l \vec{c})$ обобщенными полиномами Лежандра. Отметим основные свойства этих полиномов:

$$\begin{aligned} P^*(l_1 \vec{a}, l_2 \vec{b} | l \vec{c}) &= (-)^{l_1+l_2+l} P(l_1 \vec{a}, l_2 \vec{b} | l \vec{c}) \\ P(l_1 \vec{a}, l_2 \vec{b} | l \vec{c}) &= (-)^{l_1+l_2+l} P(l_2 \vec{b}, l_1 \vec{a} | l \vec{c}) \end{aligned} \quad (\text{III.8})$$

$$P(l_1 \vec{a}, l_2 \vec{b} | l_3 \vec{c}) = (-1)^{l_1} \sqrt{\frac{2l_1+1}{2l_2+1}} P(l_1 \vec{a}, l_3 \vec{c} | l_2 \vec{b})$$

$$P(l_1 \vec{a}, 0 \vec{b} | l_3 \vec{c}) = \delta_{l_1 l_3} P_l(\vec{a} \vec{c})$$

Обобщенные полиномы Лежандра представляют собой всевозможные комбинации скалярных произведений $(\vec{a} \vec{b})$, $(\vec{a} \vec{c})$ и $(\vec{b} \vec{c})$, причём

$$P(l_1 \vec{a}, l_2 \vec{b} | l_3 \vec{c}) = \sum_{\substack{k_1+k_2+k_3 \leq \frac{l_1+l_2+l_3}{2} \\ k_1+k_2+k_3 \equiv l_1+l_2+l_3 \pmod{2}}} C_{k_1 k_2 k_3}^{l_1 l_2 l_3} (\vec{a} \vec{b})^{k_1} (\vec{a} \vec{c})^{k_2} (\vec{b} \vec{c})^{k_3}, \text{ при } l_1+l_2+l_3 = \text{чётном}$$

$$P(l_1 \vec{a}, l_2 \vec{b} | l_3 \vec{c}) = i (\vec{a} [\vec{b} \vec{c}]) \sum_{\substack{k_1+k_2+k_3 \leq \frac{l_1+l_2+l_3}{2} - \frac{3}{2} \\ k_1+k_2+k_3 \equiv l_1+l_2+l_3 \pmod{2}}} D_{k_1 k_2 k_3}^{l_1 l_2 l_3} (\vec{a} \vec{b})^{k_1} (\vec{a} \vec{c})^{k_2} (\vec{b} \vec{c})^{k_3}, \text{ при } l_1+l_2+l_3 = \text{нечётном}$$

(III.9)

Коэффициенты $C_{k_1 k_2 k_3}^{l_1 l_2 l_3}$ и $D_{k_1 k_2 k_3}^{l_1 l_2 l_3}$ являются действительными числами. В случае произвольных l_1 , l_2 , l_3 их вычислить не удалось. Однако рассчитано несколько частных случаев и с помощью рекуррентной формулы можно получить выражение для любого обобщенного полинома Лежандра.

Частные случаи:

$$P(l_1 \vec{a}, l_2 \vec{b} | 0 \vec{c}) = \delta_{l_1 l_2} \frac{(-1)^{l_1}}{\sqrt{2l_1+1}} P_{l_1}(\vec{a} \vec{b})$$

$$P(l \vec{a}, l \vec{b} | 1 \vec{c}) = i (\vec{a} [\vec{b} \vec{c}]) (-1)^{l+1} \sqrt{\frac{3}{l(l+1)(2l+1)}} P_l'(\vec{a} \vec{b})$$

$$P(l \vec{a}, (l-1) \vec{b} | 1 \vec{c}) = (-1)^{l+1} \sqrt{\frac{6}{(2l-1)2l(2l+1)}} \left\{ P_l'(\vec{a} \vec{b})(\vec{a} \vec{c}) - P_{l-1}'(\vec{a} \vec{b})(\vec{b} \vec{c}) \right\}$$

$$P(l \vec{a}, l \vec{b} | 2 \vec{c}) = (-1)^{l+1} \sqrt{\frac{14.5}{(2l-1)2l(2l+1)(2l+2)(2l+3)}} \left\{ P_l'(\vec{a} \vec{b}) [3(\vec{a} \vec{c})(\vec{b} \vec{c}) - (\vec{a} \vec{b})] + P_l''(\vec{a} \vec{b}) [3(\vec{a} [\vec{b} \vec{c}])^2 - 1] \right\} \quad (\text{III.10})$$

$$\mathcal{P}(l\vec{a}, (l-1)\vec{b} | 2\vec{c}) = i(\vec{a}[\vec{b}\vec{c}]) (-)^{l+1} \sqrt{\frac{5!}{(2l-2)(2l-1)2l(2l+1)(2l+2)}} \times$$

$$\times \left\{ \mathcal{P}_{l-1}''(\vec{a}\vec{b})(\vec{b}\vec{c}) - \mathcal{P}_l''(\vec{a}\vec{b})(\vec{a}\vec{c}) \right\}$$

Рекуррентная формула

$$2(2l_2-1)(\vec{b}\vec{c}) \mathcal{P}(l_1\vec{a}, (l_2-1)\vec{b} | (l-1)\vec{c}) =$$

$$= \sqrt{\frac{(l_1+l_2+l)(l_1+l_2+l+1)(-l_1+l_2+l-1)(-l_1+l_2+l)}{(2l-1)(2l+1)}} \mathcal{P}(l_1\vec{a}, l_2\vec{b} | l\vec{c}) -$$

$$- \sqrt{\frac{(l_1+l_2-l+1)(l_1+l_2-l+2)(l_1-l_2+l-1)(l_1-l_2+l)}{(2l-3)(2l-1)}} \mathcal{P}(l_1\vec{a}, l_2\vec{b} | (l-2)\vec{c}) -$$

$$- \sqrt{\frac{(l_1-l_2+l+1)(l_1-l_2+l+2)(l_1+l_2-l-1)(l_1+l_2-l)}{(2l-1)(2l+1)}} \mathcal{P}(l_1\vec{a}, (l_2-2)\vec{b} | l\vec{c}) +$$

$$+ \sqrt{\frac{(l_1+l_2+l-2)(l_1+l_2+l-1)(-l_1+l_2+l-3)(-l_1+l_2+l-2)}{(2l-3)(2l-1)}} \mathcal{P}(l_1\vec{a}, (l_2-2)\vec{b} | (l-2)\vec{c})$$

(III.II)

Формула (III.II) является частным случаем общей рекуррентной

формулы:

$$\mathcal{P}(p_1\vec{a}, s_1\vec{b} | r_1\vec{c}) \mathcal{P}(p_2\vec{a}, s_2\vec{b} | r_2\vec{c}) =$$

$$= \sum_p \sum_s \sum_r \begin{pmatrix} p_1 & s_1 & r_1 \\ p_2 & s_2 & r_2 \\ p & s & r \end{pmatrix} (p_1 p_2 00 / p 0) (s_1 s_2 00 / s 0) \times$$

$$\times (r_1 r_2 00 / r 0) \mathcal{P}(p\vec{a}, s\vec{b} | r\vec{c}) \quad \text{(III.I2)}$$

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. M. Morita, R. Morita, Phys. Rev. 107, 1316, /1957/.
2. R.B. Curtis, R.R. Lewis, Phys. Rev. 107, 1381, /1957/.
3. K. Alder, B. Stech, A. Winter, Phys. Rev. 107, 728, /1957/.
4. V.B. Berestetsky, B.L. Joffe, A.P. Rudick, K.A. Ter-Martirosyan, Nuclear Phys. 5, 465, /1958/.
5. A.Z. Dolginov, Nuclear Phys., 5, 512, /1958/.
6. И.М. Шмукевич, ЖЭТФ, 33, 1479, (1957).
7. В.Б. Берестецкий, А.З. Долгинов, К.А. Тер-Мартirosян, ЖЭТФ, 20, 527, (1950).
8. M.E. Rose, Phys. Rev., 51, 484, /1937/.
9. L.C. Biedenharn, M.E. Rose, Rev. Modern Phys., 25, 729, /1953/.
10. H. Frauenfelder, Beta- and Gamma-Ray Spectroscopy, ed. K Siegbahn, Chap. XIX, /1955/.
11. И.Б. Левинсон - Труды физ. техн. института АН Лит. ССР, 2, 17, (1957). Труды АН Лит. ССР, Сер. Б, 4, (1957).
12. T.D. Lee, C.N. Yang, Phys. Rev., 104, 254, /1956/.
13. Е. Кордон, Г. Шортли - Теория атомных спектров ИЛ (1949).
14. Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц - Квантовая механика, §113, (1948).
15. А.И. Ахиезер, В.Б. Берестецкий - Квантовая электродинамика, Гостехизд.
16. И.Е. Тамм, Ю.А. Гольдфанд, В.Я. Файнберг, ЖЭТФ, 26, 649, (1954)
17. A.R. Edmonds, CERN Report, 55-26, Geneve.
18. S.R. de Groot, H.A. Tolhock, Beta-and Gamma-Ray Spectroscopy,

ed K. Siegbahn, Chap. XIX (III9, 1955).

19. I.M. Kennedy, B.I. Sears, W.T. Sharp, Chalk Rivers Report, CRT-569, (1955).

20. H. Matsunobo, H. Tahebe, Progr. of Theoret. Phys. 14, 589 (1955).