ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р-2335

ЛАБОРАТОРИЯ НЕЙТРОННОЙ ФИЗИКИ

Б. Козик

КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ТЕОРИЯ РЕАКТОРА С ОТРАЖАТЕЛЕМ

Ат. энергия, 1966, т20, в4, с343

1965

Р-2335

Б. Козик[x)]

КОРРЕЛЯЦИОННАЯ ТЕОРИЯ РЕАКТОРА С ОТРАЖАТЕЛЕМ

Направлено в журнал "Атомная энергия"

---

x) Центральный институт ядерных исследований, Дрезден-Россендорф, ГДР.

Введение

В[1] была доказана следующая теорема:

Бинарная плотность корреляции $K(r', v', t', r, v, t)$ нейтронов в ядерных реакторах удовлетворяет при фиксированных r', v', t' и $t > t'$ (r, v, t – пространственный радиус-вектор, вектор скорости нейтронов и момент времени) нестационарному однородному уравнению Больцмана с краевыми условиями, аналогичными краевым условиям для средней нейтронной плотности $n(r, v, t)$, а начальное условие имеет вид

$$K(r', v', t', r, v, t') = \sigma^2_{t'}(r', v'; r, v), \tag{1}$$

где $\sigma^2_{t'}$ – бинарная плотность центрального момента второго порядка, которая в свою очередь определяется некоторыми бинарными уравнениями больцмановского типа[1,2]. Вместе с уравнением Больцмана для средней нейтронной плотности имеется тем самым общая корреляционная теория, позволяющая решать все проблемы корреляции нейтронов в ядерных реакторах любой структуры.

В настоящей статье рассматривается корреляция нейтронов в реакторе с отражателем в одногрупповом и двухзонном приближении. Так как нейтроны в реакторе (среда с индексом "1") и в отражателе (среда с индексом "2") рассматриваются как частицы разных сортов, с конечной вероятностью переходящие друг в друга, то такое описание равносильно однозонному приближению с двумя сортами частиц. Исходя из уравнений для корреляционных функций нейтронов в реакторе и отражателе и из уравнений для центральных моментов второго порядка, определяются дисперсия числа отсчетов за промежуток времени Δt детектора, помещенного в реактор или отражатель (метод Фейнмана), вероятность регистрации соответствующим детектором коррелированных пар нейтронов в методе Росси и спектральные плотности мощности собственных шумов нейтронов в реакторе и отражателе, а также их взаимная спектральная плотность. Как известно, измерением этих величин можно определить кинетические параметры стационарных реакторов[3,4,5], а также минимальную амплитуду реактивности в осцилляционных опытах[6].

Дисперсия в методе Фейнмана [3], вероятность в методе Росси [4] и спектральная плотность мощности нейтронных шумов в стационарных реакторах просто связаны с нейтронной корреляционной функцией (точнее - с корреляционной функцией процесса размножения нейтронов) [7]. На основе вышеупомянутой корреляционной теории все эти величины были определены в одногрупповом и однозонном приближении [7] (для реактора без отражателя). При этом оказалось, что спектральная плотность мощности нейтронных шумов $\langle|n(\omega)|^2\rangle$ имеет вид произведения квадрата модуля нейтронной передаточной функции кинетических уравнений на некоторый множитель $\langle|S_0|^2\rangle$, слабо зависящий от частоты. Его можно было представить в виде

$$\langle|S_0|^2\rangle = \frac{2\bar n}{\tau}(1 + 2q(\omega));$$

$$\ldots k(1-\beta) \ldots q(\omega) \ldots 1-k; \quad I = k\frac{\overline{\nu(\nu-1)}}{\bar\nu},$$

где $\bar n$ - среднее мгновенное число нейтронов в реакторе; τ - среднее время жизни мгновенных нейтронов; k - полный коэффициент размножения нейтронов (мгновенных + запаздывающих); ν - полное число нейтронов деления, а β - доля запаздывающих нейтронов. Тем самым была статистически строго обоснована динамическая модель стационарного реактора с белым шумом на "входе" [6,8].

В работе [9] на основе нестрогих модельных представлений определены спектральные плотности нейтронов в системе реактор-отражатель, а в работе [10] не очень строгим путем выведено выражение для вероятности Росси α-эксперимента. В настоящей же статье излагается корреляционная теория нейтронов в системе реактор-отражатель, позволяющая, в частности, вычислить точные выражения для спектральных плотностей и вероятностей Росси α-эксперимента.

Для простоты изложения влияние запаздывающих нейтронов не учитывается, хотя учесть их формально не представляет трудности (см. замечание в конце работы). Поэтому все выведенные выражения, содержащие промежутки времени измерения, могут быть применены лишь для достаточно малых промежутков времени, а выражения для спектральных плотностей мощности будут справедливы лишь при достаточно высоких частотах ($\omega^2 \gg \bar\lambda_i^2$; $\bar\lambda_i$ - постоянные распада предшественников запаздывающих нейтронов).

2. Уравнения для корреляционных функций и центральных моментов второго порядка

Имеются два типа частиц: $n_1(t)$ - число нейтронов в реакторе и $n_2(t)$ - число нейтронов в отражателе. Пусть $P_1(n,t)$ - вероятность того, что система (реактор + отражатель) в момент t содержит $n = (n_1, n_2)$ частиц. Пусть $P_2(n',t'; n,t)$ -

соответствующая совместная вероятность для двух моментов времени t' и $t > t'$. P_1, P_2 – условные вероятности, так как они зависят от начальных условий. Производящие функции

$$H_1(x,t) = \sum_n P_1 x_1^{n_1} x_2^{n_2}, \qquad (1)$$

$$H_2(x',t';x,t) = \sum_{n',n} P_2 x_1'^{n_1'} x_2'^{n_2'} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \qquad (2)$$

удовлетворяют одному и тому же уравнению /11/ (H_2 при фиксированных x', t' и $t > t'$), которое в одногрупповом и однозонном приближении имеет вид:

$$\frac{\partial H_k}{\partial t} = \sum_{i=1,2} \{ \lambda_i (G_i - x_i) \frac{\partial H_k}{\partial x_i} + H_k S_i(t)(x_i - 1) \}, \qquad (3)$$

где $k = 1,2$; $S_i(t)$ – интенсивности посторонних источников в реакторе и отражателе, $\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}$ – средние времени жизни мгновенных нейтронов в реакторе и нейтронов в отражателе, а функции G_i имеют следующий вид:

$$G_1(x_1, x_2) = \frac{\lambda_{1c}}{\lambda_1} + \frac{\lambda_{12}}{\lambda_1} x_2 + \frac{\lambda_{1f}}{\lambda_1} h(x_1);$$
$$G_2(x_1) = \frac{\lambda_{2c}}{\lambda_2} + \frac{\lambda_{21}}{\lambda_2} x_1, \qquad (4)$$

где λ_{1f}/λ_1 – вероятность деления нейтрона в реакторе, λ_{ic}/λ_i – вероятности бесполезной гибели нейтронов в реакторе и отражателе, $\lambda_{12}/\lambda_1 \equiv a_{12}, \lambda_{21}/\lambda_2 \equiv a_{21}$ – вероятности рассеяния нейтронов одной зоны в другую зону, а $h(x_1)$ – производящая функция распределения мгновенных нейтронов деления. В (4) предполагается, что отражатель не содержит делящихся веществ ($\lambda_{2f} = 0$).

Из уравнения (3) для H_1 следуют уравнения для средних мгновенных чисел частиц в реакторе и отражателе ($S_2(t) = 0$):

$$\frac{d\bar{n}_1}{dt} + \alpha_1 \bar{n}_1 = \lambda_{21} \bar{n}_2 + S_1(t);$$
$$\frac{d\bar{n}_2}{dt} + \alpha_2 \bar{n}_2 = \lambda_{12} n_1, \qquad (5)$$

где

$$\alpha_1 = \lambda_1 (1 - k(1 - \beta));$$
$$\alpha_2 \equiv \lambda_2. \qquad (6)$$

k – полный коэффициент размножения нейтронов (мгновенных и запаздывающих) в реакторе. Уравнения для стационарных центральных моментов

$$\sigma_i^2 = \overline{n_i^2} - \bar{n}_i^2 \; ; \; i = 1,2 \; ; \qquad \mu = \overline{n_1 n_2} - \bar{n}_1 \bar{n}_2 \tag{7}$$

имеют вид:

$$\begin{aligned} &\alpha_1 \sigma_1^2 - \lambda_{21}\mu = \alpha_1 \bar{n}_1 + A\bar{n}_1 \; ; \\ &\alpha_2 \sigma_2^2 - \lambda_{12}\mu = \alpha_2 \bar{n}_2 \; ; \\ &-\lambda_{12}\sigma_1^2 - \lambda_{21}\sigma_2^2 + (\alpha_1 + \alpha_2)\mu = -\bar{n}_1 \lambda_{12} - \bar{n}_2 \lambda_{21} \, , \end{aligned} \tag{8}$$

где[x)]

$$A \equiv \lambda_1 k \frac{\overline{\nu(\nu-1)}}{2\bar{\nu}} (1-2\beta) \equiv \lambda_1 \frac{\Gamma}{2} \, , \tag{9}$$

а ν – полное число нейтронов деления.

Из того же уравнения (3) для H_2 следуют уравнения для корреляционных функций

$$K_{jk}(t', t'') = \overline{n_j(t') n_k(t'')} - \bar{n}_j(t') \bar{n}_k(t'') \, . \tag{10}$$

В стационарном случае они имеют вид

$$\frac{dK_{11}(t)}{dt} + \alpha_1 K_{11} - \lambda_{21}\lambda_{12} \int_0^t dt' K_{11}(t') e^{-\alpha_2(t-t')} = \lambda_{21} \mu e^{-\alpha_2 t} \; ; \tag{11}$$

$$\frac{dK_{12}(t)}{dt} + \alpha_2 K_{12} - \lambda_{12}\lambda_{21} \int_0^t dt' K_{11}(t') e^{-\alpha_1(t-t')} = \lambda_{12} \sigma_1^2 e^{-\alpha_1 t} . \tag{12}$$

Уравнения для функций K_{22} и K_{21} получаются из уравнений (12) и (13) заменой индексов $1 \leftrightarrow 2$. Имеют место следующие начальные условия:

$$K_{ii}(0) = \sigma_i^2 \; ; \; i = 1,2 \; ; \qquad K_{12}(0) = K_{12}(0) = \mu \, , \tag{13}$$

а также следующие свойства симметрии

$$K_{ii}(t) = K_{ii}(-t) \; ; \quad K_{12}(-t) = K_{21}(t) \, . \tag{14}$$

---

x) См. формулы [20].

3. Определение корреляционных функций

Уравнения (11), (12) и соответствующие уравнения для K_{22}, K_{21} можно решить преобразованием Лапласа:

$$K_{ii}(t) = \rho_{i1} e^{-\gamma_1 |t|} + \rho_{i2} e^{-\gamma_2 |t|}, \quad i = 1,2, \tag{15}$$

где γ_1, γ_2 – корни уравнения

$$s^2 - s(a_1 + a_2) + a_2 a = 0; \tag{16}$$

$$a = a_1 - \lambda_1 a_{12} a_{21} = a_1 - \lambda_1 \bar{\beta}, \tag{17}$$

а коэффициенты ρ_{ik} имеют вид

$$\rho_{1k} = \frac{\sigma_1^2 (a_2 - \gamma_k) + \lambda_{21}\mu}{(a_1 + a_2) - 2\gamma_k};$$

$$\rho_{2k} = \frac{\sigma_2^2 (a_1 - \gamma_k) + \lambda_{12}\mu}{(a_1 + a_2) - 2\gamma_k}; \quad k = 1,2. \tag{18}$$

$\bar{\beta} = a_{12} a_{21}$ можно назвать эффективностью отражателя.

Теперь нужно решать уравнения (8):

$$\sigma_1^2 = \bar{n}_1 + \frac{I \lambda_1 \bar{n}_1}{2a} \cdot \frac{a_2 + a}{a_2 + a_1}; \tag{19}$$

$$\sigma_2^2 = \bar{n}_2 + \frac{I \lambda_2 \bar{n}_2}{2a} \cdot \frac{\lambda_1 \kappa}{a_2 + a_1}; \tag{20}$$

$$\mu = \frac{I \lambda_1 \bar{n}_1}{2a} \frac{a_2 \kappa}{a_2 + a_1}; \quad \kappa = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_2} = \frac{\bar{n}_2}{\bar{n}_1}, \tag{21}$$

причем в критических системах нужно положить

$$a = k\rho\lambda_1; \quad a_1 = \lambda_1(\bar{\beta} + k\beta); \quad k = 1 - \bar{\beta}. \tag{22}$$

При условии

$$\frac{a}{a_2} \ll r^2; \quad r = 1 + \frac{a_1}{a_2} \tag{23}$$

получаем приближенные выражения для корней γ_1, γ_2:

$$\gamma_1 = a_2 r \;; \quad \gamma_2 = a/r \;, \tag{24}$$

причем $\gamma_2 \ll \gamma_1$. В этом случае коэффициенты ρ_{ik} имеют вид

$$\rho_{11} = \frac{(A + a_1)\bar{n}_1}{a_2 r} \;; \quad \rho_{12} = \sigma_1^2 - \rho_{11} \;; \tag{25}$$

$$\rho_{21} = \bar{n}_2 / r \;; \quad \rho_{22} = \sigma_2^2 - \rho_{21} \;.$$

Если усилить требование (23):

$$\frac{a}{a_2} \ll 1 \;, \tag{26}$$

то имеет место неравенство $\rho_{11} \ll \rho_{12}$, и корреляционная функция нейтронов в реакторе принимает вид

$$K_{11}(t) = \sigma_1^2 \, e^{-a/r\,|t|} \;, \tag{27}$$

где дисперсию (19) практически можно записать в форме

$$\sigma_1^2 \cong \frac{\Gamma \lambda_1 \bar{n}_1}{2ar} \;. \tag{28}$$

Вид (27) корреляционной функции нейтронов в реакторе ограничен только требованием

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \gg \beta(1 - \bar{\beta}) \;, \tag{29}$$

которое выполнено в обычных термических реакторах.

Неравенство $\rho_{22} \gg \rho_{21}$ имеет место при добавочном условии

$$a_{12} = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_1} \gg \frac{a}{\lambda_1^2}(a_1 + a_2) \;, \tag{30}$$

что дает следующий вид корреляционной функции нейтронов в отражателе термического реактора:

$$K_{22}(t) = \frac{\Gamma\lambda_2 \bar{n}_2}{2ar} \, \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \, \kappa \, e^{-a/r|t|} \;, \tag{31}$$

или

$$K_{22}(t) = \kappa^2 K_{11}(t) \;, \tag{32}$$

где κ определено в (21).

Соотношению (32) можно сопоставить стохастическое уравнение

$$n_2 = \kappa n_1 , \tag{33}$$

совпадающее со вторым стационарным уравнением (5) для средних величин $\bar{n}_1$ и $\bar{n}_2$. Таким образом, если средняя вероятность рассеяния нейтрона реактора в отражатель не слишком мала, а отношение средних времени жизни нейтронов в реакторе и отражателе достаточно велико, то стационарную систему реактор-отражатель можно рассматривать как простую динамическую систему, заданную уравнением (33). Это означает, что при таких условиях статистика нейтронов в отражателе определяется только их историей в самом реакторе, а вклад отражателя в эту статистику пренебрежимо мал. С этой точки зрения условия (29) и (30) вполне понятны. Практически соотношение (32) означает, что все измерения в реакторе, связанные с корреляцией нейтронов, с таким же успехом можно произвести в отражателе. Все вышевыведенные соотношения сохраняют силу и тогда, когда среднюю скорость нейтронов в реакторе и отражателе считают различной.

Из соотношения (33) сразу следуют взаимные корреляционные функции:

$$K_{12}(t) = K_{21}(t) = \kappa K_{11}(t) , \tag{34}$$

точные выражения для которых можно получить из уравнения (11) и соответствующего уравнения для K_{21}, используя при этом решение (19)-(21) и свойство (14):

$$K_{12}(t) = \begin{cases} q_{11} e^{-\gamma_1 t} + q_{12} e^{-\gamma_2 t} ; & t \geq 0 ; \\ q_{21} e^{\gamma_1 t} + q_{22} e^{\gamma_2 t} ; & t \leq 0 , \end{cases} \tag{35}$$

где

$$q_{1k} = \frac{\mu(a_1 - \gamma_k) + \lambda_{12}\sigma_1^2}{a_1 + a_2 - 2\gamma_k} ; \quad (k = 1,2)$$

$$q_{2k} = \frac{\mu(a_2 - \gamma_k) + \lambda_{21}\sigma_2^2}{a_1 + a_2 - 2\gamma_k} . \tag{36}$$

В заключение отметим, что условие (23) довольно общее и выполнено для широкого класса реакторов. Например, оно удовлетворяется даже при $\lambda_1/\lambda_2 \sim 10^3$, если $\bar{\beta} \sim 10^{-2}$. Поэтому во многих случаях (24) и (25) будет хорошим приближением, хотя и корреляционные функции (15), (35) нельзя будет записать в виде одной экспоненты, как в случае обычных термических реакторов. Например, когда имеется термическая колонка быстрого реактора, такая, что быстрые нейтроны реактора попадают в колонку, но термические нейтроны колонки практически не попадают обратно в реактор, то $\bar{\beta} = 0$, и $\gamma_2 = \alpha$, $\gamma_1 = \alpha_2$. В этом случае корреляционная функция нейтронов в реакторе будет иметь обычный вид

$$K_{11}(t) = \left(\bar{n}_1 + \frac{\Gamma \lambda_1 \bar{n}_1}{2\alpha}\right) e^{-\alpha|t|}, \tag{37}$$

но, например, корреляционная функция $K_{22}(t)$ не может быть сведена к форме (37), если не выполнено условие (26):

$$K_{22}(t) = \frac{\Gamma \lambda_1 \bar{n}_1 a_{12}^2}{2} \cdot \frac{\lambda_1^2}{\alpha\alpha_2(\alpha^2 - \alpha_2^2)} \{\alpha e^{-\alpha_2|t|} - \alpha_2 e^{-\alpha|t|}\} + \tag{38}$$
$$+ \bar{n}_2 e^{\alpha_2|t|}.$$

4. Теория Росси α -эксперимента

Как известно, метод Росси $-\alpha$ основывается на выражении для вероятности $P(t)dt$ регистрации детектором (помещенным в реактор) в интервале dt около момента t нейтрона при условии, что предыдущая регистрация нейтрона произошла в интервале dt_0 около момента $t_0 = 0$ /4/. В работе /10/ таким же ad hoc способом как в /4/ выведено выражение этой вероятности для реактора с отражателем. Но вероятность Росси - эксперимента просто связана с корреляционной функцией нейтронов /7/:

$$P_i(t)dt = C_i\, dt + \frac{\epsilon_i \lambda_i}{\bar{n}_i} K_{ii}(t)dt;\quad i = 1, 2. \tag{39}$$

Такую вероятность можно рассматривать и для случая, когда один детектор находится в реакторе, а другой - в отражателе /7/:

$$P_{12}(t)dt = C_2\, dt + \frac{\epsilon_2\lambda_2}{\bar{n}_1} K_{12}(t)dt;$$
$$P_{21}(t)dt = C_1\, dt + \frac{\epsilon_1\lambda_1}{\bar{n}_2} K_{21}(t)dt, \tag{40}$$

где ϵ - эффективность, а $C_i = \epsilon_i \lambda_i \bar{n}_i$ - скорость счета соответствующего детектора. $P_{12}(t)dt$ - вероятность того, что детектором в отражателе в интервале dt около момента t регистрируется нейтрон, при условии, что в интервале dt_0 около момента $t_0 = 0$ уже произошла регистрация нейтрона детектором в реакторе. В общем случае (39) имеет вид

$$P_1(t)\,dt = C_1\,dt + \frac{\epsilon_1 \lambda_1 \rho_{11}}{\bar{n}_1}\left(e^{-\gamma_1 t} + \frac{\rho_{12}}{\rho_{11}} e^{-\gamma_2 t}\right), \tag{41}$$

а в приближении (23), (24), (25), например, для $P_1(t)dt$ получаем выражение

$$P_1(t)\,dt = C_1\,dt + \epsilon_1 A_1 \left(e^{-a_2 r t} + A_2 e^{-a/r(t)}\right), \tag{42}$$

где

$$A_1 = \frac{\left(\frac{\Gamma}{2}\lambda_1 + a_1\right)\lambda_1}{a_2 + a_1} \;; \quad A_2 = \frac{\frac{\Gamma}{2a}\lambda_1 a_2 + a_2}{\frac{\Gamma}{2}\lambda_1 + a_1}, \tag{43}$$

или

$$A_1 \cong \frac{\Gamma \lambda_1^2}{2a_2 r} \;; \qquad A_2 \cong \frac{a_2}{a}. \tag{44}$$

Выражения A_1, A_2 (44) справедливы при добавочном условии $\bar{\beta} \ll 1$.

В термической колонке быстрого реактора имеем

$$P_2(t)\,dt = C_2\,dt + \epsilon_2 \frac{\Gamma \lambda_1^2 a_2 a_{12}}{2a(a^2 - a_2^2)}\left(a e^{-a_2 t} - a_2 e^{-at}\right) + \epsilon_2 a_2 e^{-a_2 t}. \tag{45}$$

Наконец, для обычных термических реакторов (условие (26)) получаем выражение

$$P_1(t)dt = C_1 dt + \epsilon_1 \frac{\Gamma \lambda_1^2}{2ar} e^{-(a/r)t}\, dt \;; \tag{46}$$

$$P_2(t)dt = C_2\,dt + \epsilon_2 \frac{\Gamma \lambda_1^2}{2ar} a_{12} e^{-(a/r)t} dt, \tag{47}$$

где $a_{12} = \dfrac{\lambda_{12}}{\lambda_1}$.

5. Метод Фейнмана

Корреляционные функции $k_{ik}(t)$ нейтронных детекторов, помещенных в реактор и отражатель, имеют следующий вид /7/:

$$k_{ik}(t) = C_i\,\delta(t)\delta_{ik} + (\epsilon_i \lambda_i)(\epsilon_k \lambda_k) K_{ik}(t), \tag{48}$$

где δ_{ik} – символ Кронекера, а $\delta(t)$ – дельта-функция Дирака. Дисперсии числа отсчетов соответствующих детекторов за промежуток времени Δt определяется как раз корреляционными функциями (48):

$$\sigma^2_{i\Delta t} = 2\int_0^{\Delta t} dt' \int_0^{t'} k_{ii}(t)\,dt \ , \tag{49}$$

то есть выражениями

$$\sigma_{i\Delta t} = C_i\ \Delta t\,\{\,1 + \epsilon_i \sum_{k=1,2} D_{ik}\ (1 - \frac{1 - e^{-\gamma_k \Delta t}}{\gamma_k\,\Delta t})\}\ , \tag{50}$$

где

$$D_{ik} = \frac{2\lambda_i\,\rho_{ik}}{\bar{n}_i\ \gamma_k}\ . \tag{51}$$

В приближении (29) и (30) выражения (50) принимают вид

$$\sigma^2_{i\Delta t} = C_i\ \Delta t\,\{\,1 + \epsilon_i\ \theta_i\ \frac{I\ \lambda_i^2}{a^2}(\,1 - \frac{1 - e^{-(a/r)\Delta t}}{(a/r)\,\Delta t}\,)\}\ , \tag{52}$$

где

$$\theta_1 = 1; \quad \theta_2 = a_{12}\ . \tag{53}$$

6. Спектральные плотности мощности

Спектральные плотности мощности соответствующих детекторов получаются при помощи фурье-преобразования корреляционных функций (48)[x].

$$<|n_i\ n_k|>_{Det} = 2C_i\ \delta_{ik} + \epsilon_i\,\epsilon_k\,\lambda_i\,\lambda_k <|n_i\ n_k|>\ ; \tag{54}$$

$$<|n_i\ n_k|> = \int_{-\infty}^{\infty} dt\ e^{i\omega t}\ \{K_{ik}\ (t) + K_{ki}(t)\}\ , \tag{55}$$

---

x) Теорема Винера-Хинчина.

где $\omega = 2\pi f$, а f – частота в герцах. Первый член на правой стороне (54) – обычный белый шум. Как видно, его можно исключить измерением взаимной спектральной плотности. Подставляя формально выражения (15) и (35) в (55), получаем точные выражения для соответствующих спектральных плотностей. Например, $\langle |n_1|^2 \rangle$ будет иметь вид

$$\langle |n_1|^2 \rangle = 4\left\{ \frac{\rho_{11}\gamma_1}{\gamma_1^2 + \omega^2} + \frac{\rho_{12}\gamma_2}{\gamma_2^2 + \omega^2} \right\}. \tag{56}$$

Если выполнено условие (26), при котором корреляционная функция K_{11} имеет экспоненциальный вид (27), то отсюда еще не следует, что первым членом в правой части равенства (56) можно пренебречь; приближенное равенство

$$\langle |n_1|^2 \rangle = \frac{4\rho_{12}\gamma_2}{\gamma_2^2 + \omega^2} \tag{57}$$

имеет место только при

$$\begin{aligned} &\alpha_2 \gg \alpha \; ; \\ &\omega^2 \lesssim \alpha_2 \alpha \; . \end{aligned} \tag{58}$$

Тогда правая часть (57) совпадает с фурье-преобразованием (55) корреляционной функции (27).

Более удобно рассмотреть точнее выражения для спектральных плотностей (55) в отличном от (56) виде, не содержащем корней γ_1, γ_2. Применяя фурье-преобразование (55) прямо к уравнениям (11), (12), получаем следующий вид для спектральных плотностей:

$$\langle |n_i|^2 \rangle = \frac{A_i(\omega)}{B_i + \omega^2 L_i^2} \; ; \tag{59}$$

$$\langle |n_1 n_2| \rangle = \langle |n_2 n_1| \rangle = \frac{A_{12}(\omega)}{B_2^2 + \omega^2 L_2^2} + \frac{A_{21}(\omega)}{B_1^2 + \omega^2 L_2^2} , \tag{60}$$

где

$$B_1 = \alpha_1 + \frac{\alpha - \alpha_1}{1 + \left(\frac{\omega}{\alpha_2}\right)^2} , \quad L_1 = 1 + \frac{(\lambda_1/\lambda_2)\bar{\beta}}{1 + \left(\frac{\omega}{\alpha_2}\right)^2} \; ; \tag{61}$$

$$B_2 = \alpha \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \frac{1 + \frac{\omega^2}{\alpha\alpha_1}}{1 + \frac{\omega^2}{\alpha_1^2}} \; ; \quad L_2 = 1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \frac{1 - \alpha/\alpha_1}{1 + \frac{\omega^2}{\alpha^2}} \; . \tag{62}$$

Величины A_i , A_{ik} вычисляются при помощи уравнений (8) и их решений (19)-(21):

$$A_1(\omega) = 4(\sigma_1^2 + \frac{\alpha_2 \lambda_{21}\mu}{\alpha_2^2 + \omega^2}) B_1 - 4L_1 \frac{\omega^2 \lambda_{21}\mu}{\alpha_2^2 + \omega^2} \; ; \tag{63}$$

$$A_{12}(\omega) = 2(\mu + \frac{\alpha_1 \lambda_{12}\sigma_1^2}{\omega^2 + \alpha_1^2}) B_2 - 2L_2 \frac{\omega^2 \lambda_{12}\sigma_1^2}{\alpha_1^2 + \omega^2} \; . \tag{64}$$

A_{22} и A_{21} получаются из A_{11} и A_{12} заменой индексов $1 \leftrightarrow 2$. После соответствующих подстановок (63) принимает вид

$$A_{11}(\omega) = 2\bar{n}_1 \lambda_1 (\Gamma + 2Q_{11}(\omega)) \; ;$$

$$Q_{11}(\omega) = k\beta + 1 - k - \frac{\bar{\beta}}{1 + (\frac{\omega}{\alpha_2})^2} \; . \tag{65}$$

(59), (61), (62), (65) и (22) определяют "точное" выражение спектральной плотности нейтронов в реакторе и отражателе.

Из-за наличия фона белого шума (формула (54)) спектральную плотность мощности невозможно измерять при произвольно высоких частотах [12]. Поэтому ограничение частот неравенством

$$(\frac{\omega}{\alpha_2})^2 \ll 1 \tag{66}$$

во многих случаях (обычные термические реакторы) будет естественным ограничением. Тогда $Q_{11} \cong k\beta$, и спектральная плотность мощности $\langle|n_1|^2\rangle$ принимает простой вид:

$$\langle|n_1|^2\rangle = \frac{2\Gamma_0 \lambda_1 \bar{n}_1}{\alpha^2 + \bar{r}^2\omega^2} \; ; \tag{67}$$

где

$$\bar{r} = 1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\bar{\beta} \; ; \quad \Gamma_0 = \Gamma + 2\beta k \; . \tag{68}$$

Выражение (66) ограничено только требованием (66), и поэтому оно более общее, чем приближение (57), при котором должны выполняться условия (58). Из (67) следует, что корреляция не очень близких по времени нейтронов в реакторе описывается корреляционной функцией

$$K_{11}(t) = \frac{I_0 \lambda_1 \bar{n}_1}{2a\bar{r}} e^{-a/\bar{r}|t|} . \tag{69}$$

Тогда из равенства

$$\frac{a}{\bar{r}} = \lambda^* \beta \tag{70}$$

получаем выражение для эффективного времени жизни ℓ^* мгновенных нейтронов в реакторе:

$$\ell^* = \lambda^{*-1} = \frac{\bar{r}}{\lambda_1 k} = \frac{\lambda_1^{-1} + \lambda_2^{-1} \bar{\beta}}{k} . \tag{71}$$

Отметим, что корреляционная функция нейтронов в реакторе без отражателя с тем же средним временем жизни мгновенных нейтронов ℓ^* пропорциональна корреляционной функции $K_{11}(t)$ (69):

$$K_0(t) = \bar{r}\, K_{11}(t). \tag{72}$$

При $\bar{\beta} = 0$ имеем $\bar{r} = 1$.

Коэффициент $A_{22}(\omega)$ имеет следующий вид:

$$A_{22}(\omega) = 4\bar{n}_2 \lambda_2 (1 + Q_{22}(\omega))) \; ; \quad Q_{22} = \frac{\frac{\Gamma}{2} \lambda_1 \lambda_{12} - \lambda_1 a_1 \bar{\beta}}{a_1^2 + \omega^2} . \tag{73}$$

Как видно из (73) и (62), упрощение выражения $<|n_2|^2>$ возможно только при достаточно низких (или высоких) частотах.

В частном случае термической колонки быстрого реактора с $\lambda_{21} = 0$ спектральная плотность нейтронов в термической колонке принимает вид

$$<|n_2|^2> = \frac{2\lambda_1 \bar{n}_1 a_{12}}{a_2^2 + \omega^2} \left(\frac{\Gamma a_{12} \lambda_1^2}{a^2 + \omega^2} + 2 \right), \tag{74}$$

что совпадает с выражением, полученным в работе /9/.

Взаимную спектральную плотность $<|n_1 n_2|>$ удобно получить при помощи корреляционной функции $K_{12}(t)$ (35):

$$<|n_1 n_2|> = 2 \left\{ \frac{\gamma_1 (q_{11} + q_{21})}{\gamma_1^2 + \omega^2} + \frac{\gamma_2 (q_{22} + q_{12})}{\gamma_2^2 + \omega^2} \right\} , \tag{75}$$

причем, если корни γ_1 и γ_2 взяты в приближении (24), тогда

$$\gamma_1 (q_{11} + q_{21}) \cong -(\bar{n}_1 \lambda_{12} + \bar{n}_2 \lambda_{21}) \; ; \tag{76}$$

$$\gamma_2 (q_{22} + q_{21}) \cong 2\gamma_2 \mu + \frac{\bar{n}_1 \lambda_{12} + \bar{n}_2 \lambda_{21} \gamma_2}{\gamma_1} , \tag{77}$$

В заключение отметим, что учет запаздывающих нейтронов во всех выведенных выше выражениях не представляет трудности. Для этого нужно только к правой стороне уравнения (3) добавить член [7]:

$$\sum_{e=1}^{m} \bar{\lambda}_e (x_1 - y_e) \frac{\partial H_k}{\partial y_e}, \tag{78}$$

где $\bar{\lambda}_e$ – постоянная распада предшественника запаздывающих нейтронов сорта "e" а вместо h в (4) подставить производящую функцию совместного распределения мгновенных нейтронов деления и предшественников запаздывающих нейтронов, появляющихся при делении одного ядра горючего:

$$\bar{h}(x_1, y_e) \equiv \bar{h}(x_1, y_1, \dots y_m). \tag{79}$$

Если предположить, что при делении одного ядра горючего испускается не больше одного запаздывающего нейтрона, то производящую функцию $\bar{h}$ можно записать в виде:

$$\bar{h}(x_1, y_e) = \sum_{\nu} P(\nu) x_1^{\nu-1} \{(1-\beta\nu)x_1 + \sum_e \beta_e \nu y_e\}, \tag{80}$$

где $P(\nu)$ – вероятность того, что полное число нейтронов деления будет равно ν. Тогда при $x_1 = y_1 = \dots = y_m = 1$ получаем

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial x_1} = (1-\beta)\bar{\nu}; \quad \frac{\partial \bar{h}}{\partial y_e} = \beta_e \bar{\nu}; \quad \frac{\partial^2 \bar{h}}{\partial y_1 \partial y_n} = 0;$$
$$\frac{\partial^2 \bar{h}}{\partial x_1^2} = \overline{\nu(\nu-1)}(1-2\beta); \quad \frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial y_e} = \overline{\nu(\nu-1)}\,\beta_e. \tag{81}$$

При помощи (81) из уравнения (3) с учетом (78) получаем систему уравнений для центральных моментов второго порядка и для корреляционных функций, а отсюда и все выражения, необходимые для корреляционных измерений.

Литература

1. Б.Козик. "Корреляция нейтронов в ядерных реакторах с учетом их пространственно-энергетического распределения", Препринт ОИЯИ Р-2216, Дубна 1965 г.

2. А.Говорков. Атомная энергия, 13, 152 (1962); 17 , 474 (1964).

3. F. de Hoffmann. The Science and Engineering of Nuclear Power, Vol II, Addison Wesley, Cambridge , 1949; R.Feynman, F. de Hoffmann, R.Serber, J.Nucl. Energy 3, 64 (1956).

4. J. Orndoff. Nucl. Sci. Eng. 2, 450 (1957).

5. C.Cohn. Nucl. Sci. Eng., 5, 33 (1959).

6. C.Cohn. Nucl. Sci. Eng. 7, 472 (1960).

7. Б.Козик. Препринт ОИЯИ Р-1996, Дубна, 1965. "Статистическое обоснование применения динамической модели к стационарным ядерным реакторам", Атомная энергия (в печати).

8. M.Moore. Nucl. Sci. Eng. 3, 387 (1958).

9. C.Cohn. Nucl. Sci. Eng., 13, 12 (1962).

10. G.Kistner, Nukleonik, 7, 106 (1965).

11. Б.Козик. Корреляционные функции случайных процессов типа размножения. Препринт ОИЯИ Р-2213, Дубна, 1965. Ядерная физика (в печати).

12. R.Schröder, Nukleonik, 4, 227 (1962).

Рукопись поступила в издательский отдел
12 августа 1965 г.