ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р-2321

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Г.И. Кузнецов, Я.А. Смородинский

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕЛЯТИВИСТСКИХ АМПЛИТУД В НЕФИЗИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ

1965

P-2321

Г.И. Кузнецов, Я.А. Смородинский

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕЛЯТИВИСТСКИХ АМПЛИТУД В НЕФИЗИЧЕСКОЙ ОБЛАСТИ

Направлено в журнал "Ядерная физика"

Введение

В работе [1] была рассмотрена проблема разложения релятивистских амплитуд в реальном пространстве Лобачевского (или на языке, более привычном, – переменных s, t, u в физической области любого канала, т.е. $stu>0$) по собственным функциям оператора Лапласа. Цель настоящей статьи – построить интегральные представления амплитуд в нефизических областях Мандельстама с помощью методов интегральной геометрии. Мы проведем рассмотрение этого вопроса с точки зрения s-канала (т.е. в сферической системе координат, если пользоваться терминологией работы [1]). Можно пойти двумя путями:

1) Сопоставить нефизическим областям мнимое пространство Лобачевского (однополостной гиперболоид) и тем самым рассмотреть только Лоренц-инвариантные функции (для мнимых значений переменных).

2) Сопоставить различным кускам нефизической области квадратичные формы различной сигнатуры и тем самым включить в игру на равных правах другие группы (переменные – вещественные).

Плоскость $s+t+u=4$ и 4-мерное пространство скоростей

В теории рассеяния обычно вводят три переменные величины s, t, u, которые связаны с импульсами частиц соотношениями: (рис. 1)

$$
\begin{aligned}
s &= (p_1+p_2)^2 = (p_3+p_4)^2 \\
t &= (p_1-p_3)^2 = (p_4-p_2)^2 \qquad\qquad (\text{II}.1) \\
u &= (p_1-p_4)^2 = (p_3-p_2)^2,
\end{aligned}
$$

причем

$$s+t+u=4 . \qquad\qquad (\text{II}.2)$$

В дальнейшем мы положим $m_1 = 1$. Переменные s, t, u выражаются в системе центра инерции ($\vec p_1 + \vec p_2 = 0$, $\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon$) через энергию частиц и угол рассеяния, а именно

$$s = (\epsilon_1 + \epsilon_2)^2 = 4\epsilon^2$$

$$t = -2|\vec p\,|^2 (1 - \cos\theta) \qquad \text{(II.3)}$$

$$u = -2|\vec p\,|^2 (1 + \cos\theta)\,.$$

Поскольку $\epsilon^2 - \vec p^{\,2} = m^2$ (или в пространстве скоростей $v_0^2 - \vec v^{\,2} = 1$), то можно обозначить $v_0^2 = ch^2 a$, $|\vec v|^2 = sh^2 a$. Тогда формулы (2.3) примут вид:

$$s = 4\, ch^2 a$$

$$t = -2\, sh^2 a\,(1 - z) \qquad \text{(II.3a)}$$

$$u = -2\, sh^2 a\,(1 + z)\,,$$

где $0 \le a \le \infty$, $-1 \le z \le 1$, $z = \cos\theta$.

Этим устанавливается взаимное соответствие между переменными s, t, u и множеством точек $\mathfrak{C}$: $v_0^2 - v_3^2 - v_2^2 - v_1^2 = 1$. Для однозначности в дальнейшем будем рассматривать только верхнюю полу гиперболоида, $v_0 > 0$. Множество точек верхней полы гиперболоида есть 3-мерное пространство Лобачевского RL(3). Зададим в нем сферическую систему координат

$$v_0 = ch\, a$$

$$v_3 = sh\, a \cos\theta$$

$$v_2 = sh\, a \sin\theta \cos\phi \qquad \text{(II.4)}$$

$$v_1 = sh\, a \sin\theta \sin\phi$$

На кинематической диаграмме скоростей /2/ рис.2 "a" есть расстояние между точками s, i ($i = 1,2,3,4$), θ – угол между "прямыми", s –центр инерции s -канала. Формула (II 3a) описывает область sI плоскости Мандельстама рис. 3.

Пусть параметризация переменных s, t, u вида (II 3a) справедлива и в нефизических областях sII, sII', sIII, sIV, sIV'. Конечно, при этом области изменения параметров a, z будут другими. Тогда, если $0 \le a \le \infty$, а z изменяется в пределах $1 \le z \le \infty$, то тем самым мы из области sI переходим в область sII. При этом, как нетрудно убедиться, переменные s, t, u строятся из

$v \in \mathfrak{C}$:
$$v_0^2 - v_3^2 + v_2^2 + v_1^2 = 1\,, \qquad \text{(II.5)}$$

причем на $\mathfrak{C}$(II5) введена система координат

$$v_0 = ch\, a$$

$$v_3 = sh\, a\ ch\, b$$

$$v_2 = sh\, a\ sh\, b \cos\phi \qquad \text{(II.6)}$$

$$v_1 = sha\ sh\, a \sin\phi\,.$$

Здесь $Chb = z$, $1 \le z \le \infty$.

Множество точек $\mathfrak{C}$(II5) с координатной системой (II.5a) изоморфно подмножеству точек мнимого пространства Лобачевского IL(3):

$$u_0^2 - u_3^2 - u_2^2 - u_1^2 = -1\,, \qquad (u_0 \to v_3,\ u_3 \to v_0,\ u_{1,2} \to v_{1,2}),$$

находящихся на вещественном расстоянии от начала отсчета (0100) с гиперболической системой координат. Переход из области sI в sIII осуществляется путем замены $a \to +i\rho$ в формуле (II.3a). Квадратичная форма $v_0^2 - v_3^2 - v_2^2 - v_1^2 = 1$ при требовании вещественности пространства превращается в 3-мерную сферу

$$v_0^2 + v_3^2 + v_2^2 + v_1^2 = 1\,, \qquad \text{(II.6)}$$

на которой задана координатная система вида:

$$v_0 = \cos\rho$$

$$v_3 = \sin\rho \cos\theta$$

$$v_2 = \sin\rho \sin\theta \cos\phi \qquad \text{(II.6a)}$$

$$v_1 = \sin\rho \sin\theta \sin\phi\,.$$

Квадратичная форма (II. 6), соответствующая распадной области sIII, есть инвариант группы O(4). Формула Эйнштейна $E^2 - p^2 = m^2$ заменяется в s III на формулу $E^2 + p^2 = m^2$. Формально в s III можно сохранить Лоренц-инвариантность, считая m -4-ой компонентной, а E^2 – инвариантом, т.е. $m^2 - p^2 = E^2$.

Для перехода в область s IV из s I нужно заменить $b \to +i\theta$, $a \to +i\rho$.

При этом пространство Лобачевского превращается в вещественное пространство с сигнатурой (2,2).

$$v_0^2 + v_3^2 - v_2^2 - v_1^2 = 1 \qquad \text{(II.7)}$$

с координатной системой

$$v_0 = \cos\rho$$

$$v_3 = \sin\rho\ ch\, b$$

$$v_2 = \sin\rho\ sh\, b \cos\phi$$

$$v_1 = \sin\rho\ sh\, b \sin\phi\,.$$

Поскольку s, t, u есть билинейные формы из векторов v, то мы выбираем в дальнейшем при замене $a \to \pm i\rho$, $b \to \pm i\theta$ и т.д. только знак плюс.

Итак, областям sI, sII, sIII, sIV плоскости Мандельстама соответствует 4-мерное вещественное пространство с заданными квадратичными формами

$$F_\alpha = \sum_i g_\alpha^{ii} v_i v_i = 1,$$

где

$$g_I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}; \quad g_{II} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad g_{III} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad g_{IV} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

соответственно.

Перейдем к рассмотрению первой возможности, а именно – сопоставлению всего IL(3) нефизическим областям. Выше мы использовали только часть мнимого пространства Лобачевского. Будем относить теперь областям sIII, sIV, sIV′ (полосе) мнимое пространство Лобачевского с мнимым расстоянием (пространство изотропных прямых), которое можно параметризовать так:[3]:

$$\begin{aligned} v_0 &= \cos\theta \\ v_3 &= \ell \\ v_2 &= \sin\theta \sin\alpha + \ell \cos\alpha \\ v_1 &= -\sin\theta \cos\alpha + \ell \sin\alpha, \end{aligned} \tag{II.8}$$

где $0 \le \Theta \le \pi/2$, $\quad -\infty \le \ell \le \infty$, $\quad 0 \le \alpha \le 2\pi$.

Тогда s по-прежнему сохранит свой вид, т.е. $s = 4\cos^2\theta$, переменные t, u будут иметь более сложную форму

$$\binom{t}{u} = \pm 2\ell\,\ell'(1-\cos\beta) + 2\sin^2\theta\,(1 \mp \cos\beta) + 2\sin\theta\,\sin\beta\,(\pm\ell \mp \ell'), \tag{II.9}$$

$$\beta = \alpha - \alpha'.$$

Формула (II.2) тем не менее сохранится. Таким образом, мы видим, что требование Лоренц-инвариантности в областях sIII, sIV, sIV′ несовместно с сохранением параметризации переменых s, t, u вида (II.3a) и наоборот.

III. Оператор Лапласа и собственные функции

В этом разделе мы изучим оператор Лапласа ("угловую" часть оператора Даламбера) на множествах (II.5), (II.6), (II.7) и собственные функции. На множестве II.5 оператор Даламбера можно записать в виде:

$$\Box = \frac{1}{u^3}\frac{\partial}{\partial u} u^3 \frac{\partial}{\partial u} + \frac{1}{u^2}\Delta_L, \tag{III.1}$$

где u – длина 4-вектора, а Δ_L – оператор Лапласа. Как известно[4], собственные значения многомерного оператора Лапласа равны $-\ell(\ell+n-2)$, где n – размерность пространства. Для $n=4$ собственное значение равно $-\ell(\ell+2)$. Переход от сферы к гиперболоиду приводит к тому, что ℓ перестает быть целым числом и может быть любым комплексным числом. С учетом вышесказанного напишем уравнение на собственные значения:

$$\Delta_L f = -\sigma(\sigma+2) f. \tag{III.2}$$

Чтобы $\sigma(\sigma+2)$ было вещественным, необходимо чтобы

$$\sigma = -1 + i p \quad (p - \text{вещественно}), \tag{III.3}$$

либо σ – вещественно. (III.4)

Из теории представлений известно, что этим значениям отвечают унитарные представления группы Лоренца. При этом (III.3) отвечает представлениям основной серии, а (III.4) – дополнительной серии представлений[5]. Напишем оператор Δ_L в координатной системе (II.5a)

$$\Delta_L = \frac{1}{\mathrm{sh}^2 a}\frac{\partial}{\partial a}\mathrm{sh}^2 a\frac{\partial}{\partial a} + \frac{1}{\mathrm{sh}^2 a\,\mathrm{sh}\, b}\frac{\partial}{\partial b}\mathrm{sh}\, b\frac{\partial}{\partial b} + \frac{1}{\mathrm{sh}^2 a\,\mathrm{sh}^2 b}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}. \tag{III.5}$$

Производя обычное разделение переменных в уравнении (III.2), мы получаем три уравнения для определения собственных функций

$$\begin{aligned} &\left(\frac{1}{\mathrm{sh}^2 a}\frac{\partial}{\partial a}\mathrm{sh}^2 a\frac{\partial}{\partial a} + \sigma(\sigma+2) - \frac{r(r+1)}{\mathrm{sh}^2 a}\right) A(a) = 0 \\ &\left(\frac{1}{\mathrm{sh}\, b}\frac{\partial}{\partial b}\mathrm{sh}\, b\frac{\partial}{\partial b} + r(r+1) - \frac{m^2}{\mathrm{sh}^2 b}\right) B(b) = 0 \\ &\left(\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} + m^2\right)\Phi(\phi) = 0. \end{aligned} \tag{III.6}$$

Решения этих уравнений есть

$$\begin{aligned} &A(a) = \mathrm{sh}^{-1/2} a\; Q^{r+1/2}_{\sigma+1/2}(\mathrm{ch}\, a), \qquad \mathrm{sh}^{-1} a\; P^{-\sigma-1}_{-r-1}(\mathrm{cth}\, a) \\ &B(b) = P^{m}_{-r-1}(\mathrm{ch}\, b) \\ &\Phi(\phi) = e^{im\phi} \end{aligned} \tag{III.7}$$

и для собственной функции получаем

$$\langle \sigma r m \,|\, a b \phi \rangle = \mathrm{sh}^{-1} a\; P^{-\sigma-1}_{-r-1}(\mathrm{cth}\, a)\, P^{m}_{-r-1}(\mathrm{ch}\, b)\, e^{im\phi}. \tag{III.8}$$

На 3-мерной сфере (II.6) с координатной системой (II.6а) лапласиан записывается как

$$\Delta_L = \frac{1}{\sin^2\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\sin^2\rho\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{1}{\sin^2\rho}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\rho\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}. \tag{III.9}$$

Согласно /6/ ортонормированные собственные функции лапласиана (III.9) с собственными значениями $-\sigma(\sigma+2)$ есть

$$<\sigma\ell m\,|\,\rho\theta\phi> = \{N_n^{a,a}\}^{-1/2}(1-\cos^2\rho)^{a/2}P_n^{a,a}(\cos\rho)\;Y_{\ell m}(\theta\phi), \tag{III.10}$$

где $P_n^{a,a}(\cos\rho)$ – полиномы Гегенбауэра, $Y_{\ell m}(\theta\phi)$ сферические функции, $n=\sigma-\ell$, $a=\ell+1/2$, $n\geq 0, 1, 2, \ldots$ и

$$N_n^{a,a} = \frac{2^{2a+1}\,\Gamma^2(n+a+1)}{(2n+2a+1)\,\Gamma(n+1)\,\Gamma(n+2a+1)} \quad \text{норма}.$$

Наконец напишем оператор Лапласа на квадратичной форме (II.7) с координатной системой (II.7а) и его собственные функции (решения уравнения (III.2)).

$$\Delta_L = \frac{1}{\sin^2\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\sin^2\rho\frac{\partial}{\partial\rho} - \frac{1}{\sin^2\rho\,\mathrm{sh}\,b}\frac{\partial}{\partial b}\mathrm{sh}\,b\frac{\partial}{\partial b} - \frac{1}{\sin^2\rho\,\mathrm{sh}^2 b}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \tag{III.11}$$

$$<\sigma r\, m/\rho b\phi> = \sin^{-1/2}\rho\; P^{-r-1/2}_{\sigma+1/2}(\cos\rho)\,P^m_{-r-1}(\mathrm{ch}\,b)\,e^{im\phi},$$

$$<\sigma r\, m/\rho b\phi> = \sin^{-1/2}\rho\; Q^{-r-1/2}_{\sigma+1/2}(\cos\rho)\,P^m_{-r-1}(\mathrm{ch}\,b)\,e^{im\phi}. \tag{III.12}$$

Мы получили собственные функции (III.8), (III.10), (III.12) оператора Лапласа. Теперь эти функции надо нормировать (кроме 3.10), или, что то же самое, найти формулы обращения для разложения по этим собственным функциям. Для этих целей мы используем метод орисфер.

IV. Пространства Лобачевского и метод орисфер

В (n+1) -мерном линейном пространстве R_{n+1} введем билинейную форму

$$[vu] \equiv v_0 u_0 - v_1 u_1 - \ldots - v_n u_n. \tag{IV.1}$$

Далее в R_{n+1} рассмотрим совокупность прямых, проходящих через начало координат и лежащих внутри конуса

$$[v\,v] \equiv v_0^2 - \ldots - v_n^2 = 0, \tag{IV.2}$$

то есть таких прямых, для которых выполняется неравенство $[v\,v]>0$.

Определим расстояние r между прямыми, одна из которых проходит через точку M(v) а другая – через точку N(u), формулой

$$\mathrm{ch}^2 kr = \frac{[vu]^2}{[vv][uu]}. \tag{IV.3}$$

Для прямых внутри конуса выполняется неравенство $\frac{[vu]^2}{[vv][uu]} \geq 1$, причем равенство только в случае совпадения прямых. Другими словами, расстояние r есть вещественное неотрицательное число. Полученное n -мерное пространство называется гиперболическим пространством или пространством Лобачевского $RL(n)$. Величина "k" есть кривизна этого пространства.

Множество прямых, для которых $[v\,v]<0$, с определенным расстоянием (IV.3) называется мнимым пространством Лобачевского $IL(n)$. Расстояние r для мнимого пространства принимает либо вещественные значения $(0\leq r\leq\infty)$, либо – мнимые $(0<r<\frac{i\pi}{2k})$.

Вещественное (мнимое) пространство Лобачевского может быть реализовано:

1) Как внутренность (внешность) сферы единичного радиуса;

2) верхняя полость двуполостного гиперболоида $[v\,v]=1$ (множество точек на поверхности однополостного гиперболоида $[v\,v]=-1$).

Уравнение $[v\,k]=1$, где $[v\,v]=1$, а $[kk]=0$ (конус) называется уравнением орисферы пространства Лобачевского. В $\mathfrak{I}L(n)$ существуют орисферы 1-го рода

$$|[vk]|=1, \qquad [v\,v]=-1, \qquad [k\,k]=0. \tag{IV.5}$$

и орисферы 2-го рода

$$[v\,k]=0. \tag{IV.6}$$

Орисферы 2-го рода расслаиваются на изотропные прямые (прямолинейные образующие однополостного гиперболоида)

$$v = b + k\,t, \tag{IV.7}$$

причем $[vk]=0$, $[b\,k]=0$, $[k\,k]=0$, $[b\,b]=-1$, $-\infty\leq t\leq\infty$.

Функция $f(v)$, $v\in RL(n)$ генерирует функцию на конусе

$$h(k) = \int f(v)\,\delta([k\,v]-1)\,dv, \tag{IV.8}$$

где dv – инвариантная мера на $RL(n)$, равная $dv = v_0^{-1}d^n v$. Преобразование (IV.8) называется интегральным преобразованием Гельфанда–Граева /3/. Формула обращения для этого преобразования в случае $n=2m+1$ есть (см. /3/).

$$f(v) = \frac{(-)^{\frac{n-1}{2}}}{2(2\pi)^{n-1}} \int \delta^{(n-1)}([vk]-1)\, h(k)\, dk . \qquad \text{(IV.9)}$$

и для $n = 2m$

$$f(v) = \frac{(-)^{n/2}\,\Gamma(n)}{(2\pi)^n} \int ([kv]-1)^{-n}\, h(k)\, dk^{\,x)}, \qquad \text{(IV.10)}$$

где $dk = k_0^{-1}\, d^n k$ – инвариантная мера на конусе. Разложение функций, заданных на конусе, на однородные компоненты $\Phi(k,\sigma)$ осуществляется по формуле

$$h(k) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \Phi(k\sigma)\, d\sigma , \qquad \text{(IV.11)}$$

причем в полосе $(0,\delta)$ $\Phi(k\sigma)$ не имеет полюсов, где

$$\Phi(k\sigma) = \int h(kt)\, t^{-\sigma-1}\, dt . \qquad \text{(IV.12)}$$

Из уравнений (IV·8) и (IV.12) следует, что

$$\Phi(k\sigma) = \int f(v)\, [kv]^{\sigma}\, dv . \qquad \text{(IV.13)}$$

Поэтому из уравнений (IV.9), (IV.10), (IV.11) получаем для $n = 2m+1$ (см. 1,3)

$$f(v) = \frac{(-)^{\frac{n-1}{2}}}{2i(2\pi)^n} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{\Gamma(\sigma+n-1)}{\Gamma(\sigma)} \int_{\Gamma} \Phi(k\sigma)\, [kv]^{-\sigma-n+1}\, d^{n-1}k\, d\sigma \qquad \text{(IV.15)}$$

и для $n = 2m$

$$f(v) = \frac{(-)^{\frac{n}{2}-1}}{2i(2\pi)^n} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{\Gamma(\sigma+n-1)}{\Gamma(\sigma)}\, \mathrm{ctg}\, \pi\sigma \int_{\Gamma} \Phi(k\sigma) [kv]^{-\sigma-n+1}\, d^{n-1}k\, d\sigma , \qquad \text{(IV.15)}$$

Контур интегрирования Γ является любым контуром на конусе, пересекающим все образующие конуса и $d^{n-1}k$ есть инвариантная мера на этом контуре, определяемая равенством

$$d(tk) = t^{n-3}\, dt\, dk , \qquad (0 < t < \infty).$$

Функция $f(v)$, $v \in \Im L(n)$ генерирует две функции

$$h(k) = \int f(v)\, \delta(|[kv]|-1)\, dv \qquad \text{(IV.16)}$$

x) Расходящийся интеграл понимается в смысле регуляризованного значения.

$$\Phi(\ell) = \int_{\ell} f(v)\, d\ell \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(b+kt)\, dt = \Phi(b,k) . \qquad \text{(IV.17)}$$

Функция $\Phi(\ell)$ задана на множестве изотропных прямых. Она выражается через компоненты Фурье по формуле /3/

$$\Phi(\ell) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\ell; 2n) . \qquad \text{(IV.18)}$$

Эти компоненты удовлетворяют соотношению

$$F(\ell_2, 2n) = e^{2in\theta}\, F(\ell_1; 2n) , \qquad \text{(IV.19)}$$

где ℓ_2 – изотропная прямая параллельная ℓ_1 и отстоящая от нее на расстояние $\frac{i\theta}{k}$. Для однозначности в формуле (IV.17) "b" и "k" нормированы условиями $k_0 = 1$, $b_0 = 0$. Формула обращения, т.е. выражение $f(v)$ через $h(k)$ и $\phi(\ell)$ имеет следующий вид для $n=3$ (см./3/)

$$f(v) = \frac{(-)}{4i(2\pi)^3} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \sigma(\sigma+1) \int_{\Gamma} \Phi(k\sigma)\, |[kv]|^{-\sigma-2}\, d^2k\, d\sigma + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} n \int_{\Gamma} F(k,v;2n)\, \delta([kv])\, d^2k . \qquad \text{(IV.20)}$$

Функция $\Phi(k\sigma)$ преобразуется по неприводимым унитарным представлениям $T_\chi(g)$, $\chi = (\frac{ip}{2}, -\frac{ip}{2})$, а $F(k,v;2n)$ преобразуется по унитарным дискретным представлениям

$$T_\chi(g), \quad \chi = (2n, -2n) . \qquad [3]$$

Если взять точку "a" за начало отсчета, то первое слагаемое формулы (IV.20) есть разложение $f(v)$ для тех v, для которых $[av] > 1$, а второе слагаемое для $[av] < 1$, то есть для множества точек v, находящихся на мнимом расстоянии от "a". Формула (IV.20) получена с учетом отождествления диаметрально противоположных точек однополостного гиперболоида, т.е. для функции $f(v)$ учитывалось равенство $f(v) = f(-v)$.

V. Построение разложений в нефизических областях

а) Область $s\mathrm{II}$. Согласно (II) нам нужно построить разложение функции на $\mathfrak{C}$; $v_0^2 - v_3^2 + v_2^2 + v_1^2 = 1$ с координатной системой (II.5a). Принимая во внимание изоморфизм (II.5) мнимому пространству Лобачевского с вещественным расстоянием между точками, мы согласно формуле (IV.20) можем написать

$$f(v) = -\frac{1}{4i(2\pi)^2} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \sigma(\sigma+1) \int_{\Gamma} \Phi(k\sigma)\, |[vk]|^{-\sigma-2}\, dk\, d\sigma ,$$

где Γ есть сечение конуса $k_0^2-k_3^2+k_2^2+k_1^2=0$ плоскостью $k_0=1$, т.е. Γ есть $k_3^2-k_2^2-k_1^2=1$ – двухмерное пространство Лобачевского $RL(2)$. Выберем на Γ параметры "c" и ψ

$$\begin{aligned} k_3 &= \operatorname{ch} c \\ k_2 &= \operatorname{sh} c \cos\psi \\ k_1 &= \operatorname{sh} c \sin\psi . \end{aligned} \qquad (V.2)$$

Учитывая (IV.15), имеем

$$\Phi(k,\sigma) = \frac{1}{8i\pi^2}\int_{\epsilon-i\infty}^{\epsilon+i\infty} \tau \operatorname{ctg}\pi\tau \int_{\Gamma'} \Phi(\xi,\sigma,\tau)[k\xi]^{-\tau-1}\, d\xi\, d\tau , \qquad (V.3)$$

где $\xi_3=1$ и Γ' есть $\xi_1^2+\xi_2^2=1$. Полагаем

$\xi_2=\cos\chi$, $\xi_1=\sin\chi$, тогда $d\xi=d\chi$.

Разлагая $\Phi(\xi,\sigma,\tau)$ в ряд Фурье

$$\Phi(\xi\sigma\tau)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m(\tau\sigma)\, e^{im\chi} , \qquad (V.4)$$

подставляя в (V.3) и интегрируя, получаем

$$\Phi(k,\sigma) = \frac{1}{4\pi i}\int_{\epsilon-i\infty}^{\epsilon+i\infty}\tau \operatorname{ctg}\pi\tau \sum_m (-)^m a_m(\tau\sigma)\frac{\Gamma(-\tau)}{\Gamma(-\tau+m)} P^m_{-\tau-1}(\operatorname{ch} c)\, e^{im\psi}\, d\tau . \qquad (V.5)$$

Коэффициенты $a_m(\sigma\tau)$ равны

$$a_m(\sigma,\tau) = \frac{1}{2\pi}\int\int_0^{2\pi}\Phi(k\sigma)[k\xi]^{\tau} e^{-im\chi}\, d^2k\, d\chi = \frac{(-)^m\Gamma(\tau+1)}{\Gamma(\tau+1-m)}\int\Phi(k,\sigma)P^{-m}_{\tau}(\operatorname{ch} c)\,e^{-im\chi}\, d^2k , \qquad (V.5a)$$

где $d^2k = \operatorname{sh} c\, dc\, d\psi$.

Теперь подставим (V.5) в (V.1)

$$f(v)=\frac{1}{2^4(2\pi)^3}\int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty}\sigma(\sigma+1)\int_{\epsilon-i\infty}^{\epsilon+i\infty}\int_{\Gamma}\tau \operatorname{ctg}\pi\tau\sum_m\frac{(-)^m\Gamma(-\tau)\,a_m(\tau\sigma)}{\Gamma(-\tau+m)}\,\frac{P^m_{-\tau-1}(\operatorname{ch} c)\,e^{im\psi}}{|[vk]|^{\sigma+2}}\,d(\operatorname{ch} c)\,d\psi\, d\sigma\, d\tau . \qquad (V.6)$$

Нам надо вычислить интеграл

$$I=\int_1^{\infty}\int_0^{2\pi}\frac{P^m_{-\tau-1}(\operatorname{ch} c)\,e^{im\psi}\,d(\operatorname{ch} c)\,d\psi}{|[vk]|^{\sigma+2}} . \qquad (V.7)$$

Проведем вычисление для точки $v^{(0)}=(\operatorname{ch} a, \operatorname{sh} a, 0\,0)$, а затем перейдем от $v^{(0)}$ к v. Для $v^{(0)}$ (V.7) принимает вид:

$$I = 2\pi\int_1^{\infty}\frac{P_{-\tau-1}(y)\,dy}{|\operatorname{ch} a-\operatorname{sh} a\; y|^{\sigma+2}} . \qquad (V.8)$$

Согласно [7] $|t|^{\nu} = t_+^{\nu} + t_-^{\nu}$,

где

$$t_+ = \begin{cases} t, & t>0 \\ 0, & t<0 ; \end{cases} \qquad t_- = \begin{cases} 0, & t>0 \\ -t, & t<0 , \end{cases} \qquad (V.9)$$

причем

$$t_+^{\nu} = \frac{e^{i\pi\nu}(t-i0)^{\nu} - e^{-i\pi\nu}(t+i0)^{\nu}}{2i\sin\pi\nu} \qquad (V.10)$$

$$t_-^{\nu} = \frac{(t+i0)^{\nu}-(t-i0)^{\nu}}{2i\sin\pi\nu} . \qquad (V.11)$$

Тогда

$$|t|^{\nu} = \frac{(e^{i\pi\nu}-1)(t-i0)^{\nu}+(1-e^{-i\pi\nu})(t+i0)^{\nu}}{2i\sin\pi\nu} , \qquad (V.12)$$

то есть нам нужно вычислить интеграл от функции $P_{-\tau-1}(y)(y+b)^{\nu}$, где 'b' – комплексное число. После вычисления (см. приложение) получаем

$$\frac{I(a\tau\sigma)}{2\pi} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\; i\,\frac{\Gamma(\sigma+1-\tau)\Gamma(1-\sigma)\,e^{-i\pi\tau}\,(e^{-i\pi\sigma}-1)}{\sigma(\sigma+1)\,\Gamma(1-\tau)\,\Gamma(\tau)}\;\frac{Q^{\tau+1/2}_{\sigma+1/2}(\operatorname{ch} a)}{\sqrt{\operatorname{sh} a}} . \qquad (V.13)$$

Как и в [1] интеграл (V.7) выражается через (V.13) формулой

$$I(a, b, \phi, \sigma, \tau) = 2\pi\, P^m_{-\tau-1}(\operatorname{ch} b)\, e^{im\tau}\, I(a,\sigma,\tau) , \qquad (V.14)$$

откуда получаем выражение для разложения функции $f(v)$.

$$
f(v) = -\frac{1}{(2\pi)^{5/2}} \frac{1}{8\pi i} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \int_{\epsilon-i\infty}^{\epsilon+i\infty} r \operatorname{ctg} \pi r \frac{\Gamma(\sigma+1-r)\,\Gamma(1-\sigma)\,\Gamma(-r)}{\Gamma(1-r)\,\Gamma(r)} \times
$$

$$
\times e^{-i\pi r} (e^{-i\pi\sigma} - 1) \sum_{m=-\infty}^{\infty} (-)^m \frac{a_m(r,\sigma)}{\Gamma(-r+m)} \frac{Q^{r+1/2}_{\sigma+1/2}(\operatorname{ch} a)}{\sqrt{\operatorname{sh} a}} P^{m}_{-r-1}(\operatorname{ch} b)\, e^{im\phi}\, dr\, d\sigma . \tag{V.15}
$$

Подставляя (IV.13) в (V.5a) и интегрируя, найдем коэффициенты разложения $a_m(r,\sigma)$

$$
a_m(r,\sigma) = \sqrt{8\pi}\; i \frac{\Gamma(r-\sigma)\,\Gamma(\sigma+1)\, e^{i\pi r} (1-e^{i\pi\sigma})(-)^m}{\Gamma(r+1-m)\,\Gamma(-r-1)(r+1)} \int f(v) \frac{Q^{-r-1/2}_{-\sigma-3/2}(\operatorname{ch} a)}{\sqrt{\operatorname{sh} a}} P^{-m}_{r}(\operatorname{ch} b)\, e^{-im\phi}\, dv ,
$$

где $dv = v_0^{-1} d^3 v = \operatorname{sh}^2 a\, da\, d\operatorname{ch} b\, d\phi$ (V.16).

Поскольку амплитуды не зависят от ϕ, то формулу (V.15) можно записать как

$$
f(s,t,u) = \frac{i\sqrt{2}}{(2\pi)^{9/2}} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} d\sigma\, \Gamma(1-\sigma) \int_{\epsilon-i\infty}^{\epsilon+i\infty} dr\; r \cos \pi r\; \Gamma(\sigma+1-r)\, e^{-i\pi r} (e^{-i\pi\sigma} - 1) \times
$$

$$
\times a(r\sigma)\,(s-4)^{-1/4}\, Q^{r+1/2}_{\sigma+1/2}(\sqrt{s}/2)\, P_{-r-1}\left(\frac{t-u}{s-4}\right). \tag{V.18}
$$

б) Область $s(IV)$. Функция $f(v)$ задается на $v_0^2 + v_3^2 - v_2^2 - v_1^2 = 1$ с координатной системой (II.7a). Уравнение конуса есть $k_0^2 + k_3^2 - k_2^2 - k_1^2 = 0$. Будем считать одни оси чисто вещественными, другие – чисто мнимыми. Иначе (в случае чисто вещественного конуса) мы не смогли бы построить разложение, так как контур Γ представлял бы однополостной двухмерный гиперболоид (сечение $k_0 = 1$). Введем на конусе координатную систему

$$
k_0 = 1, \quad k_3 = i \operatorname{ch} b, \quad k_2 = i \operatorname{sh} b \cos\phi, \quad k_1 = i \operatorname{sh} b \sin\phi . \tag{V.19}
$$

Для получения разложения $f(v)$, $v \in \mathbb{C}$: $v_0^2 + v_3^2 - v_2^2 - v_1^2 = 1$ мы без доказательства воспользуемся формулой (IV.14), в которой компоненты 4-вектора k будут (V.19). Единственным оправданием нам будет служить то, что при таком рассмотрении мы получим разложение $f(v)$, $v \in$ (II.7) по собственным функциям оператора Лапласа, заданного на (II.7) с координатной системой (II.7a), т.е. по функциям (III.12). Ясно, что указанные выше соображения не имеют силы строгого доказательства.

Функция $\Phi(k\sigma)$ разлагается по собственным функциям оператора Лапласа, заданного на верхней поле двумерного гиперболоида и имеет вид (V.5).

Подставляя (V.5) в (IV.14) с $n = 3$ и произведя интегрирование, получаем

$$
f(\nu) = \frac{\sqrt{2}}{(2\pi)^3} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} d\sigma \int_{\epsilon-i\infty}^{\epsilon+i\infty} dr\; r \operatorname{ctg} \pi r\; e^{-\frac{i\pi r}{2}} \frac{\Gamma(\sigma+r+2)}{\Gamma(\sigma)} \sum_m (-)^m \frac{a_m(\sigma,r)\,\Gamma(-r)}{\Gamma(-r+m)} \times
$$

$$
\times e^{im\phi} P^{m}_{-r-1}(\operatorname{ch} b) \frac{\{ i\, Q^{-r-1/2}_{\sigma+1/2}(\cos\rho) + \tfrac{1}{2} P^{-r-1/2}_{\sigma+1/2}(\cos\rho) \}}{\sin^{1/2}\rho} . \tag{V.20}
$$

Формула обратного преобразования получается путем подстановки в формулы (V.5 a) выражения (IV.13) для $\Phi(k\sigma)$ и интегрирования

$$
a_m(r,\sigma) = (-)^m\, 2\pi\, 2^{3/2} e^{\frac{i\pi}{2}(r+1)} \frac{\Gamma(r+1)\,\Gamma(-\sigma-r-1)}{\Gamma(r+1-m)\,\Gamma(-\sigma)} \times
$$

$$
\times \int f(v) \frac{[\, i\, Q^{r+1/2}_{-\sigma-3/2}(\cos\rho) + \tfrac{1}{2} P^{r+1/2}_{-\sigma-3/2}(\cos\rho)]}{\sin^{1/2}\rho} P^{-m}_{r}(\operatorname{ch} b)\, e^{-im\phi}\, dv . \tag{V.21}
$$

В переменных ρ, b, ϕ, dv есть $dv = \sin^2\rho\, d\rho\, d\operatorname{ch} b\, d\phi$.

Для амплитуд в (s IV) разложение (V.21) превращается в

$$
f(s,u,t) = \frac{2}{(2\pi)^3} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} d\sigma \int_{\epsilon-i\infty}^{\epsilon+i\infty} dr\; r \operatorname{ctg} \pi r\; e^{-\frac{i\pi r}{2}} \frac{\Gamma(\sigma+r+2)}{\Gamma(\sigma)} a(\sigma,r) \times
$$

$$
\times P_{-r-1}\left(\frac{u-t}{4-s}\right) [(4-s)^{-1/4} \{ i\, Q^{-r-1/2}_{\sigma+1/2}\left(\sqrt{\frac{s}{4}}\right) + \tfrac{1}{2} P^{-r-1/2}_{\sigma+1/2}\left(\sqrt{\frac{s}{4}}\right) \}] . \tag{V.22}
$$

Заметим, что области sII' и sIV' получаются соответственно из sII и sIV заменой $t \to u$, $u \to t$.

Интересуясь лишь функциональной структурой разложений, мы не произвели их симметризацию, которая только бы увеличила объем работы.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Вычислим интеграл $I(b, a, \lambda)$

$$
I(b, a, \lambda) = \int_1^{\infty} \frac{P_a(y)\, dy}{(y+b)^{\lambda\xi}} . \tag{II.1}
$$

Поначалу предполагается, что $\mathrm{Re}\,\alpha$ и $\mathrm{Re}\,\lambda$ такие, что интеграл существует в обычном смысле. Далее полученный результат аналитически продолжается по α и λ. Заменим $P_\alpha(y)$ ее интегральным представлением

$$P_\alpha(y) = \frac{1}{2^\alpha 2\pi i} \int_c \frac{(t^2-1)^\alpha\, dt}{(t-y)^{\alpha+1}} = \frac{1}{2^\alpha \Gamma(\alpha)} \frac{d^\alpha}{dt^\alpha}(t^2-1)^\alpha \Big|_{\alpha=n}. \tag{II.2}$$

Контур C изображен на рис. 4. Подставляя (II.2) в (II.1), получаем

$$I(b,\alpha,\lambda) = \frac{1}{2^\alpha 2\pi i} \int_1^\infty dy \int_c dt \frac{(t^2-1)^\alpha}{(t-y)^{\alpha+1}(y+b)^\lambda}. \tag{II.3}$$

В формуле (II.3) меняем порядок интегрирования. Поскольку y изменяется до бесконечности, то контур C превращается в C′ рис. 5. При фиксированном t y изменяется от t до ∞. Положим $\alpha+1=-\tau$. Функция $(t-y)^\tau$ на плоскости "y" имеет разрез от t до ∞ рис. 6. Тогда (II.3) можно записать как

$$I(b\tau\lambda) = \frac{1}{2^\alpha 2\pi i}\left[\int_\infty^1 dt \int_t^\infty \frac{dy\,(y-t)^\tau e^{-i\pi\tau}}{(t^2-1)^{\tau+1}(y+b)^\lambda} + \int_1^\infty dt \int_t^\infty \frac{dy\,(y-t)^\tau e^{i\pi\tau}}{(t^2-1)^{\tau+1}(y+b)^\lambda}\right] \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{2^\alpha 2\pi i}\int_1^\infty dt \int_L dy \frac{(t-y)^\tau}{(t^2-1)^{\tau+1}(y+b)^\lambda}, \tag{II.4}$$

т.е.

$$I(b\lambda\tau) = \frac{1}{2^\alpha}\,\frac{\sin\pi\tau}{\tau}\int_1^\infty dt\,(t^2-1)^{-\tau-1}\int_t^\infty (y-t)^\tau (y+b)^{-\lambda}\, dy. \tag{II.5}$$

Воспользуемся формулой 3.196 (2) из /8/. Тогда

$$\int_t^\infty (y-t)^\tau (y+b)^{-\lambda} dy = (t+b)^{\tau+1-\lambda}\, B(\lambda-\tau-1,\ \tau+1), \tag{II.6}$$

где $B(\alpha,\beta) = \dfrac{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$ β – функция Эйлера. Учитывая (II.6) и $\lambda=\sigma+2$, получаем

$$I(b\sigma\alpha) = \frac{\Gamma(\sigma+1-\tau)\,\Gamma(\tau+1)}{\Gamma(\sigma+2)\;\Gamma(\tau)\,\Gamma(1-\tau)}\;\frac{1}{2^\alpha}\int_1^\infty \frac{(t^2-1)^\alpha\, dt}{(t+b)^{\alpha+\sigma+2}}. \tag{II.7}$$

В (II.7) заменено $\dfrac{\sin\pi\tau}{\pi}$ на $[\Gamma(\tau)\,\Gamma(1-\tau)]^{-1}$ и $-\tau=\alpha+1$. Согласно формуле 8.713(2) /8/,

$$\frac{1}{2^\alpha}\int_1^\infty \frac{(t^2-1)^\alpha\, dt}{(t+b)^{\sigma+\alpha+2}} = \Gamma(\sigma+2+\tau)\,\Gamma(-\tau)\,(b^2-1)^{-\frac{\sigma+1}{2}} P^{-\sigma-1}_{-\tau-1}(b) \tag{II.8}$$

Подставляя (II.8) в (II.7) и учитывая соотношение

$$\frac{\Gamma(-\tau)\Gamma(\tau+1)}{\Gamma(1-\tau)\;\Gamma(\tau)} = -1,$$

получаем

$$I(b\sigma\tau) = -\frac{\Gamma(\sigma+2+\tau)\,\Gamma(\sigma+1-\tau)}{\Gamma(\sigma+2)}(b^2-1)^{-\frac{\sigma+1}{2}} P^{-\sigma-1}_{-\tau-1}(b). \tag{II.o9}$$

В главе V(a) мы встретились с интегралом

$$J(a,\tau,\sigma) = \int_1^\infty \frac{P_{-\tau-1}(y)\, dy}{|\,\mathrm{ch}\,a - y\,\mathrm{sh}\,a\,|^{\sigma+2}} =$$

$$= -\frac{1}{\mathrm{sh}^{\sigma+2} a}\int_1^\infty \frac{(e^{-i\pi\sigma}-1)(y-\mathrm{cth}\,a-i0)^{-\sigma-2}+(1-e^{i\pi\sigma})(y-\mathrm{cth}\,a+i0)^{-\sigma-2}}{2i\sin\pi\sigma} P_{-\tau-1}(y)\, dy. \tag{II.10}$$

Поскольку функция $P^\mu_\nu(z)$ имеет разрез от $-\infty$ до 1, то $J(a,\sigma,\tau)$ выражается через значения (II.9) на нижнем и верхнем берегу разреза. Нижний берег:

$$b=-\mathrm{cth}\,a-i0,\quad (b^2-1)^{-\frac{\sigma+1}{2}} P^{-\sigma-1}_{-\tau-1}(b) = (\mathrm{sh}\,a)^{\sigma+1} P^{-\sigma-1}_{-\tau-1}(-\mathrm{cth}\,a-i0). \tag{II.11}$$

Верхний берег:

$$b=-\mathrm{cth}\,a+i0,\quad (b^2-1)^{-\frac{\sigma+1}{2}} P^{-\sigma-1}_{-\tau-1}(b) = -e^{-i\pi\sigma}\,\mathrm{sh}^{\sigma+1} a\; P^{-\sigma-1}_{-\tau-1}(-\mathrm{cth}\,a+i0). \tag{II.11a}$$

Принимая во внимание фазовые множители в (II.10) и (II.11), (II.11a), а также соотношение 8.736(2,3) из /8/, получаем

$$-\frac{1}{2i}\left[P^{-\sigma-1}_{-\tau-1}(-\mathrm{cth}\,a-i0) - P^{-\sigma-1}_{-\tau-1}(-\mathrm{cth}\,a+i0)\right] = \sin\pi\tau\, P^{-\sigma-1}_{-\tau-1}(\mathrm{cth}\,a),$$

откуда

$$J(a,\tau,\sigma) = -\frac{\Gamma(\sigma+2-\tau)\,\Gamma(\sigma+1-\tau)\sin\pi\tau}{\Gamma(\sigma+2)\sin\pi\sigma}(e^{-i\pi\sigma}-1)\frac{P^{-\sigma-1}_{-\tau-1}(\mathrm{cth}\,a)}{\mathrm{sh}\,a}. \tag{II.12}$$

Если учесть соотношение 8.739 из [8]

$$P^{-\sigma-1}_{-r-1}(\mathrm{cth}\,a) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\mathrm{sh}^{1/2} a\; e^{-i\pi(r+1/2)}}{\Gamma(\sigma+r+2)}\, Q^{r+1/2}_{\sigma+1/2}(\mathrm{ch}\,a),$$

то

$$J(a,\sigma,r) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\; i\, \frac{\Gamma(\sigma+1-r)\,\Gamma(1-\sigma)\,e^{-i\pi r}}{\sigma(\sigma+1)\,\Gamma(1-r)\,\Gamma(r)}\,(e^{-i\pi\sigma}-1)\,\frac{Q^{r+1/2}_{\sigma+1/2}(\mathrm{ch}\,a)}{\mathrm{sh}^{1/2} a}. \quad \text{(II.13)}$$

При получении (II.13) учитывались свойства Γ -функции

$$\Gamma(\sigma+1) = \sigma\,\Gamma(\sigma) \qquad\qquad \frac{\sin\pi\sigma}{\pi} = \frac{1}{\Gamma(\sigma)\;\Gamma(1-\sigma)}.$$

Мы выражаем благодарность Н.Я. Виленкину и Ю.А.Данилову за многочисленные обсуждения и помощь.

Литература

1. Н.Я. Виленкин, Я.А.Смородинский. ЖЭТФ, 46, 1793 (1964).
2. Я.А.Смородинский. ЖЭТФ, 43, 2217 (1962).
3. И.М.Гельфанд, М.И.Граев, Н.Я.Виленкин. Интегральная геометрия и связанные с ней вопросы теории представлений. Физматгиз, 1963 г.
4. W.Magnus und F.Oberhettinger. Formulen und Satze fur die speziellen Funktionen der mathematischen Physik. Springer (1950).
5. И.М.Гельфанд, Р.А.Минлос и З.Я.Шапиро. Представления группы вращения и группы Лоренца. Физматгиз (1958).
6. Н.Я.Виленкин, Г.И.Кузнецов, Я.А.Смородинский. Ядерная физика, 2, вып. 5 (1965).
7. И.М.Гельфанд, Г.Е.Шилов. Обобщенные функции и действия над ними. Физматгиз (1959).
8. И.С.Градштейн, И.М.Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов, и произведений. Физматгиз (1963).

Рукопись поступила в издательский отдел
3 августа 1965 г.

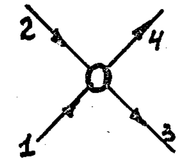

Рис. 1.

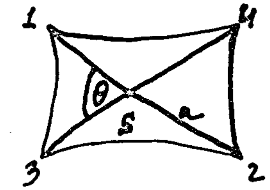

Рис. 2.

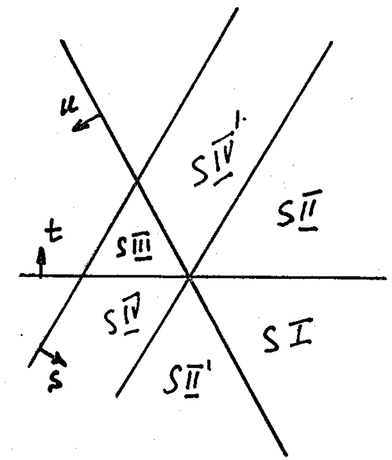

Рис. 3.

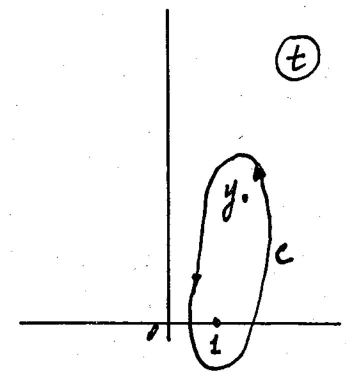

Рис. 4.

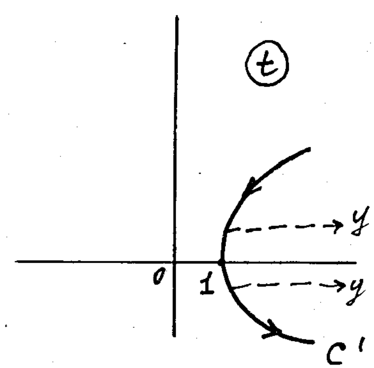

Рис. 5.

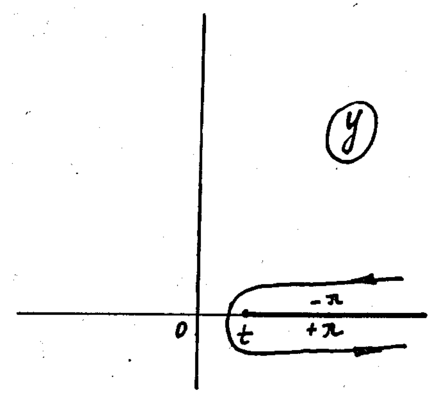

Рис. 6.