

С 323.2

A-62

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P-2310



И. Амирханов, Л.Г. Заставенко, Б.Н. Захарьев

К ВОПРОСУ О КОРРЕКТНОСТИ
МЕТОДА ЕДИНОЙ ТЕОРИИ
ЯДЕРНЫХ РЕАКЦИЙ

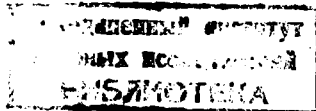
ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1965

P-2310

И. Амирханов, Л.Г. Заставенко, Б.Н. Захарьев

К ВОПРОСУ О КОРРЕКТНОСТИ
МЕТОДА ЕДИНОЙ ТЕОРИИ
ЯДЕРНЫХ РЕАКЦИЙ



1. Введение

В работах Фешбаха ^{/1/} описан удобный метод решения задач о рассеянии частиц сложными системами, например, ядром. В настоящее время этот метод стали интенсивно использовать в ядерной физике. Однако пока очень мало известно о сходимости используемых в этом методе разложений.

В работе ^{/2/} исследовалась корректность метода в одномерном случае со сложной частицей, обладающей только дискретным спектром. В работе ^{/3/} рассмотрена одномерная задача, когда сложная частица имеет дискретный и непрерывный спектр. В настоящей работе исследуется трехмерный случай. Мы ограничимся задачей трех тел, из которых два тела, образующие сложную частицу, связаны сферически симметричной прямоугольной ямой конечной глубины. Взаимодействие этих двух частиц с третьей мы выбираем в виде потенциала типа Вудса-Саксона: резко спадающего за конечным радиусом и имеющего конечные производные по всем направлениям.

В разделе 2 даны основные уравнения рассматриваемого метода. В разделе 3 рассмотрены свойства волновых функций сложной частицы. В разделе 4 изучаются коэффициенты $\bar{C}_{\alpha\alpha'}$, описывающие переходы между различными состояниями сложной частицы. В разделе 5 показано, что населенность высших виртуальных состояний убывает с ростом энергии быстрее чем $\sim \frac{1}{k^4}$.

2. Основные уравнения

В этом разделе будут приведены основные формулы метода единой теории ядерных реакций. При этом мы будем пользоваться обозначениями, использованными в книге Друкарева ^{/4/}.

Пусть волновая функция $\Psi(\vec{R}, \vec{\rho})$ описывает движение сложной частицы во внешнем поле

$$-\frac{\hbar^2}{2M} \Delta_{\vec{R}} \Psi - \frac{\hbar^2}{2\mu} \Delta_{\vec{\rho}} \psi + [\mathcal{U}_1(\vec{R}, \vec{\rho}) + \mathcal{U}_2(\vec{R}, \vec{\rho}) + \mathcal{U}_{12}(\vec{\rho})] \Psi = E \Psi, \quad (1)$$

где \mathcal{U}_1 и \mathcal{U}_2 - потенциалы внешнего поля, действующего на частицы 1,2, образующие сложную частицу, \mathcal{U}_{12} - потенциал взаимодействия между частицами 1 и 2; $\vec{\rho}$ - расстояние между частицами 1,2; \vec{R} - координата центра масс сложной частицы. Разложим $\Psi(\vec{R}, \vec{\rho})$ по полному набору собственных функций $\psi_{k l_1 m_1}$ внутреннего движения в сложной частице (включая и непрерывный спектр)

$$\Psi(\vec{R}; \vec{\rho}) = \sum_{k l_1 m_1} F_{k l_1 m_1}(\vec{R}) \psi_{k l_1 m_1}(\vec{\rho}). \quad (2)$$

Для функций $F_a(\vec{R})$ ($a = k l_1 m_1$), описывающих движение центра масс сложной частицы в состояниях a получаем бесконечную систему дифференциальных уравнений

$$\Delta F_a + (k_a^2 - V_{aa}) F_a = \sum_{a' \neq a} V_{aa'} F_{a'}, \quad (3)$$

где

$$V_{aa'}(\vec{R}) = \int \psi_a^*(\vec{\rho}) [\mathcal{U}_1(\vec{R}, \vec{\rho}) + \mathcal{U}_2(\vec{R}, \vec{\rho})] \psi_{a'}(\vec{\rho}) d\vec{\rho}. \quad (4)$$

Разложим теперь $F_a(\vec{R})$ по сферическим гармоникам:

$$F_a(\vec{R}) = \sum_{l_2} \frac{f_{l_2 m_2}^{l_2 m_2}(R)}{R} Y_{l_2 m_2}(\theta, \Phi), \quad (5)$$

где l_2 - момент движения центра масс сложной частицы во внешнем поле.

Для f система (3) запишется в виде:

$$\frac{d^2 f_{l_2 m_2}^{l_2 m_2}}{dR^2} + [k_a^2 - \frac{l_2(l_2+1)}{R^2}] f_{l_2 m_2}^{l_2 m_2} = \sum_{k' l_1' m_1'} \frac{l_2 m_2 l_2' m_2'}{k l_1 m_1} \mathcal{U}_{k l_1 m_1, k' l_1' m_1'} f_{l_2' m_2'}^{l_2' m_2'}. \quad (6)$$

где

$$\mathcal{U}_{k l_1 m_1, k' l_1' m_1'} = \int Y_{l_2 m_2}^*(\theta, \Phi) V_{aa'} Y_{l_2' m_2'}(\theta, \Phi) d\Omega_{\vec{R}}. \quad (7)$$

Часто бывает удобно перейти от квантовых чисел $l_1 m_1 l_2 m_2$ к $l_1 l_2 L M$, где $\vec{L} = \vec{l}_1 + \vec{l}_2$ - полный момент, а M - его проекция. Мы, однако, будем работать в представлении $l_1 m_1 l_2 m_2$.

3. Свойства волновых функций $\psi_{k l_1 m_1}$

Рассмотрим собственные волновые функции $\psi_{k l_1 m_1}$ для сферически-симметричной прямоугольной потенциальной ямы $\mathcal{U}_{12}(\rho)$

$$\mathcal{U}_{12}(\rho) = \begin{cases} -V_0 & \text{при } \rho \leq \rho_0 \\ 0 & \text{при } \rho > \rho_0 \end{cases} \quad (8)$$

Дискретный спектр

$$\psi_{k l_1 m_1} = \begin{cases} A_{k l_1 m_1} j_{l_1}(k\rho) Y_{l_1 m_1}(\theta, \phi) & \text{при } |\vec{\rho}| \leq \rho_0 \\ B_{k l_1 m_1} h_{l_1}^{(1)}(\kappa\rho) Y_{l_1 m_1}(\theta, \phi) & \text{при } |\vec{\rho}| > \rho_0 \end{cases} \quad (9)$$

где

$$k = \sqrt{2\mu(V + \epsilon_n)}; \quad \kappa = \sqrt{-2\mu\epsilon_n} \quad (10)$$

ϵ_n - энергия внутреннего движения сложной частицы.

Своего максимума функции дискретного спектра достигают при $|\vec{\rho}| < \rho_0$. Оценку сверху для $\max |\psi_{\text{дискр.}}|$ можно получить, исходя из того факта, что максимум модуля функции $\psi_a^{\text{дискр.}}$ с теми же квантовыми числами, но для бесконечной прямоугольной ямы радиуса ρ_0 больше $\max |\psi_a|$. Положение уровней в конечной яме можно оценить следующим образом. Глубина ямы, при которой появляется уровень, может служить оценкой снизу для высоты уровня над дном ямы, так как с увеличением глубины прямоугольной ямы уровень относительно дна ямы монотонно поднимается. Оценкой сверху может служить положение соответствующего уровня в бесконечной прямоугольной яме того же радиуса ρ_0 . Для конкретных расчетов см. А.С. Давыдов, Квантовая механика, стр. 149, 1963.

Непрерывный спектр

$$A_{k \ell_1 m_1} j_{\ell_1}(k\rho) Y_{\ell_1 m_1}(\theta, \phi) \quad |\vec{\rho}| \leq \rho_0 \quad (11)$$

$$B_{k \ell_1 m_1} k' [\cos \delta_{\ell_1} j_{\ell_1}(k'\rho) - \sin \delta_{\ell_1} n_{\ell_1}(k'\rho)] Y_{\ell_1 m_1}(\theta, \phi) \quad |\vec{\rho}| > \rho_0$$

где

$$k = \sqrt{2\mu(\xi_n + V_0)}; \quad k' = \sqrt{2\mu\xi_n} \quad (12)$$

Коэффициент $B_{k \ell_1 m_1} = \sqrt{2/\pi}$, если нормировать функции непрерывного спектра на $\delta_{(k-k')}$ функцию. Коэффициенты $A_{k \ell_1 m_1}$ и δ_{ℓ_1} определяются из условия непрерывности функции и ее производной при $|\vec{\rho}| = \rho_0$. В предельном случае больших энергий ($k'\rho \gg 1$) легко показать, что $A \leq \sqrt{2/\pi}$.

Используя асимптотические значения:

$$j_{\ell}(k\rho) \xrightarrow{k\rho \rightarrow \infty} \frac{1}{k\rho} \cos[k\rho - \frac{1}{2}(\ell+1)\pi]; \quad (13)$$

$$n_{\ell}(k\rho) \xrightarrow{k\rho \rightarrow \infty} \frac{1}{k\rho} \sin[k\rho - \frac{1}{2}(\ell+1)\pi],$$

запишем условия сшивания на границе $|\vec{\rho}| = \rho_0$.

$$A_{k \ell_1 m_1} \cos[k\rho_0 - \frac{1}{2}(\ell+1)\pi] = \sqrt{2/\pi} \cos[k'\rho_0 - \frac{1}{2}(\ell+1)\pi + \delta_{\ell}] \quad (14)$$

$$A_{k \ell_1 m_1} k \sin[k\rho_0 - \frac{1}{2}(\ell+1)\pi] = \sqrt{2/\pi} k' \sin[k'\rho_0 - \frac{1}{2}(\ell+1)\pi + \delta_{\ell}].$$

Возведем в квадрат обе стороны в уравнениях (14), умножим первое из полученных уравнений на k^2 и сложим; воспользуемся кроме того неравенством $k' < k$:

$$A_{k \ell_1 m_1} < \frac{2}{\pi} \quad (15)$$

Эта оценка оказывается верной при всех энергиях в случае $\ell=0$; $\ell=1$; для больших значений ℓ общего доказательства пока получить не удалось (см. Приложение 1).

4. Коэффициенты смешивания $\mathcal{C}_{k \ell_1 m_1, k' \ell'_1 m'_1}^{\ell_2 m_2, \ell'_2 m'_2}$

Для доказательства корректности метода единой теории ядерных реакций^{/1/} требуется показать, что коэффициенты \mathcal{C} достаточно быстро убывают при больших k и k' .

Нужную нам оценку можно получить, интегрируя по частям последний интеграл по ρ в формуле для \mathcal{C}

$$\mathcal{C}_{k \ell_1 m_1, k' \ell'_1 m'_1}^{\ell_2 m_2, \ell'_2 m'_2} = \int d\Omega_{\vec{\rho}} d\Omega_{\vec{R}} Y_{\ell_2 m_2}(\theta, \Phi) Y_{\ell'_2 m'_2}^*(\theta, \Phi) Y_{\ell_1 m_1}(\theta, \phi) Y_{\ell'_1 m'_1}^*(\theta, \phi) \int [\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2] N N' R_{k \ell_1} R_{k' \ell'_1} \rho^2 d\rho \quad (16)$$

Здесь N ; N' ; $R_{k \ell}$; $R_{k' \ell'}$ соответственно нормированные множители и радиальные части волновых функций ψ_a , $\psi_{a'}$.

При интегрировании полезно воспользоваться формулой, справедливой для произвольных цилиндрических функций Z_{ρ} и 3_{ρ} (Градштейн и Рыжик формула^{/5.54/5/}):

$$\int_{\rho} Z_p(k\rho) 3_p(k'\rho) d\rho = \frac{k'\rho Z_p(k\rho) 3_{p-1}(k'\rho) - k\rho Z_{p-1}(k\rho) 3_p(k'\rho)}{k^2 - k'^2} \quad (17)$$

Из этой формулы следует, что каждое интегрирование по ρ (по частям) в (16) будет давать нам дополнительную степень k и k' в знаменателе. Такая оценка, однако, неудобна при k , очень близких к k' , так как в этом случае в знаменателе оказывается малая величина ($k - k'$).

Для k , близких к k' , при интегрировании по частям (16) по ρ следует воспользоваться формулой (5.56)^{/5/}.

$$\int_{\rho} Z_p(k\rho) 3_q(k\rho) d\rho = k\rho \frac{Z_{p-1}(k\rho) 3_q(k\rho) - Z_p(k\rho) 3_{q-1}(k\rho)}{p^2 - q^2} - \frac{Z_p(k\rho) 3_q(k\rho)}{p+q} \quad (18)$$

Для дальнейшего нам потребуется оценка для $\sum_{\ell_2 m_2, \ell'_2 m'_2} |\mathcal{C}|$. В этой сумме значительный вклад дают лишь члены с $\ell'_1 < 2(R+R_0)$, так как $k k'$ волновые функции в матричном элементе резко затухают в области под центробежным барьером. Поэтому в дальнейшем мы будем пренебрегать членами с $\ell'_1 > 2k(R+R_0)$. По m'_1 суммирование идет до ℓ'_1 , а по ℓ'_1 до $2k(R+R_0)$. Таким образом, каждое суммирование по m' и по ℓ'_1 увеличивает степень k в энергетической зависимости. Суммирование по

$\vec{\ell}'_2$ ограничено условием, что сумма $\vec{\ell}'_1 + \vec{\ell}'_2$ должна быть равна полному моменту системы \vec{L} и поэтому не влияет на энергетическую зависимость рассматриваемого выражения. В частном случае $L = 0$ $\vec{\ell}'_2 = -\vec{\ell}'_1$ и суммирование по $\vec{\ell}'_2$ нет.

Интегрирование (16) по частям по переменной ϕ оказывается полезным, так как в явной форме выделяет множитель $\frac{1}{m-m'}$ (после этого под интегралом появляется $\frac{\partial}{\partial \phi} (\mathcal{C}_1 + \mathcal{C}_2)$).

После необходимого количества преобразований (16) с помощью интегрирования по частям по ρ и по ϕ мы будем для оценки максимума модуля \mathcal{C} мажорировать в подынтегральном выражении при $|\vec{\rho}| \leq \rho$ функции Бесселя $I_{\ell+\frac{1}{2}}(k\rho) = \sqrt{\frac{2k\rho}{\pi}} J_{\ell}(k\rho)$ единицей, а при $|\vec{\rho}| > \rho_0$ воспользуемся следующей оценкой ($\ell > 0$; $k\rho > \ell$; $\pi \ell + \frac{1}{2} = \nu$)

$$\sqrt{\rho} [\cos \delta_{\ell} I_{\ell+\frac{1}{2}}(k\rho) - \sin \delta_{\ell} N_{\ell+\frac{1}{2}}(k\rho)] < \sqrt{\rho} [|I_{\nu}(k\rho)| + |N_{\nu}(k\rho)|] < \sqrt{2k\rho} \frac{\sqrt{I_{\nu}^2(k\rho) + N_{\nu}^2(k\rho)}}{\sqrt{k}} < \frac{\sqrt{2} [I_{\nu}^2(\nu) + N_{\nu}^2(\nu)]}{\sqrt{k}} < \frac{C_{\nu} \nu^{1/6}}{k^{1/2}} \quad (19)$$

При выводе (19) использован тот факт, что для $\nu > \frac{1}{2}$ $k\rho [I_{\nu}^2(k\rho) + N_{\nu}^2(k\rho)]$ монотонно убывает с ростом $k\rho^{1/5}$, а также неравенства $J_{\nu}(\nu) < C_1 \nu^{-1/3}$; $N_{\nu}(\nu) < C_2 \nu^{-1/3}$ формула 8,54, где C_1 ; C_2 — определяемые константы.

Для $\ell = 0$ имеем $\sqrt{\rho} [\cos \delta_0 I_0(k\rho) - \sin \delta_0 N_0(k\rho)] = \sqrt{\frac{2}{\pi k\rho}} \sin(k\rho + \delta_0)$.

Для нас существенно, что полученные после интегрирования по частям и мажорации интегралы не расходятся. Этому условию удовлетворяют потенциалы \mathcal{C}_1 и \mathcal{C}_2 , достаточно гладкие и быстро убывающие вместе со своими производными на больших расстояниях, например, потенциалы типа Вудса-Саксона.

5. Населенность $|q|^2$ высших виртуальных состояний сложной частицы

Рассмотрим решения g_a $a = k\ell_1 m_1 \ell_2 m_2$ однородных уравнений, получающихся из системы (6) отбрасыванием членов, содержащих коэффициенты \mathcal{C} :

$$\frac{d^2 g_a}{dR^2} + [k_a^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{R^2}] g_a = 0, \quad (20)$$

где $k_a^2 = 2M(E - \epsilon_a)$. (21)

С помощью двух (для каждого a) линейно-независимых решений g_a ; \bar{g}_a мы можем записать систему (6) в интегральной форме ^{/2,3/}:

$$f_a = g_{a_1} \int_0^R g_{a_2} \sum_{a'} \mathcal{C}_{aa'} f_{a'} dR + g_{a_2} \int_R^{\infty} g_{a_1} \sum_{a'} \mathcal{C}_{aa'} f_{a'} dR + C_{a_1} g_{a_1} + C_{a_2} g_{a_2} \quad (22)$$

Здесь функции g_a нормированы условием: $g'_{a_1} g_{a_2} - g_{a_1} g'_{a_2} = 1$.

В качестве g_{a_1} , с $k_a^2 < 0$ ($k = +i\kappa$) выберем решение, экспоненциально убывающее при $R \rightarrow \infty$, а g_{a_2} выберем конечным при $R \rightarrow 0$.

Такими решениями являются

$$g_{a_1}(\kappa R) = \sqrt{R} I_{\ell+\frac{1}{2}}(\kappa R)$$

$$g_{a_2}(\kappa R) = \sqrt{R} K_{\ell+\frac{1}{2}}(\kappa R) \quad (23)$$

$$K I' - I K' = \frac{1}{\kappa R}$$

где I и K — цилиндрические функции, связанные с функцией Бесселя J и функцией Ханкеля первого рода $H^{(1)}$:

$$I_{\nu}(z) = e^{-\frac{\pi i \nu}{2}} J_{\nu}(e^{\frac{\pi i}{2}} z); \quad K_{\nu}(z) = -\frac{\pi i}{2} e^{\frac{\pi i \nu}{2}} H_{\nu}^{(1)}(iz).$$

Константы C_a ; C_{a_2} выберем равными нулю при $k_a^2 < 0$ (т.е. для значений a , соответствующих виртуальным возбуждениям, для реального возбуждения которых не хватает энергии).

Функции f_a , с $k_a^2 < 0$ описывают движение центра масс сложной частицы с отрицательной энергией (подбарьерное движение). Они экспоненциально убывают вне области, где существенно влияние внешнего поля.

Функции g_a с $k_a^2 < 0$ везде положительны. Для максимума модуля \bar{f}_k и функции f_a при заданном k мы получаем систему уравнений ^{/2,3/}:

$$\bar{f}_k = z_k \sum_{k'} \bar{\mathcal{C}}_{kk'} \bar{f}_{k'} + [g_{a_1} \int_0^R g_{a_2} dR + g_{a_2} \int_R^{\infty} g_{a_1} dR]. \quad (24)$$

Здесь $\bar{\mathcal{C}}_{kk'}$ — величина большая или равная максимуму функции $\sum_{\ell', \ell'', m} |\mathcal{C}_{aa'}|$ в области, где существенно влияние внешнего поля, z_k некоторая функция от k , строго меньшая единицы.

Величина, стоящая в квадратных скобках в (24), может быть мажорирована функцией C/κ_a^2 , где C — некоторая константа. Это сразу получается, если подставить вместо g_{a_1} их асимптотические значения:

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} K_{\nu}(\kappa_{\alpha} R) = \sqrt{\frac{\pi}{2\kappa_{\alpha} R}} e^{-\kappa_{\alpha} R} \quad (25)$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} I_{\nu}(\kappa_{\alpha} R) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \kappa_{\alpha} R}} e^{\kappa_{\alpha} R}$$

Более строгое доказательство см. в Приложении 2.

Итак, для \bar{f}_{κ} мы получаем, подобно одномерному случаю ^{/2,3/}, систему уравнений, которая в матричной форме имеет вид:

$$\bar{f} = B\bar{f} + f_s \quad (\alpha\text{-параметр обрыва системы } ^{/2,3/},) \quad (26)$$

где \bar{f} - вектор с компонентами \bar{f}_{κ} , B - матрица с матричными элементами

$$B_{\kappa\kappa'} = \frac{z_{\kappa}}{\kappa^2} \bar{C}_{\kappa\kappa'} \quad (27)$$

а f_s - вектор с компонентами

$$f_s = \frac{z_{\kappa}}{\kappa^2} \sum_{\kappa' < \kappa} \bar{C}_{\kappa\kappa'} \quad (28)$$

Для доказательства убывания населенности высших виртуальных состояний сложной частицы нам нужно, чтобы она обладала свойствами

$$(B^2)_{\kappa\kappa'} < B_{\kappa\kappa'} P_s \quad (29)$$

где $P_s \rightarrow 0$ с ростом α . Этого оказывается можно добиться соответствующим выбором (см. приложение 3).

Решая (26) итерациями и используя (29), мы получим при достаточно больших

$$\bar{f} < f_s + B f_s \quad (30)$$

Можно показать, что $(B f_s)_{\kappa}$ стремится к нулю с ростом α . Величина f_{κ} убывает с ростом κ быстрее, чем $\frac{C}{\kappa^2}$. Таким образом, населенность виртуальных состояний будет убывать:

$$|f_{\kappa}|^2 < |f_{\alpha}|^2 < \frac{C}{\kappa^4} \quad (31)$$

К нулю будет стремиться и ошибка, вносимая обрывом системы уравнений (6).

З а к л ю ч е н и е

Полученные результаты, к сожалению, не могут служить для конкретных оценок погрешностей при обрыве системы дифференциальных уравнений при малых α . Однако они свидетельствуют о принципиальной корректности метода единой теории ядерных реакций в рассмотренном конкретном случае и могут послужить отправным пунктом для получения более точных оценок.

Выражаем благодарность В.С. Болотину, М.А. Касымжанову, Р.К. Калинаускасу, принимавшим участие в данной работе на первом ее этапе. Мы благодарны также В.Б. Беляеву, В.К. Лукьянову, И. Петкову за многочисленные стимулирующие дискуссии.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Сшивание функции и ее производной на краю прямоугольной ямы в случае $l=0$ аналогично рассмотренному в разделе 3 асимптотическому случаю $k\rho \rightarrow \infty$. В этом случае $j_0(k\rho) = \frac{\sin k\rho}{k\rho}$; $n_0(k\rho) = -\frac{\cos(k\rho)}{k\rho}$ и условия сшивания получаются из (14), если положить $l=0$. В случае $l = \frac{k\rho}{l}$

$$j_1 = \frac{\sin k\rho}{(k\rho)^2} - \frac{\cos k\rho}{k\rho}; \quad n_1(k\rho) = -\frac{\cos k\rho}{(k\rho)^2} - \frac{\sin k\rho}{k\rho}$$

Для упрощения расчетов мы напомним условие непрерывности для производной не от функции ψ , а от $\rho^2\psi$. Вместо (14) получаем в этом случае:

$$\Phi = A_1 (\sin k\rho_0 - k\rho_0 \cos k\rho_0) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{k}{k'} \sin(k'\rho_0 + \delta_1) - k\rho_0 \cos(k'\rho_0 + \delta_1) \right] \quad (1.П.1)$$

$$\Phi' = A_1 \sin k\rho_0 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{k'}{k} \sin(k'\rho_0 + \delta_1)$$

Согласно (1.П.1), можно написать уравнения:

$$\Phi^2 + \Phi'^2 (1 + k^2 \rho_0^2) - 2\Phi\Phi' - k^2 \rho_0^2 A^2 = 0 \quad (1.П.2)$$

$$\Phi^2 + \Phi'^2 \left(\frac{k^4}{k'^4} + \frac{k^4}{k'^4} \rho_0^2 \right) - 2\Phi\Phi' \frac{k^2}{k'^2} - \frac{2}{\pi} k^2 \rho_0^2 = 0 \quad (1.П.3)$$

Для того, чтобы (1.П.1) были совместны, эллипсы, описываемые уравнениями (1.П.2) и (1.П.3), должны иметь общие точки. Это возможно лишь при $A < \sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Рассмотрим выражение в квадратных скобках в (24):

$$D = g_{\alpha_1} \int_0^R g_{\alpha_2} dR + g_{\alpha_2} \int_{\alpha_1}^{\infty} g_{\alpha_1} dR. \quad (2.П.1)$$

Перейдем к переменной $x = \kappa R$ и функциям $\phi_{1\ell} = 2\sqrt{\kappa} g_{1\ell}$; $\phi_{2\ell} = 2\sqrt{\kappa} g_{2\ell}$.

$$D = \frac{1}{\kappa^2} \left[\frac{1}{2} \phi_{1\ell} \int_0^x \phi_{2\ell} dx + \frac{1}{2} \phi_{2\ell} \int_x^{\infty} \phi_{1\ell} dx \right] = \frac{1}{\kappa^2} u. \quad (2.П.2)$$

Функция u является решением уравнения:

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{\ell(\ell+1)}{x^2} - 1 \right) u = -1 \quad (2.П.3)$$

с граничными условиями $x/$

$$u(0) = 0; \quad u(\infty) = 1. \quad (2.П.4)$$

Покажем, что верна следующая

Теорема: Функция $u(x)$, определяемая согласно (2.П.3), (2.П.4), при $0 < x < \infty$ удовлетворяет неравенству: $0 \leq u(x) \leq 1$.

Доказательство:

Уравнение (2.П.3) с граничными условиями (2.П.4) имеет единственное решение, так как однородное уравнение для ϕ не имеет решений, удовлетворяющих условиям $\phi(0) = \phi(\infty) = 0$.

Рассмотрим функционал:

$$\Phi(t) = \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dt}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} t^2 + \frac{\ell(\ell+1)}{x^2} t - \frac{1}{2} - (t-1) \right] dx. \quad (2.П.5)$$

Лемма: в классе непрерывных функций t , удовлетворяющих краевым условиям $t(0) = 0$; $t(\infty) = 1$ минимум функционалу Φ доставляет решение уравнения (2.П.3).

$$\text{Пусть } t = u + \delta, \text{ где } \delta(0) = \delta(\infty) = 0. \quad (2.П.6)$$

Подставляя (2.П.6) в (2.П.5) и используя (2.П.3), получим

$$\begin{aligned} & \text{Поскольку при } x \rightarrow \infty, \phi_{1\ell} \sim e^{-x}; \phi_{2\ell} \sim e^{-x} \text{ то } u(\infty) = 1, \\ & \text{а при } x \rightarrow 0, \phi_{1\ell} \sim x^{-\ell}; \phi_{2\ell} \sim x^{\ell+1}, \text{ то } u(0) = 0. \end{aligned}$$

$$\Phi(u + \delta) = \Phi(u) + \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\delta}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} \delta^2 + \frac{\ell(\ell+1)}{x^2} \delta \right] dx. \quad (2.П.7)$$

Отсюда видно, что $\Phi(u + \delta)$ минимален при $\delta = 0$.

Лемма доказана.

Заменой $t = 1 - w$ преобразуем $\Phi(t)$ к виду:

$$\hat{\Phi}(w) = \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 + \frac{1}{2} w^2 + \frac{\ell(\ell+1)}{x^2} (w^2 - 2w + 1) \right] dx. \quad (2.П.8)$$

Из (2.П.8) видно, что

$$\hat{\Phi}(|w|) \leq \hat{\Phi}(w). \quad (2.П.9)$$

Итак, функция $w_0 = 1 - u$, доставляющая минимум $\hat{\Phi}(w)$, неотрицательна, так что $u \leq 1$. С другой стороны, поскольку $\phi_{1\ell}$ и $\phi_{2\ell}$ неотрицательны, следует, что $u \geq 0$. Теорема доказана.

Отметим, что $u(x)$ при $x > 0$, по-видимому, монотонно растет с ростом x . При $\ell = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ и $0 < x < 20$ справедливость этого предположения была проверена численным счетом.

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Ввиду чрезвычайной громоздкости доказательства о стремлении к нулю P_3 с ростом ν в данном приложении мы рассмотрим лишь энергетическую зависимость соответствующих выражений, не останавливаясь на конкретном выводе коэффициентов, не имеющих принципиального значения.

Для оценки максимума величины $\sum_{aa'} |\bar{C}_{aa'}|$ при $\kappa \neq \kappa'$ продифференцируем (16) дважды по частям по ρ , используя $(17')$, и мажорируем подынтегральное выражение, как указано в разделе 4. В результате под суммой мы получим два члена, пропорциональные $\frac{\sqrt{\kappa \kappa'}}{(\kappa - \kappa')^2}$ и $\frac{(\ell, \ell')^{1/6}}{(\kappa - \kappa')^2}$, соответственно. Суммируя по m' и ℓ' , получим

$$\sum_{\ell_1 m_1'} |\bar{C}_{aa'}| < \frac{C_1 \sqrt{\kappa \kappa'} \kappa'^2}{(\kappa - \kappa')^2} + \dots$$

Таким образом, для V , согласно (27), получаем:

$$V_{\kappa\kappa'} = \frac{C \sqrt{\kappa\kappa'} \kappa'^2}{\kappa^2 (\kappa - \kappa')^2} \quad (3.П.1)$$

При $\kappa = \kappa'$ продифференцируем (16) по частям по ϕ и по ρ , используя (18). В результате мажорации и суммирования по ϕ_1, ϕ_1' , получаем:

$$V_{\kappa\kappa} = C \frac{\ell_n^2 \kappa}{\kappa} \quad (3.П.2)$$

аналогично при κ , близких к κ' Согласно (3.П.1), (3.П.2) получаем:

$$\begin{aligned} (V^2)_{\kappa\kappa'} &= \sum_{\alpha < \rho \neq \kappa, \kappa'} V_{\kappa\rho} V_{\rho\kappa'} + V_{\kappa\kappa'} \sum_{\alpha < \rho = \kappa} V_{\kappa\rho} + V_{\kappa\kappa'} \sum_{\alpha < \rho = \kappa'} V_{\rho\kappa'} = \\ &= V_{\kappa\kappa'} \left(C \sum_{\alpha < \rho \neq \kappa, \kappa'} \frac{(\kappa - \kappa')^2 \rho}{(\kappa - \rho)^2 (\rho - \kappa')^2} + C \frac{\ell_n^2 \kappa}{\kappa} + C \frac{\ell_n^2 \kappa}{\kappa'} \right) \end{aligned} \quad (3.П.3)$$

$$\begin{aligned} (V^2)_{\kappa\kappa} &= \sum_{\alpha < \rho \neq \kappa} V_{\kappa\rho} V_{\rho\kappa} + V_{\kappa\kappa} \sum_{\alpha < \rho = \kappa} V_{\kappa\rho} = \\ &= V_{\kappa\kappa} \left(C \sum_{\alpha < \rho \neq \kappa} \frac{\rho \kappa^2}{\ell_n^2 \kappa (\kappa - \rho)^4} + C \frac{\ell_n^2 \kappa}{\kappa} \right) \end{aligned} \quad (3.П.4)$$

Согласно (3.П.3) и (3.П.4) P_8 в (20) можно выбрать так, чтобы $P_8 \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$.

Л и т е р а т у р а

1. H. Feshbach, Единая теория ядерных реакций, 'Ann. of Phys. 5, 357 (1958).
2. Б.Н. Захарьев, С.Н. Соколов. О виртуальных возбуждениях сложной частицы. Ann. der Phys.
3. Б.Н. Захарьев, Р.К. Калинаускас. О связанном состоянии трех частиц. Препринт ОИЯИ Р-1882, Дубна 1964.
4. Г.Ф. Друкарев. Теория столкновений электронов с атомами. Физматгиз, Москва, 1966.
5. И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Физматгиз, Москва, 1963.
6. Г.Н. Ватсон. Теория бесселевых функций, Москва, ИЛ, 1949.
7. Е. Янке, Ф. Эмде. Таблицы функций с формулами и кривыми. Физматгиз, 1959 г.

Рукопись поступила в редакционный отдел
31 июля 1965 г.