27/X-65

ЖЭТФ, 48, 607 (1965

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р – 2309

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Б.М. Барбашов, М.К. Волков

ИССЛЕДОВАНИЕ ИНФРАКРАСНЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ СЕЧЕНИЯ РАССЕЯНИЯ МЕТОДОМ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

ЖЭТФ, 1966, т50, в3, с660-671.

1965

Р - 2309

Б.М. Барбашов, М.К. Волков

ИССЛЕДОВАНИЕ ИНФРАКРАСНЫХ ОСОБЕННОСТЕЙ СЕЧЕНИЯ РАССЕЯНИЯ МЕТОДОМ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Направлено в ЖЭТФ

§ 1. Введение

Построение амплитуд процессов с использованием метода функционального интегрирования связано с двумя принципиальными трудностями: во-первых, с нахождением замкнутых решений для функций Грина частиц в произвольном внешнем поле и, во-вторых, с выполнением функционального усреднения этих решений по внешнему полю с соответствующим весом. Помимо перечисленных принципиальных трудностей имеет место и чисто техническая трудность, связанная с тем, что амплитуда процесса выражается через соответствующую функцию Грина, умноженную на коэффициенты, пропорциональные обратным функциям распространения свободных полей, которые на массовой поверхности обращаются в нуль. Поэтому из функции Грина должны быть выделены полюсные члены, компенсирующие указанные нули на массовой поверхности. В теории возмущений эта компенсация очевидна, поскольку выражение для амплитуды строится из свободных функций распространения, однако, если функция Грина отыскивается с использованием методов, отличных от теории возмущений, выделение полюсных членов представляет определенную трудность.

В интересной работе Г.А. Милехина и Е.С. Фрадкина [1], посвященной вычислению процессов рассеяния ферми-частиц с помощью метода функционального интегрирования, описанная выше проблема была преодолена с помощью сомнительной операции (хотя бы с точки зрения релятивистской инвариантности теории) разбиения виртуальных фотонов на мягкие и жесткие и использования первого порядка теории возмущений по жестким фотонам. Метод учета вклада мягких квантов в этой работе также не удачен, поскольку он основан на аппроксимации причинной функции Грина

$$D_\mu(2p(s_1-s_2)) \to \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^4k \; D_\mu(k)\, e^{i2kp(s_1-s_2)-ik^2(s_1-s_2)},$$

в то время, как для соответствия с первыми порядками теории возмущений необходимо иметь в экспоненте не (s_1-s_2), а модуль этой величины. В результате это приводит к неправильной процедуре перенормировок.

Настоящая работа представляет собой попытку развития и улучшения работы [1].

Предлагаемый метод свободен от перечисленных недостатков и с самого начала является более последовательным, поскольку основан на точной записи амплитуды через функциональные интегралы. Приближения возникают только при взятии функциональных квадратур. Исходным является предложенный одним из авторов [2] способ формального решения уравнений для функций Грина во внешнем поле с помощью функционального интеграла. Функции Грина уравнений Клейна-Гордона и Дирака, полученные данным способом, позволяют легко провести функциональное усреднение по внешним полям, не выполняя первоначальных квадратур и найти таким образом квантовые функции Грина. Благодаря этому, из вышеперечисленных двух принципиальных трудностей остается одна: выполнение функциональных квадратур, возникших при решении уравнений во внешнем поле. Предлагаемый в работе [2] способ приближенного вычисления функциональных интегралов оказывается хорошим приближением к истинным значениям в инфракрасной области виртуальных квантов. На простом примере взаимодействия двух скалярных полей с лагранжианом $L_{int} = g : \psi^2(x)\,\phi(x) :$ где одно поле $\phi(x)$ обладает нулевой массой, проведено вычисление сечения взаимодействия квантов поля $\psi(x)$. При этом пренебрегается эффектами поляризации вакуума поля $\psi(x)$, которые несущественны в инфракрасной области. Эти расчеты легко переносятся на случай квантовой электродинамики.

В разделе 2 приводится метод получения амплитуды рассеяния, выраженной через функциональный интеграл, и с ее помощью находится сечение рассеяния частицы поля $\psi(x)$. Используется процедура компенсации инфракрасных расходимостей путем суммирования процессов с испусканием бесконечного числа мягких квантов поля $\phi(x)$. Раздел 3 посвящен переходу на массовую поверхность импульсов, связанных с внешними концами, и приближенному вычислению функциональных интегралов.

Окончательные результаты, относящиеся к асимптотическим значениям сечения, близки к результатам, полученным ранее в работах [1,3,4].

2. Двухчастичная функция Грина и дифференциальные сечения рассеяния в модели $L_{int} = g : \psi^2(x)\,\phi(x) :$

Функция Грина двух частиц поля $\psi(x)$ связана с одночастичной функцией Грина во внешнем поле функциональным интегралом

$$G(x_1 x_2 | x_3 x_4) = \int \delta\phi\, e^{-\frac{1}{2}\int \phi(\xi) D^{-1}(\xi\xi')\phi(\xi')\,d\xi\, d\xi'} [\, G(x_1 x_3 | \phi)\, G(x_2 x_4 | \phi) + \tag{1}$$

$$+ G(x_1 x_4 | \phi)\, G(x_2 x_3 | \phi)\,]\; S_0(\phi)\,,$$

где $S_0(\phi)$ – среднее от S -матрицы по вакууму поля $\psi(x)$. Далее мы не будем учитывать вклады вакуумных петель и положим $S_0(\phi) = 1$. Это приближение оправдано при изучении инфракрасных особенностей амплитуд (см., например, [3]). Функция Грина частицы поля $\psi(x)$ в классическом поле $\phi(x)$ удовлетворяет уравнению

$$[\, i^2 \partial_\mu^2 - m_\psi^2 + g\,\phi(x)\,]\; G(x, y \,|\, \phi) = -\,\delta(x - y)\,. \tag{2}$$

Решение этого уравнения в виде функционального интеграла получено в работе [2] и имеет вид:

$$G(x, y\,|\phi) = i\int_0^\infty ds\, e^{-ism_\phi^2}\; c \int \delta^4\nu\; e^{-i\int_0^s d\xi [\nu_\mu^2(\xi) - g\,\phi(x - 2\int_\xi^s \nu(\eta)\,d\eta)]}\, \delta^4(x - y - 2\int_0^s \nu(\eta)\,d\eta). \tag{3}$$

Подставим (3) в (1) и проинтегрируем по ϕ, что легко сделать, поскольку возникают гауссовы интегралы. При этом мы разобьем поле ϕ на две части: внешнее, от которого остается зависимость квантовой функции Грина, и поле, по которому проводится интегрирование. В результате получим:

$$G(x_1 x_2 | x_3 x_4) = \iint_0^\infty ds_1\, ds_2\, e^{-im_\phi^2(s_1 + s_2)} \iint d^4\nu_1\, d^4\nu_2\, e^{-i\int_0^{s_1} \nu_1^2(\xi)\,d\xi - i\int_0^{s_2} \nu_2^2(\xi)\,d\xi}\, \delta(x_1 - x_3 - 2\int_0^{s_1} \nu_1(\eta)\,d\eta)\,\delta(x_2 - x_4 - 2\int_0^{s_2} \nu_2(\eta)\,d\eta) \times \tag{4}$$

$$\times \exp\{ ig\int_0^{s_1} d\xi\,\phi(x_1 - 2\int_\xi^{s_1} \nu_1(\eta)\,d\eta) + ig\int_0^{s_2} d\xi\,\phi(x_2 - 2\int_\xi^{s_2}\nu_2(\eta)\,d\eta)\}\, \exp\{+ig^2\int_0^{s_1} d\xi \int_0^{s_2} d\zeta\, D(x_1 - x_2 - 2\int_\xi^{s_1}\nu_1(\eta)\,d\eta + 2\int_\zeta^{s_2}\nu_2(\eta)\,d\eta)\} \times$$

$$\times \exp\{ + i\,\frac{g^2}{2} [\, \int_0^{s_1}\!\int_0^{s_1} d\xi\, d\zeta\, D(2\int_\zeta^\xi \nu_1(\eta)\,d\eta) + \int_0^{s_2}\!\int_0^{s_2} d\xi\, d\zeta\, D(2\int_\zeta^\xi \nu_2(\eta)\,d\eta)\,]\}\,.$$

Перейдем к импульсному пространству

$$G(p'q'|pq) = \int d^4x_1\, d^4x_2\, d^4x_3\, d^4x_4\, e^{ip'x_1 + iq'x_2 - ipx_3 - iqx_4}\; G(x_1 x_2 | x_3 x_4)\,. \tag{5}$$

Производя замену переменных интегрирования $y_1 = x_3,\ y_2 = x_3 - x_4,\ y_3 = x_1 - x_3,\ y_4 = x_2 - x_4$ а также замену функциональных переменных $\nu_1(\eta) = \omega_1(\eta) + p',\ \nu_2(\eta) = \omega_2(\eta) + q'$ и выполняя интегрирование по y_3 и y_4 с учетом δ – функций в (4), получим

$$G(p'q'|pq) = \int dy_1\, dy_2\, e^{i(p' + q' - p - q)y_1 + i(q - q')y_2} \iint_0^\infty ds_1\, ds_2\, e^{i(p_1^2 - m_\phi^2)s_1 + i(q_1^2 - m_\phi^2)s_2} \times$$

$$\times \iint d^4\omega_1\, d^4\omega_2\, e^{-i\int_0^{s_1}\omega_1^2(\xi)\,d\xi - i\int_0^{s_2}\omega_2^2(\xi)\,d\xi} \exp\{ ig\int_0^{s_1} d\xi\,\phi(y_1 + 2p'\xi + 2\int_0^\xi \omega_1(\eta)\,d\eta) + ig\int_0^{s_2} d\xi\,\phi(y_1 - y_2 + 2q'\xi + 2\int_0^\xi \omega_2(\eta)\,d\eta)\} \times \tag{6}$$

$$\times \exp\Big\{ +i\frac{g^2}{2}\Big[\int_0^{s_1}\!\!\int_0^{s_1} d\xi\, d\zeta\, D\big(2p'(\xi-\zeta)+2\int_\zeta^\xi \omega_1(\eta)\,d\eta\big)+\int_0^{s_2}\!\!\int_0^{s_2} d\xi\, d\zeta\, D\big(2q'(\xi-\zeta)+2\int_\zeta^\xi \omega_2(\eta)\,d\eta\big)+2\int_0^{s_1} d\xi \int_0^{s_2} d\zeta\ \times$$

$$\times\ D\big(y+2p'\xi-2q'\zeta+2\int_0^\xi \omega_1(\eta)\,d\eta-2\int_0^\zeta \omega_2(\eta)\,d\eta\big)\Big]\Big\}.$$

Пользуясь этим выражением для двухчастичной функции Грина, мы можем найти матричный элемент рассеяния по известной формуле:

$$(2\pi)^4\delta(p'+q'-p-q)\, f(p'q'|pq) = \tfrac{1}{4}\lim_{p^2,q^2,p'^2,q'^2\to m^2}(p'^2-m^2)(p^2-m^2)(q'^2-m^2)(q^2-m^2)\, G(p'q'|pq)\, S_0 \quad (7)$$

Однако амплитуда $f(p'q'|pq)$ будет содержать инфракрасные расходимости, поскольку поле $\phi(x)$ обладает нулевой массой. Как хорошо известно, в сечении процесса рассеяния эта трудность устраняется благодаря учету испускания бесконечного числа мягких квантов поля $\phi(x)$, общая энергия которых не превосходит величины Δ, равной разрешающей способности измерительного прибора.

Амплитуду процесса рассеяния с испусканием n квантов поля $\phi(x)$ можно получить из найденной функции Грина во внешнем поле (6), подействовав на нее оператором $\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\omega_i}}\frac{\delta}{\delta\phi(k_i)}$ и воспользовавшись формулой (7). Для учета тождественности излученных частиц необходимо ввести множитель $\frac{1}{\sqrt{n!}}$. В результате приходим к формуле

$$f_n(p'q'|pq) = \tfrac{1}{4}\lim_{p'^2,p^2,q'^2,q^2\to m^2}(p'^2-m^2)(p^2-m^2)(q'^2-m^2)(q^2-m^2)\int dy\, e^{i(q-q')y}\iint_0^\infty ds_1\, ds_2\, e^{i(p'^2-m_0^2)s_1+i(q'^2-m_0^2)s_2}\ \times$$

$$\times\iint d^4\omega_1\, d^4\omega_2\, e^{-i\int_0^{s_1}\omega_1^2(\xi)\,d\xi-i\int_0^{s_2}\omega_2^2(\xi)\,d\xi}\ \exp\Big\{+i\frac{g^2}{2}\Big[\int_0^{s_1}\!\!\int_0^{s_1} d\xi\, d\zeta\, D\big(2p'(\xi-\zeta)+2\int_\zeta^\xi\omega_1(\eta)\,d\eta\big)+$$

$$+\int_0^{s_2}\!\!\int_0^{s_2} d\xi\, d\zeta\, D\big(2q'(\xi-\zeta)+2\int_\zeta^\xi\omega_2(\eta)\,d\eta\big)+2\int_0^{s_1}d\xi\int_0^{s_2}d\zeta\, D\big(x+2p'\xi-2q'\zeta+2\int_0^\xi\omega_1(\eta)\,d\eta\ - \quad (8)$$

$$-2\int_0^\zeta\omega_2(\eta)\,d\eta\big]\Big\}\frac{1}{\sqrt{n!}}\prod_{i=1}^{n}\frac{ig}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2\omega_i}}\Big\{\int_0^{s_1}d\xi_i\Big[e^{2ik_i\left[p'\xi_i+\int_0^{\xi_i}\omega_1(\eta)\,d\eta\right]}\ +$$

$$+\int_0^{s_2}d\zeta_i\, e^{2ik_i\left[q'(\zeta_i-\frac{x}{2})+\int_0^{\zeta_i}\omega_2(\eta)\,d\eta\right]}\Big\}.$$

С помощью (8) можно построить сечение интересующего нас процесса:

$$d\sigma = \frac{1}{(2\pi)^2(p_0q_0p'_0q'_0)}\sum_{n=0}^{\infty}\theta\big(\Delta-\sum_{i=1}^{n}\omega_i\big)\,d^3k_1\,d^3k_2\ldots d^3k_n\ \times$$

$$\times|f_n|^2\,\delta^4\big(p'+q'-p-q-\sum_{i=1}^{n}k_i\big)\,\frac{d^3p'\,d^3q'}{J}. \quad (9)$$

Проведя суммирование по n подобно тому, как это было сделано в работе /1/, получим

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{d\sigma_0}{d\Omega}\Big[\lim_{p^2,p'^2,q^2,q'^2\to m^2}(p^2-m^2)(p'^2-m^2)(q'^2-m^2)(q^2-m^2)\Big]^2\frac{\ell^4}{g^4}\ \times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{i\Delta r}-1}{2\pi i r}\,dr\int dy\, dy'\, e^{i\ell(y-y')}\int_0^\infty ds_1\, ds_2\, ds'_1\, ds'_2\, e^{i(p'^2-m_0^2)(s_1-s'_1)}\ \times \quad (10)$$

$$\times\ e^{i(q'^2-m_0^2)(s_2-s'_2)}\iint d^4\omega_1\, d^4\omega_2\, d^4\omega'_1\, d^4\omega'_2\, e^{-i\int_0^{s_1}d\xi\,(\omega_1^2(\xi)-\omega_1'^2(\xi))-i\int_0^{s_2}d\xi\,(\omega_2^2-\omega_2'^2)}\ \times$$

$$\exp\{F(s_1s_2,y)+F^*(s'_1,s'_2,y')-2\Phi(s_1,s_2,s'_1,s'_2,r)\}.$$

Здесь $\ell = q-q'$ – передача импульса, $\frac{d\sigma_0}{d\Omega}$ – сечение рассеяния в первом порядке теории возмущений, а функции $F(s_1s_2y)$ и $\Phi(s_1s_2s'_1s'_2r)$ имеют вид:

$$F(s_1s_2y) = -\frac{ig^2}{2(2\pi)^4}\int\frac{d^4k}{k^2+i\epsilon}\Big\{\int_0^{s_1}\!\!\int_0^{s_1}d\xi\, d\zeta\, e^{2ik\left[p'(\xi-\zeta)+\int_\zeta^\xi\omega_1(\eta)\,d\eta\right]}\ +$$

$$+\int_0^{s_2}\!\!\int_0^{s_2}d\xi\, d\zeta\, e^{2ik\left[q'(\xi-\zeta)+\int_\zeta^\xi\omega_2(\eta)\,d\eta\right]}+2\int_0^{s_1}d\xi\int_0^{s_2}d\zeta\, e^{iky+2ik\left[p'\xi-q'\zeta+\int_0^\xi\omega_1(\eta)\,d\eta-\int_0^\zeta\omega_2(\eta)\,d\eta\right]}.$$

$$\Phi(s_1s_2s'_1s'_2) = -\frac{g^2}{4(2\pi)^3}\int\frac{d^3k}{\omega}\, e^{-i\omega r}\Big\{\int_0^{s_1}d\xi\int_0^{s'_1}d\zeta\, e^{2ik\left[p'(\xi-\zeta)+\int_0^\xi\omega_1(\eta)\,d\eta-\int_0^\zeta\omega'_1(\eta)\,d\eta\right]}\ +$$

$$+\int_0^{s_1}d\xi\int_0^{s'_2}d\zeta\, e^{2ik\left[p'\xi-q'\zeta+\frac{y'}{2}+\int_0^\xi\omega_1(\eta)\,d\eta-\int_0^\zeta\omega'_2(\eta)\,d\eta\right]}+\int_0^{s_2}d\xi\int_0^{s'_2}d\zeta\, e^{2ik\left[q'(\xi-\zeta)-\int_0^\zeta\omega'_2(\eta)\,d\eta+\int_0^\xi\omega_2(\eta)\,d\eta\right]}\ +$$

$$+\int_0^{s'_1}d\xi\int_0^{s_2}d\xi\, e^{2ik\left[q'\zeta-\frac{y}{2}-p'\xi-\int_0^\xi\omega'_1(\eta)\,d\eta+\int_0^\zeta\omega_2(\eta)\,d\eta\right]}\Big\}.$$

Интегралы по k в $F(s_1, s_2, y)$, как будет показано далее, расходятся. Для их регуляризации необходимо произвести перенормировку массы, т.е. выделить из $F(s_1 s_2 y)$ члены типа $(s_1 - s_1')\delta m$ и $(s_2 - s_2')\delta m$, после чего в формуле (10) мы переходим к наблюдаемым массам $m = m_0 + \delta m$ и к перенормированной функции $F_r(s_1 s_2 y)$, обладающей свойством $\lim\limits_{s_1, s_2 \to \infty} F_r(s_1 s_2 y) < \infty$. Величина δm будет вычислена в конце работы.

После выполнения вышеописанных операций мы получаем возможность использовать для (10) соотношение

$$\lim_{p^2 \to m^2} i \int_0^\infty ds\, e^{-is(p^2-m^2)+F_r(s)} = \lim_{p^2 \to m^2} \frac{1}{m^2-p^2} e^{F_r(\infty)}, \tag{11}$$

справедливое для любой конечной функции $F_r(s)$. В результате этого получим:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma_0}{d\Omega} \left[\lim_{p^2, q^2 \to m^2} (p^2-m^2)(q^2-m^2) \right]^2 \frac{\ell^4}{g^4} \int dr \frac{e^{i\Delta r} - 1}{2\pi i r} \int dy\, dy'\, e^{i\ell(y-y')} \times$$
$$\times \int d^4\omega_1 d^4\omega_2 d^4\omega_1' d^4\omega_2' e^{-i\int_0^\infty d\xi [\omega_1^2(\xi) + \omega_2^2(\xi) - \omega_1'^2(\xi) - \omega_2'^2(\xi)]} \times \tag{12}$$
$$\times \exp\{F_r(\infty, \infty, y) + F_r^*(\infty, \infty, y') - 2\Phi(\infty, r)\}.$$

После перенормировки массы в F_r и F_r^* остаются инфракрасные расходимости. Функция -2Φ компенсирует эти расходимости в реальных частях F_r и F_r^*. Остающиеся инфракрасные расходимости в мнимых частях этих функций взаимно компенсируются, что можно явным образом записать, добавляя к $i\,\mathrm{Im}\, F_r$ и вычитая из $i\,\mathrm{Im}\, F_r^*$ мнимую величину $i\Delta = -i\,\mathrm{Im}\, F_r(\infty, \infty, 0)$. Далее мы будем обозначать

$$\tilde{F}_r = F_r + i\Delta, \qquad \tilde{F}_r^* = F_r^* - i\Delta.$$

§ 3. Переход на массовую поверхность и приближенное вычисление функциональных интегралов

Переход на массовую поверхность $p^2, q^2 \to m^2$ требует выделения в формуле (12) полюсных членов $\frac{1}{p^2-m^2}$, $\frac{1}{q^2-m^2}$, компенсирующих множители (p^2-m^2), (q^2-m^2). С этой целью проведем предварительно преобразование формулы (12), эквивалентное исключению из амплитуды не дающего вклада в сечение нулевого порядка теории возмущений, что достигается следующим интегральным представлением

$$e^{\tilde{F}_{r,2} - \Phi_2} - 1 = (\tilde{F}_{r,2} - \Phi_2) \int_0^1 d\alpha\, e^{\alpha(\tilde{F}_{r2} - \Phi_2)}, \tag{13}$$

где $\tilde{F}_{r,2}$ и Φ_2 – те части функций F_r и Φ, которые зависят от переменных y и y'. $F_r = F_{r2}(y) + F_{r1}$, $\Phi = \Phi_2(r, y, y') + \Phi_1(r)$.

Используя его, приходим к формуле

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \simeq \frac{d\sigma_0}{d\Omega} \lim_{p^2, q^2 \to m^2} (p^2-m^2)^2 (q^2-m^2)^2 \frac{\ell^4}{(2\pi)^8} \int_{-\infty}^{\infty} dr \frac{e^{i\Delta r} - 1}{2\pi i r} \int dy\, dy'\, e^{i\ell(y-y')} \times$$
$$\times \int d^4\omega_1 d^4\omega_2 d^4\omega_1' d^4\omega_2' e^{-i\int_0^\infty d\eta [\omega_1^2(\eta) + \omega_2^2(\eta) - \omega_1'^2(\eta) - \omega_2'^2(\eta)]} \times \tag{14}$$
$$\times \int \frac{d^4k}{k^2 + i\epsilon} \int \frac{d^4k'}{k'^2 - i\epsilon} e^{iky - ik'y'} \iint_0^\infty d\xi'\, d\zeta'\, e^{-2ik'[p'\xi' - q'\zeta' + \int_0^{\xi'} \omega_1'(\eta)\, d\eta - \int_0^{\zeta'} \omega_2'\, d\eta]} \times$$
$$\times \iint_0^\infty d\xi\, d\zeta\, e^{-2ik[p'\xi - q'\zeta + \int_0^{\xi} \omega_1(\eta)\, d\eta - \int_0^{\zeta} \omega_2(\eta)\, d\eta]} \int_0^1 \int_0^1 d\alpha\, d\beta\, \exp\{\alpha \tilde{F}_{r2}(y) - \alpha \Phi_2(r, y, y') +$$
$$+ \beta [\tilde{F}_2^*(y') - \Phi_2(r, y, y')]\} e^{2\mathrm{Re}\, F_1 - 2\Phi_1(r)}$$

В приведенном выражении опущены члены, не существенные при переходе на массовую поверхность. Произведем интегрирование по переменным y, y' и k, k', разлагая далее экспоненту в ряд по константе связи и используя интегральное представление

$$\frac{1}{k^2+i\epsilon} = \frac{i}{\pi^2}\int \frac{d^4x}{x^2-i\delta}\, e^{-2ikx} \qquad (15)$$

Возвращаясь после описанной операции вновь к экспоненте, получаем:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma_0}{d\Omega} \lim_{p^2,\, q^2\to m^2} (p^2-m^2)^2 (q^2-m^2)^2 \frac{\ell^4}{\pi^4} \int_{-\infty}^{\infty} dr\, \frac{e^{i\Delta r}-1}{2\pi i r} \times$$

$$\times \int d^4x\, d^4x' \frac{e^{-2i\ell(x-x')}}{(x^2-i\delta)(x'^2+i\delta)} \int d^4\omega_1\, d^4\omega_2\, d^4\omega'_1\, d^4\omega'_2\, e^{-i\int_0^\infty d\eta[\omega_1^2(\eta)+\omega_2^2-\omega_1'^2-\omega_2'^2]} \times$$

$$\times \iiiint_0^\infty d\xi\, d\xi'\, d\zeta\, d\zeta'\, e^{2i(q-q')[q'\zeta+\int_0^\zeta \omega_2(\eta)\,d\eta - q'\zeta' - \int_0^{\zeta'} \omega'_2\, d\eta]} \times$$

$$\times e^{2i(p-p')[p'\xi+\int_0^\xi \omega_1\, d\eta - p'\xi' - \int_0^{\xi'} \omega'_1(\eta)\,d\eta]} \int_0^1\int_0^1 d\alpha\, d\beta\, e^{\alpha[\tilde{F}'_{r2}(x)-\Phi'_2(r)]} \times$$

$$\times e^{\beta[\tilde{F}'^{*}_{r2}(x')-\Phi'_2(r)]} \qquad e^{2[\mathrm{Re}\, F'_1-\Phi'_1(r)]},$$

где

$$F'_1 = -i\frac{g^2}{2(2\pi)^4}\int \frac{d^4k}{k^2+i\epsilon} \iint_0^\infty d\xi\, d\zeta\, [e^{i2k[p'(\xi-\zeta)+\int_\zeta^\xi \omega_1(\eta)\,d\eta]} + e^{i2k[q'(\xi-\zeta)+\int_\zeta^\xi \omega_2(\eta)\,d\eta]}] + i\delta_1 m^2 S_1 + i\delta_2 m^2 S_2$$

$$\tilde{F}'_2(x) = -i\frac{g^2}{(2\pi)^4}\int \frac{d^4k}{k^2+i\epsilon} \iint_0^\infty d\xi'\, d\zeta'\, e^{i2k[-x+p'(\xi'-\xi)-q'(\zeta'-\zeta)+\int_\xi^{\xi'} \omega_1\, d\eta - \int_\zeta^{\zeta'} \omega_2\, d\eta]}$$

$$\Phi'_1(r) = -\frac{g^2}{4(2\pi)^3}\int \frac{d^3k}{\omega}\, e^{-ir\omega} \iint_0^\infty d\xi''\, d\zeta''\, [e^{i2k[p'(\xi''-\xi)-p'(\zeta''-\xi')+\int_\xi^{\xi''} \omega_1\, d\eta - \int_{\xi'}^{\zeta''} \omega'_1\, d\eta]} +$$

$$+ e^{i2k[q'(\xi''-\zeta)-q'(\zeta''-\zeta')+\int_\zeta^{\xi''} \omega_2\, d\eta - \int_{\zeta'}^{\xi''} \omega'_2\, d\eta]}]$$

$$\Phi'_2(r) = -\frac{g^2}{4(2\pi)^3}\int \frac{d^3k}{\omega}\, e^{-ir\omega} \iint_0^\infty d\xi''\, d\zeta''\, [e^{i2k[p'(\xi'-\xi)-q'(\zeta''-\zeta')+\int_\xi^{\xi''} \omega_1\, d\eta - \int_{\zeta'}^{\zeta''} \omega'_2\, d\eta]} +$$

$$+ e^{i2k[-p'(\xi''-\xi')+q'(\zeta''-\zeta)-\int_{\xi'}^{\xi''} \omega'_1\, d\eta + \int_\zeta^{\zeta''} \omega_2\, d\eta]}].$$

Производя в (16) преобразование функциональных переменных $(\ell' = p' - p)$

$$\omega_1(\eta) = \lambda_1(\eta) - \ell'\theta(\xi-\eta);\quad \omega_2(\eta) = \lambda_2(\eta) + \ell\theta(\zeta-\eta);\quad \omega'_1(\eta) = \lambda_3(\eta) - \ell'\theta(\xi'-\eta); \qquad (17)$$

$$\omega'_2(\eta) = \lambda_4(\eta) + \ell\theta(\zeta'-\eta),$$

приходим к интегралам типа

$$\int_0^\infty d\xi\, e^{i(p^2-p'^2)\xi+\psi(\xi)}, \qquad (18)$$

для которых при $p^2 \to p'^2$ применима формула (11), так как $\psi(\xi)$ – конечная функция. Эта процедура выделяет оставшиеся полюсные члены, сокращающие множители $(p^2-m^2)^2$ и $(q^2-m^2)^2$. Окончательно получаем сечение в виде:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{d\sigma_0}{d\Omega} \frac{\ell^4}{\pi^4} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i\Delta r}-1}{2\pi i r}\, dr \int dy_1\, dy_2 \frac{e^{-i2\ell(y_1-y_2)}}{(y_1^2-i\epsilon)(y_2^2+i\epsilon)} \int d^4\lambda_1\, d^4\lambda_2\, d^4\lambda_3\, d^4\lambda_4\, e^{-i\int_0^\infty d\eta\, [\lambda_1^2+\lambda_2^2-\lambda_3^2-\lambda_4^2]} \times$$

$$\times \exp\{2(\mathrm{Re}\, F''_{r_1} - \Phi''_1)\} \int_0^1\int_0^1 d\alpha\, d\beta\, \exp\{\alpha(F''_{r_2}(y_1)-\Phi''_2) + \beta(F''^{*}_{r_2}(y_2)-\Phi''_2)\}, \qquad (19)$$

где

$$F''_{r_1} = -i\frac{g^2}{2(2\pi)^4}\int \frac{d^4k}{k^2+i\epsilon} \iint_{-\infty}^{\infty} d\xi\, d\zeta\, [\exp\{i2k([p'\theta(\xi)+p\theta(-\xi)]\xi - [p'\theta(\zeta)+p\theta(-\zeta)]\zeta + \int_{\zeta+A}^{\xi+A} \lambda_1(\eta)\,d\eta)\} +$$

$$+ \exp\{i2k([q'\theta(\xi)+q\theta(-\xi)]\xi - [q'\theta(\zeta)+q\theta(-\zeta)]\zeta + \int_{\zeta+A}^{\xi+A} \lambda_2(\eta)\,d\eta)\}] + i\delta_1 m^2 S_1 + i\delta_2 m^2 S_2 \quad {}_{A,\, s_1,\, s_2 \to\infty}$$

$$F''_{r_2}(y_1) = -i\frac{g^2}{(2\pi)^4}\int \frac{d^4k}{k^2+i\epsilon} \iint_{-\infty}^{\infty} d\xi\, d\zeta\, \exp\{i2k(-y_1 + [p'\theta(\xi)+p\theta(-\xi)]\xi - [q'\theta(\zeta)+q\theta(-\zeta)]\zeta + \int_A^{\xi+A} \lambda_1(\eta)\,d\eta - \int_A^{\zeta+A} \lambda_2(\eta)\,d\eta)\}$$

$$\Phi''_1(r) = -\frac{g^2}{4(2\pi)^3}\int \frac{d^3k}{\omega}\, e^{-ir\omega} \iint_{-\infty}^{\infty} d\xi\, d\zeta\, [\exp\{i2k([p'\theta(\xi)+p\theta(-\xi)]\xi - [p'\theta(\zeta)+p\theta(-\zeta)]\zeta + \int_A^{\xi+A} \lambda_1\, d\eta + \int_A^{\zeta+A} \lambda_3\, d\eta)\} +$$

$$+ \exp\{i2k([q'\theta(\xi)+q\theta(-\xi)]\xi - [q'\theta(\zeta)+q\theta(-\zeta)]\zeta + \int_A^{\xi+A} \lambda_2\, d\eta + \int_A^{\zeta+A} \lambda_4\, d\eta)\}].$$

$$\Phi''_2(r) = -\frac{g^2}{4(2\pi)^3}\int \frac{d^3k}{\omega}\, e^{-ir\omega} \iint_{-\infty}^{\infty} d\xi\, d\zeta\, [\exp\{i2k([p'\theta(\xi)+p\theta(-\xi)]\xi - [q'\theta(\zeta)+q\theta(-\zeta)]\zeta + \int_A^{\xi+A} \lambda_1\, d\eta + \int_A^{\zeta+A} \lambda_4\, d\eta)\} +$$

$$+ \exp\{i2k([q'\theta(\xi)+q\theta(-\xi)]\xi - [p'\theta(+\zeta)+p\theta(-\zeta)]\zeta + \int_A^{\xi+A} \lambda_2\, d\eta + \int_A^{\zeta+A} \lambda_3\, d\eta)\}].$$

Следующим шагом является вычисление функциональных интегралов по $\lambda_1(\eta)$, $\lambda_2(\eta)$, $\lambda_3(\eta)$, $\lambda_4(\eta)$, однако, точное вычисление не представляется возможным, поэтому найдем приближенное выражение. В работе [2] был развит метод приближенного вычисления аналогичных интегралов. Он основан на формуле

$$C\int \delta^4\nu\, e^{-i\int_0^s \nu^2(\eta)\,d\eta}\, e^{F(s,\nu)} = e^{\bar{F}(s)}\, C\int \delta^4\nu\, e^{-i\int_0^s \nu^2(\eta)\,d\eta} \sum_{n=0}^\infty \frac{(F-\bar{F})^n}{n!}, \qquad (20)$$

где

$$\bar{F}(s) = C\int \delta^4\nu\, e^{-i\int_0^s \nu^2(\eta)\,d\eta}\, F(s,\nu).$$

Ограничиваясь первым членом в разложении (20), будем иметь:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{d\sigma_0}{d\Omega}\frac{\ell^4}{\pi^4}\int_{-\infty}^{\infty}dr\,\frac{e^{i\Delta r}-1}{2\pi i r}\iint dy_1\,dy_2\,\frac{e^{-i2\ell(y_1-y_2)}}{(y_1^2-i\delta)(y_2^2+i\delta)}\int_0^1\!\!\int_0^1 d\alpha\,d\beta\,\exp\{\alpha[\bar F_2(y_1)-\bar\Phi_2]+ \tag{21}$$

$$+\beta[\bar F_2^*(y_2)-\bar\Phi_2]+2(\mathrm{Re}\,\bar F_1-\bar\Phi_1)\},$$

где

$$\bar F_1=-i\frac{g^2}{2(2\pi)^4}\int\frac{d^4k}{k^2+i\epsilon}\{[\frac{1}{k^2+2kp+i\epsilon}-\frac{1}{k^2+2kp'+i\epsilon}]^2+[\frac{1}{k^2+2kq+i\epsilon}-\frac{1}{k^2+2kq'+i\epsilon}]^2\}$$

$$\bar F_2(y_1)=i\frac{g^2}{(2\pi)^4}\int\frac{d^4k}{k^2+i\epsilon}e^{-i2ky_1}[\frac{1}{k^2-2kp+i\epsilon}+\frac{1}{k^2+2kp'+i\epsilon}][\frac{1}{k^2+2kq+i\epsilon}+\frac{1}{k^2-2kq'+i\epsilon}]$$

$$\bar\Phi_1(r)=-\frac{g^2}{2(4\pi)^3}\int\frac{d^3k}{\omega}e^{-ir\omega}\{(\frac{1}{kp'}-\frac{1}{kp})^2+(\frac{1}{kq'}-\frac{1}{kq})^2\}$$

$$\bar\Phi_2(r)=-\frac{g^2}{(4\pi)^3}\int\frac{d^3k}{\omega}e^{-ir\omega}(\frac{1}{kp'}-\frac{1}{kp})(\frac{1}{kq'}-\frac{1}{kq}).$$

Здесь из $\bar F_1$ уже явным образом выделены члены, ответственные за перенормировку массы. Они равны

$$\delta_1 m^2=i\frac{g^2}{2(2\pi)^4}\int\frac{d^4k}{k^2+i\epsilon}[\frac{1}{k^2+2kp+i\epsilon}+\frac{1}{k^2-2kp+i\epsilon}+\frac{1}{k^2+2kp'+i\epsilon}+\frac{1}{k^2-2kp'+i\epsilon}]$$

$$\delta_2 m^2=i\frac{g^2}{2(2\pi)^4}\int\frac{d^4k}{k^2+i\epsilon}[\frac{1}{k^2+2kq+i\epsilon}+\frac{1}{k^2-2kq+i\epsilon}+\frac{1}{k^2+2kq'+i\epsilon}+\frac{1}{k^2-2kq'+i\epsilon}]. \tag{22}$$

Следующее приближение, допустимое при исследовании асимптотического поведения сечения при больших энергиях рассеивающихся частиц, будет заключаться в пренебрежении зависимостью F от переменной y. В этом приближении, после интеграции по k и r, сечение принимает вид:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}=\frac{d\sigma_0}{d\Omega}\int_0^1\!\!\int_0^1 d\alpha\,d\beta\,\frac{\exp\{(\alpha+\beta)[\ln m/\Delta\;A_1+A_2]+\ln m/\Delta\;A_1'+A_2'\}}{\Gamma[1-(\alpha+\beta)A_1-A_1']}, \tag{23}$$

где $A_1=\frac{g^2}{(2\pi)^2}[\frac{1}{\sqrt{(pq')^2-m^4}}\ln\frac{\sqrt{pq'+m^2}+\sqrt{pq'-m^2}}{\sqrt2\,m}-\frac{1}{\sqrt{(pq)^2-m^4}}\ln\frac{\sqrt{pq+m^2}+\sqrt{pq-m^2}}{\sqrt2\,m}]$

$$A_1'=\frac{g^2}{(2\pi)^2}[-\frac{1}{2m^2}+\frac{1}{\sqrt{(pp')^2-m^4}}\ln\frac{\sqrt{pp'+m^2}+\sqrt{pp'-m^2}}{\sqrt2\,m}]$$

$$A_2=\frac{g^2}{(4\pi)^2}\{\frac{1}{\sqrt{(pq')^2-m^4}}[\ln\frac{2(pq'+m^2)}{m^2}\ln\frac{\sqrt{pq'+m^2}+\sqrt{pq'-m^2}}{\sqrt2\,m}+\phi(\tfrac12[1-\sqrt{\frac{pq'-m^2}{pq'+m^2}}];\tfrac12[1+\sqrt{\frac{pq'-m^2}{pq'+m^2}}])]$$

$$-\frac{1}{\sqrt{(pq)^2-m^4}}[\ln\frac{2(pq-m^2)}{m^2}\ln\frac{\sqrt{pq+m^2}+\sqrt{pq-m^2}}{\sqrt2\,m}+\Phi(\tfrac12[1-\sqrt{\frac{pq+m^2}{pq-m^2}}];\tfrac12[1+\sqrt{\frac{pq+m^2}{pq-m^2}}])]\}.$$

$$A_2'=\frac{g^2}{(4\pi)^2}\frac{1}{\sqrt{(pp')^2-m^4}}[\ln\frac{2(pp'+m^2)}{m^2}\ln\frac{\sqrt{pp'+m^2}+\sqrt{pp'-m^2}}{\sqrt2\,m}+\Phi(\tfrac12[1-\sqrt{\frac{pp'-m^2}{pp'+m^2}}];\tfrac12[1+\sqrt{\frac{pp'-m^2}{pp'+m^2}}])]$$

$$\Phi(x,y)=\int_x^y\frac{dt}{t}\ln|t-1|.$$

Окончательное выражение для сечения (23) мало отличается от результата работы Милехина и Фрадкина [1]. Действительно, применим теорему о среднем к интегралу по α и β, приводящую к хорошему приближению, ибо подинтегральная функция медленно меняется в области интегрирования (A_1 и A_2 малы при $p^2 \gg m^2$). С ее помощью легко увидеть, что эти два результата практически совпадают.

Заключение

Предлагаемый в работе метод дает возможность нахождения точного дифференциального сечения процессов с участием частиц с массой, равной нулю. Сечение свободно от инфракрасных расходимостей и выражается в виде функциональных интегралов. При вычислении последних используются приближения, отличные от обычной теории возмущений, что дает возможность уже на первом этапе получать правильное асимптотическое поведение сечений при больших энергиях рассеивающихся частиц. Поправки высших порядков, как показано в работе [2], не дают существенных вкладов в асимптотику.

Для дальнейшего прогресса в интересующей нас области необходимо развить способ приближенного вычисления функциональных интегралов с учетом поляризации вакуума. Метод, продемонстрированный на простой модели скалярных частиц, легко переносится на реальный случай электродинамики.

В заключение авторы выражают благодарность Г.В. Ефимову за плодотворные обсуждения.

Литература

1. Г.А. Милехин, Е.С. Фрадкин. ЖЭТФ, т. 45, 1926 (1963).
2. Б.М. Барбашов. ЖЭТФ т. 48, вып. 2, 607 (1965).
3. D.R.Yennie, S.C.Frautschi, H.Suura. Ann. of Phys., 13, 379 (1961).
4. А.А. Абрикосов. ЖЭТФ т. 30, вып. 3, 544 (1956).

Рукопись поступила в издательский отдел
29 июля 1965 г.