ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P - 2307

Я.А. Смородинский и И.И. Тугов

О ПОЛНЫХ НАБОРАХ НАБЛЮДАЕМЫХ

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1965

P - 2307

Я.А. Смородинский и И.И. Тугов

О ПОЛНЫХ НАБОРАХ НАБЛЮДАЕМЫХ

Направлено в ЖЭТФ

В в е д е н и е

Потенциалы, обладающие высшей симметрией, играют существенную роль в различных моделях ядра /1/ и могут быть полезными в качестве динамических моделей в теории элементарных частиц.

Возникает задача о нахождении коммутирующих с гамильтонианом операторов, определенных в каждой из систем координат, в которой разделяются переменные /2/, и последующего построения из этих операторов алгебры Ли. В этой работе при помощи общего метода получены в явном виде полные наборы коммутирующих операторов, число которых, очевидно, равно рангу группы для каждой из систем координат, в которых разделяются переменные в уравнении Шредингера и в волновом уравнении релятивистского пространства скоростей. Поскольку уравнение Шредингера допускает разделение переменных в тех же системах координат, что и волновое уравнение в эвклидовом пространстве /3/, то мы рассмотрим последний случай. Переход к операторам, соответствующим разделению переменных в уравнении Шредингера, прост.

Мы рассмотрим также полные наборы коммутирующих операторов в 3-мерном пространстве постоянной кривизны, положительной и отрицательной, для свободного движения (волновое уравнение). Эти операторы могут быть применены при решении физической задачи кулоновского взаимодействия двух тел соответственно для дискретного и непрерывного спектра. Согласно Олевскому /4/, в 3-мерном пространстве Римана постоянной положительной кривизны существуют 6 систем координат, в которых волновое уравнение допускает полное разделение переменных. Поэтому для атома водорода, группа симметрии которого есть группа движений пространства постоянной положительной кривизны, реализованного на трехмерном шаре в четырехмерном пространстве Фока /5/, возможны шесть различных полных наборов квантовых чисел, являющихся собственными значениями операторов 1, 3, 10, 17, 18, 28, таблицы 2.

В случае непрерывного спектра группа симметрии задачи есть однородная группа Лоренца (группа движений трехмерного пространства Лобачевского) /5/. Существуют 34 системы координат, в которых разделяются переменные волнового уравнения в этом пространстве /4/. Таким образом, в пространстве Фока есть 34 набора квантовых чисел, являющихся собственными значениями операторов 1–34 таблицы 2.

В работе /6/ использовались 4 из 34 систем координат Олевского, в которых волновое уравнение допускает разделение переменных. Полные наборы коммутирующих операторов, определенных в этих системах, даны в работе /7/. Ниже приводятся полные наборы коммутирующих операторов, определенных в 34 системах координат в пространстве релятивистских скоростей Лобачевского.

2. Разделение переменных в уравнении $\Delta_2 u + \lambda u = 0$ и наборы коммутирующих операторов

Рассмотрим обобщенное, не зависящее от времени уравнение Шредингера при любом числе $n \geq 2$ независимых переменных

$$F[u] \equiv \Delta_2 u + (E - V) u = 0. \tag{1}$$

Δ_2 – второй дифференциальный параметр Бельтрами относительно основной формы риманова пространства R_n

$$ds^2 = g_{ij}(dx^i)^2, \qquad g = \det(g_{ij}) \neq 0 \tag{2}$$

$$\Delta_2 u = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{g}\, g^{ij} \frac{\partial u}{\partial x^j}\right).$$

Уравнение (1) есть уравнение собственных значений оператора энергии $\hat{H}$

$$\hat{H} u \equiv (-\Delta_2 + V) u = E u. \tag{1}$$

Сформулируем условия разделения переменных в уравнении (1) в системе координат $(x^1, x^2 \dots x^n)$ пространства R_n. Уравнение (1) допускает полное разделение переменных, если оно имеет решения в форме произведения

$$u = \prod_{i=1}^{n} u_i(x^i), \tag{3}$$

причем каждая из функций $u_i(x^i)$ является решением обыкновенного уравнения 2-го порядка и $\frac{u_i'}{u_i}$ содержит по крайней мере два независимых параметра.

Уравнение (1) допускает в системе координат $(x^1, x^2, \dots x^n)$ полное разделение переменных, в том и только в том случае, если существуют n^2 функции $\phi_{ij} = \phi_{ij}(x^i)$ и $2n$ функций $f_i = f_i(x^i)$, $\chi_i = \chi_i(x^i)$, $i,j = 1,2,\dots n$, удовлетворяющих условиям

$$\frac{1}{g_{ii}} = (\phi^{-1})_{ii}, \qquad \sqrt{g}\ \det\phi^{-1} = \prod_{i=1}^{n} f_i, \tag{4}$$

$$i = 1,2,\dots n,$$

где ϕ – определитель Штеккеля /3/.

Потенциал V должен иметь вид

$$V = \sum_{i=1}^{n} (\phi^{-1})_{ii}\, \chi_i(x^i), \tag{5}$$

и уравнение (1) можно представить как

$$F[u] = \sum_{i=1}^{n} \phi^{-1}_{ii} F_i[u] = 0, \tag{6}$$

где F_i –линейный дифференциальный оператор второго порядка по i –той независимой переменной, соответствующей разделенным уравнениям

$$F_i[u] \equiv \frac{1}{f_i} \frac{\partial}{\partial x^i}\left[f_i \frac{\partial u}{\partial x^i}\right] + (\alpha_j \phi_{ij} + \chi_i) u = 0 \tag{7}$$

$$j, i = 1,2,\dots n,$$

$\alpha_1 = E, \alpha_2 \dots \alpha_n$ – константы разделения. Исходя из формы (6), построим в каждой системе координат, в которой уравнение (1) допускает разделение переменных, полный набор коммутирующих операторов. Справедлива теорема:

Пусть в системе координат $(x^1, x^2, \dots x^n)$ пространства R_n уравнение (1) допускает полное разделение переменных. Тогда существует $(n-1)$ линейно независимых дифференциальных операторов второго порядка $\hat{X}_k$, $k = 2,3,\dots,n$ коммутирующих с гамильтонианом $\hat{H}$ и друг с другом

$$\hat{X}_k = -\sum_{i=1}^{n} (\phi^{-1})_{ik} \left[\frac{\partial^2}{(\partial x^k)^2} + \frac{\partial(\log f_k)}{\partial x^k} \frac{\partial}{\partial x^k} + \chi_k\right], \tag{8}$$

$$k = 2,3,\dots n,$$

причем константы разделения $\alpha_2, \alpha_3, \dots \alpha_n$ являются их собственными значениями

$$\hat{X}_k u = \alpha_k u, \qquad k = 2,3,\dots n \tag{9}$$

Введем присоединенный к определителю Штеккеля $|\phi_{ij}|$ определитель $|A^{ij}|$, в котором каждый элемент ϕ_{ij} заменен своим алгебраическим дополнением A^{ij}.

Линейная независимость операторов (9) следует из того, что $A = \det | A^{ij} | = (\det | \phi^{ij} | \partial))^{n-1} = \phi^{n-1}$ при $\phi \neq 0$ отличен от нуля. Очевидно, что

$$A^{ij} = A^{ij} \, (x^1 \dots x^{i-1}, x^{i+1} \dots x^n). \qquad (10)$$

Для доказательства теоремы воспользуемся известным из линейной алгебры соотношением

$$A^{ik} A^{j\ell} - A^{i\ell} A^{jk} = (-1)^{i+j+\ell+k} \phi \, d^{ijk\ell} , \qquad (11)$$

где $d = d(x^1, \dots x^{i-1}, x^{i+1} \dots x^{j-1}, x^{j+1} \dots x^n)$ минор

(12)

$(n-2)$ порядка, полученный из определителя ϕ вычеркиванием i -той и j -той строк, k -го и ℓ -го столбцов (причем $i < j$ и $k < \ell$).

Рассмотрим операторы X_k , соответствующие уравнениям

$$X_k [u] \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{A^{ik}}{\phi} F_i [u] = 0, \qquad k = 1,2\dots n, \qquad (13)$$

(при $k = 1$ имеем, очевидно, оператор F). Покажем, что операторы X_k перестановочны друг с другом, т.е.

$$[X_k, X_\ell] = 0 . \qquad (14)$$

Действительно,

$$[X_k, X_\ell] = \sum_{i,j=1}^{n} \left[\frac{A^{ik}}{\phi} F_i, \frac{A^{j\ell}}{\phi} F_j \right] = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i=j}}^{n} \left[\frac{A^{ik}}{\phi} F_i, \frac{A^{j\ell}}{\phi} F_j \right] + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} \left[\frac{A^{ik}}{\phi} F_i, \frac{A^{j\ell}}{\phi} F_j \right] .$$

Вследствие (10) первая сумма равна нулю. Перегруппировав члены во второй сумме, получим

$$[X_k, X_\ell] = \sum_{i=1,\, j>i}^{n} \left\{ \left[\frac{A^{ik}}{\phi} F_i, \frac{A^{j\ell}}{\phi} F_j \right] + \left[\frac{A^{jk}}{\phi} F_j, \frac{A^{i\ell}}{\phi} F_i \right] \right\} =$$

$$= \sum_{i=1,\, j>i}^{n} \left[\left(\frac{A^{ik}}{\phi} F_i \frac{A^{j\ell}}{\phi} F_j - \frac{A^{i\ell}}{\phi} F_i \frac{A^{jk}}{\phi} F_j \right) - \left(\frac{A^{j\ell}}{\phi} F_j \frac{A^{ik}}{\phi} F_i - \frac{A^{jk}}{\phi} F_j \frac{A^{i\ell}}{\phi} F_i \right) \right] =$$

$$= \sum_{i=1,\, j>i}^{n} \left(\frac{1}{\phi} F_i \frac{A^{ik} A^{j\ell} - A^{i\ell} A^{jk}}{\phi} F_j - \frac{1}{\phi} F_j \frac{A^{ik} A^{j\ell} - A^{i\ell} A^{jk}}{\phi} F_i \right) =$$

$$= \sum_{i,j>i}^{n} \left(\frac{1}{\phi} F_i \, d^{ijk\ell} F_j - \frac{1}{\phi} F_j \, d^{ijk\ell} F_i \right) (-1)^{i+j+\ell+k} = 0 . \qquad (15)$$

Нетрудно видеть, что уравнения $X_k [u] = 0$ есть уравнения собственных значений операторов (8), причем в качестве собственных значений выступают константы разделения α_k .

В таблице 1 приведены наборы операторов, соответствующих разделению переменных уравнения (1) при $V = 0$ в эвклидовом пространстве 3-х измерений /3/. Если в уравнении потенциал $V \neq 0$ удовлетворяет условию (5), то соответствующие операторы даются формулой (8) при функциях χ из (5). Системы 1 – 34 таблицы 2 дают наборы коммутирующих переменных в пространстве Лобачевского (пространство релятивистских скоростей, непрерывный спектр атома водорода). Системы 1,3,10,17,18,28 относятся также к прсстранству постоянной положительной кривизны (атом водорода).

В таблице 3 операторы таблицы 1 выражены через генераторы группы движений эвклидова пространства. Результат этого следующий: триортогональным системам координат, состоящим из софокусных поверхностей второго порядка и их вырождений, соответствуют операторы, квадратичные по генераторам группы движений эвклидова пространства.

3. Заключение

После построения полных наборов коммутирующих операторов возникает вопрос о нахождении собственных функций этих операторов и их нормировки.

Литература

1. V.Bargmann, M.Moshinsky. Nucl. Phys., 18 , 679 (1960).
2. П. Винтернитц, В. Мандросов, Я.А. Смородинский, М. Углирж, И. Фриш. Препринт ОИЯИ Р-2091, Дубна, 1965.
3. Морс, Фешбах. Методы теоретической физики, т. 1, 1958.
4. М.П. Олевский. Мат.сборник 27, 379 (1950).
5. В.А. Фок. Zs. f. Physik , , 98, 145 (1935).
6. Н.Я. Виленкин, Я.А. Смородинский. ЖЭТФ, 46, 1793 (1964).
7. П. Винтернитц, Я.А. Смородинский, М. Углирж. Ядерная физика, 1, 163, 1965.

Рукопись поступила в издательский отдел

29 июля 1965 г.

Таблица 1

Наборы коммутирующих операторов в эвклидовом пространстве E_3

1. Прямоугольные координаты (x, y, z)

$$X_2 = -\frac{\partial^2}{\partial y^2}, \qquad X_3 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

2. Круговые цилиндрические координаты (вращения) (r, ϕ, z)

$$x = r\cos\phi \qquad y = r\sin\phi \qquad z = z$$

$$X_2 = -\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}, \qquad X_3 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}.$$

3. Эллиптические цилиндрические координаты (η, ψ, z)

$$x = a\,\mathrm{ch}\,\eta\cos\psi, \qquad y = a\,\mathrm{sh}\,\eta\sin\psi, \qquad z = z$$

$$X_2 = -\frac{\cos^2\psi}{\mathrm{ch}^2\eta - \cos^2\psi}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} - \frac{\mathrm{ch}^2\eta}{\mathrm{ch}^2\eta - \cos^2\psi}\frac{\partial^2}{\partial\psi^2}$$

$$X_3 = \frac{1}{a^2(\mathrm{ch}^2\eta - \cos^2\psi)}\left(\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial\psi^2}\right).$$

4. Параболические цилиндрические координаты (μ, ν, z)

$$x = \tfrac{1}{2}(\mu^2 - \nu^2), \qquad y = \mu\nu, \qquad z = z$$

$$X_2 = \frac{\nu^2}{\mu^2 + \nu^2}\frac{\partial^2}{\partial\mu^2} - \frac{\mu^2}{\mu^2 + \nu^2}\frac{\partial^2}{\partial\nu^2},$$

$$X_3 = \frac{1}{\mu^2 + \nu^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\mu^2} + \frac{\partial^2}{\partial\nu^2}\right).$$

5. Сферические координаты (вращения) (r, θ, ϕ)

$$x = r\sin\theta\cos\phi, \qquad y = r\sin\theta\sin\phi, \qquad z = r\cos\theta$$

$$X_2 = -\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} - \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} - \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}, \qquad X_3 = \frac{\partial^2}{\partial\phi^2}.$$

6. Вытянутые сфероидальные координаты (вращения) (η, θ, ϕ)

$$x = a\,\mathrm{sh}\,\eta\sin\theta\cos\phi, \qquad y = \mathrm{sh}\,\eta\sin\theta\sin\phi$$

$$z = a\,\mathrm{ch}\,\eta\cos\theta$$

$$X_2 = \frac{\sin^2\theta}{\mathrm{sh}^2\eta + \sin^2\theta}\left(\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} + \mathrm{cth}\,\eta\frac{\partial}{\partial\eta}\right) - \frac{\mathrm{sh}^2\eta}{\mathrm{sh}^2\eta + \sin^2\theta}\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \mathrm{stg}\,\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) -$$

$$-\frac{\mathrm{sh}^2\eta - \sin^2\theta}{\mathrm{sh}^2\eta\,\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}, \qquad X_3 = -\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}.$$

7. Сплющенные сфероидальные координаты (вращения) (η, θ, ϕ)

$$x = a\,\mathrm{ch}\,\eta\sin\theta\cos\phi, \qquad y = a\,\mathrm{ch}\,\eta\sin\theta\sin\phi, \qquad z = a\,\mathrm{sh}\,\eta\cos\theta$$

$$X_2 = \frac{\sin^2\theta}{\sin^2\theta - \mathrm{ch}^2\eta}\left(\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} + \mathrm{th}\,\eta\frac{\partial}{\partial\eta}\right) + \frac{\mathrm{ch}^2\eta}{\sin^2\theta - \mathrm{ch}^2\eta}\left(\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \mathrm{ctg}\,\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) -$$

$$-\frac{\mathrm{ch}^2\eta + \sin^2\theta}{\sin^2\theta\,\mathrm{ch}^2\eta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}, \qquad X_3 = -\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}.$$

8. Параболические координаты (вращения) (μ, ν, ϕ)

$$x = \mu\nu\cos\phi, \qquad y = \mu\nu\sin\phi, \qquad z = \tfrac{1}{2}(\mu^2 - \nu^2)$$

$$X_2 = \frac{\nu^2}{\mu^2 + \nu^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\mu^2} + \frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\kappa\partial\mu}\right) - \frac{\mu^2}{\mu^2 + \nu^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\nu^2} + \frac{1}{\nu}\frac{\partial}{\partial\nu}\right) -$$

$$-\frac{\mu^2 - \nu^2}{\mu^2\nu^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2},$$

$$X_3 = -\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}.$$

9. Конические координаты (r, θ, λ)

$$x^2 = \left(\frac{r\theta\lambda}{bc}\right)^2, \qquad y^2 = \frac{r^2(\theta^2 - b^2)(b^2 - \lambda^2)}{b^2(c^2 - b^2)},$$

$$z^2 = \frac{r^2(c^2 - \theta^2)(c^2 - \lambda^2)}{c^2(c^2 - b^2)}$$

при $c^2 > \theta^2 > b^2 > \lambda^2 > 0$.

$$X_2 = \frac{1}{\lambda^2-\theta^2}\Big[(\theta^2-b^2)(c^2-\theta^2)\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} - \theta[2\theta^2-(b^2+c^2)]\frac{\partial}{\partial\theta} + (b^2-\lambda^2)(c^2-\lambda^2)\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} + \lambda[2\lambda^2-(b^2+c^2)]\frac{\partial}{\partial\lambda}\Big],$$

$$X_3 = \frac{1}{\lambda^2-\theta^2}\Big[\lambda^2(\theta^2-b^2)(c^2-\theta^2)\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} - \theta\lambda^2[2\theta^2-(b^2+c^2)]\frac{\partial}{\partial\theta} + \theta^2(b^2-\lambda^2)(c^2-\lambda^2)\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} + \theta^2\lambda[2\lambda^2-(b^2+c^2)]\frac{\partial}{\partial\lambda}\Big].$$

10. Эллипсоидальные координаты (η, θ, λ)

$$x^2 = \left(\frac{\eta\theta\lambda}{bc}\right)^2, \qquad y^2 = \frac{(\eta^2-b^2)(\theta^2-b^2)(b^2-\lambda^2)}{b^2(c^2-b^2)},$$

$$z^2 = \frac{(\eta^2-c^2)(c^2-\theta^2)(c^2-\lambda^2)}{c^2(c^2-b^2)},$$

$$\eta^2 > c^2 > \theta^2 > b^2 > \lambda^2 > 0.$$

$$X_2 = -\frac{\theta^2\lambda^2}{(\eta^2-\theta^2)(\eta^2-\lambda^2)}\Big[(\eta^2-b^2)(\eta^2-c^2)\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} + \eta(2\eta^2-b^2-c^2)\frac{\partial}{\partial\eta}\Big] -$$

$$-\frac{\eta^2\lambda^2}{(\eta^2-\theta^2)(\theta^2-\lambda^2)}\Big[(\theta^2-b^2)(c^2-\theta^2)\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} - \theta(2\theta^2-b^2-c^2)\frac{\partial}{\partial\theta}\Big] -$$

$$-\frac{\eta^2\theta^2}{(\eta^2-\lambda^2)(\theta^2-\lambda^2)}\Big[(b^2-\lambda^2)(c^2-\lambda^2)\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} + \lambda(2\lambda^2-b^2-c^2)\frac{\partial}{\partial\lambda}\Big],$$

$$X_3 = \frac{\lambda^2+\theta^2}{(\eta^2-\theta^2)(\eta^2-\lambda^2)}\Big[(\eta^2-b^2)(\eta^2-c^2)\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} + \eta(2\eta^2-b^2-c^2)\frac{\partial}{\partial\eta}\Big] +$$

$$+\frac{\eta^2+\lambda^2}{(\eta^2-\theta^2)(\theta^2-\lambda^2)}\Big[(\theta^2-b^2)(c^2-\theta^2)\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} - \theta(2\theta^2-b^2-c^2)\frac{\partial}{\partial\theta}\Big] +$$

$$+\frac{\eta^2+\theta^2}{(\eta^2-\lambda^2)(\theta^2-\lambda^2)}\Big[(b^2-\lambda^2)(c^2-\lambda^2)\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} + \lambda(2\lambda^2-b^2-c^2)\frac{\partial}{\partial\lambda}\Big]$$

11. Параболоидальные координаты (μ, ν, λ)

$$x^2 = \frac{4}{b-c}(\mu-b)(b-\nu)(b-\lambda), \qquad y^2 = \frac{4}{b-c}(\mu-c)(c-\nu)(\lambda-c),$$

$$z = \mu+\nu+\lambda-b-c, \qquad \mu > b > \lambda > c > \nu > 0$$

$$X_2 = \frac{\lambda\nu}{(\mu-\nu)(\mu-\lambda)}\Big[(\mu-b)(\mu-c)\frac{\partial^2}{\partial\mu^2} + \tfrac{1}{2}(2\mu-b-c)\frac{\partial}{\partial\mu}\Big] +$$

$$+\frac{\mu\lambda}{(\mu-\nu)(\lambda-\nu)}\Big[(b-\nu)(c-\nu)\frac{\partial^2}{\partial\nu^2} + \tfrac{1}{2}(2\nu-b-c)\frac{\partial}{\partial\nu}\Big] +$$

$$+\frac{\mu\nu}{(\mu-\lambda)(\lambda-\nu)}\Big[(b-\lambda)(\lambda-c)\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} - \tfrac{1}{2}(2\lambda-b-c)\frac{\partial}{\partial\lambda}\Big],$$

$$X_3 = \frac{\nu+\lambda}{(\mu-\nu)(\mu-\lambda)}\Big[(\mu-b)(\mu-c)\frac{\partial^2}{\partial\mu^2} + \tfrac{1}{2}(2\mu-b-c)\frac{\partial}{\partial\mu}\Big] +$$

$$+\frac{\mu+\lambda}{(\mu-\lambda)(\lambda-\nu)}\Big[(b-\nu)(c-\nu)\frac{\partial^2}{\partial\nu^2} + \tfrac{1}{2}(2\nu-b-c)\frac{\partial}{\partial\nu}\Big] +$$

$$+\frac{\mu+\nu}{(\mu-\lambda)(\lambda-\nu)}\Big[(b-\lambda)(\lambda-c)\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} - \tfrac{1}{2}(2\lambda-b-c)\frac{\partial}{\partial\lambda}\Big].$$

Наборы коммутирующих наблюдаемых в пространстве Лобачевского[x/]

1. C – система

$$X_2 = \frac{\partial^2}{\partial\rho_2^2}, \qquad X_3 = \frac{\partial^2}{\partial\rho_3^2}.$$

2. Такие же как и в 1

3.

$$X_2 = \frac{4\sqrt{P(\rho_1)}}{\rho_1-\rho_2}\frac{\partial}{\partial\rho_1}\Big(\sqrt{P(\rho_1)}\frac{\partial}{\partial\rho_1}\Big) - \frac{4\sqrt{P(\rho_2)}}{\rho_1-\rho_2}\frac{\partial}{\partial\rho_2}\Big(\sqrt{P(\rho_2)}\frac{\partial}{\partial\rho_2}\Big),$$

$$X_3 = \frac{\rho_2\sqrt{P(\rho_1)}}{\rho_1-\rho_2}\frac{\partial}{\partial\rho_1}\Big(\sqrt{P(\rho_1)}\frac{\partial}{\partial\rho_1}\Big) - \frac{\rho_1\sqrt{P(\rho_2)}}{\rho_1-\rho_2}\frac{\partial}{\partial\rho_2}\Big(\sqrt{P(\rho_2)}\frac{\partial}{\partial\rho_2}\Big),$$

$$P(\rho) \equiv (\rho-a)(\rho-b)(\rho-c)$$

4–9.

$$X_2 = \frac{4\sqrt{P(\rho_1)}}{\rho_2-\rho_1}\frac{\partial}{\partial\rho_1}\Big(\sqrt{P(\rho_1)}\frac{\partial}{\partial\rho_1}\Big) - \frac{4\sqrt{P(\rho_2)}}{\rho_2-\rho_1}\frac{\partial}{\partial\rho_2}\Big(\sqrt{P(\rho_2)}\frac{\partial}{\partial\rho_2}\Big)$$

$$X_3 = \frac{\rho_2\sqrt{P(\rho_1)}}{\rho_2-\rho_1}\frac{\partial}{\partial\rho_1}\Big(\sqrt{P(\rho_1)}\frac{\partial}{\partial\rho_1}\Big) - \frac{\rho_1\sqrt{P(\rho_2)}}{\rho_2-\rho_1}\frac{\partial}{\partial\rho_2}\Big(\sqrt{P(\rho_2)}\frac{\partial}{\partial\rho_2}\Big)$$ [x/]

[x/] Системы 1,3,10,17,18,28 относятся также к пространству постоянной положительной кривизны. Обозначения 1–34 соответствуют классификации Олевского [4] триортогональных систем координат в пространствах постоянной кривизны; случаи 1, 10, 11, 14 рассмотрены в работе [7] C, S, H и O системы соответственно.

10. S – система

$$-X_2 = + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2},$$

$$X_3 = -\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

11. H – система

$$X_2 = -\frac{\partial^2}{\partial \rho_1^2} - \operatorname{cth} \rho_1 \frac{\partial}{\partial \rho_1} - \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \rho_1} \frac{\partial^2}{\partial \rho_2^2} =$$

$$= -\frac{\partial^2}{\partial b^2} - \operatorname{cth} b \frac{\partial}{\partial b} - \frac{1}{\operatorname{sh}^2 b} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2},$$

$$X_3 = -\frac{\partial^2}{\partial \rho_2^2} = -\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

12. L – система

$$X_2 = -\frac{\partial^2}{\partial \rho_1^2} - \operatorname{th} \rho_1 \frac{\partial}{\partial \rho_1} - \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \rho_1} \frac{\partial^2}{\partial \rho_2^2},$$

$$X_3 = -\frac{\partial^2}{\partial \rho_2^2}$$

13.

$$X_2 = -\frac{\partial^2}{\partial \rho_1^2} + \frac{\partial}{\partial \rho_1} - e^{2\rho_1} \frac{\partial^2}{\partial \rho_2^2},$$

$$X_3 = -\frac{\partial^2}{\partial \rho_2^2}$$

14. O – система

$$X_2 = -\frac{\partial^2}{\partial \rho_1^2} - \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial}{\partial \rho_1} - \frac{1}{\rho_1^2} \frac{\partial^2}{\partial \rho_2^2},$$

$$X_3 = -\frac{\partial^2}{\partial \rho_2^2}$$

---

x/ Системы 4–9 объединены, поскольку для систем 5–9 соответствующие выражения либо совпадают с таковыми в 4, как в системах 5,6, либо представляют их частные случаи. Это замечание относится к 17–27,28–34.

15.

$$X_2 = \frac{1}{\cos 2\rho_2 - \operatorname{ch} 2\rho_1} \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \rho_2^2} \right),$$

$$X_3 = \frac{1}{\cos 2\rho_2 - \operatorname{ch} 2\rho_1} \left(\cos 2\rho_2 \frac{\partial^2}{\partial \rho_1^2} + \operatorname{ch} 2\rho_1 \frac{\partial^2}{\partial \rho_2^2} \right)$$

16.

$$X_2 = -\frac{1}{\rho_1^2 + \rho_2^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \rho_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial \rho_2^2} \right),$$

$$X_3 = -\frac{\rho_2^2}{\rho_1^2 + \rho_2^2} \frac{\partial^2}{\partial \rho_1^2} - \frac{\rho_1^2}{\rho_1^2 + \rho_2^2} \frac{\partial^2}{\partial \rho_2^2}$$

17–27.

$$X_2 = ½ \frac{\partial^2}{\partial \rho_3^2},$$

$$X_3 = \frac{(\rho_2 - a)\sqrt{P(\rho_1)}}{(\rho_2 - \rho_1)\sqrt{\rho_1 - a}} \frac{\partial}{\partial \rho_1} \left(\sqrt{P(\rho_1)(\rho_1 - a)} \frac{\partial}{\partial \rho_1} \right) -$$

$$- \frac{(\rho_1 - a)\sqrt{P(\rho_2)}}{(\rho_2 - \rho_1)\sqrt{\rho_2 - a}} \frac{\partial}{\partial \rho_2} \left(\sqrt{P(\rho_2)(\rho_2 - a)} \frac{\partial}{\partial \rho_2} \right) - \frac{\rho_2 + \rho_1 - 2a}{2(\rho_2 - a)(\rho_1 - a)} \frac{\partial^2}{\partial \rho_3^2}$$

28–34.

$$X_2 = \frac{(\rho_3 + \rho_2)\sqrt{Q(\rho)}}{(\rho_1 - \rho_2)(\rho_1 - \rho_3)} \frac{\partial}{\partial \rho_1} \left(\sqrt{Q(\rho_1)} \frac{\partial}{\partial \rho_1} \right) +$$

$$\frac{(\rho_1 + \rho_3)\sqrt{Q(\rho_2)}}{(\rho_1 - \rho_2)(\rho_3 - \rho_2)} \frac{\partial}{\partial \rho_2} \left(\sqrt{Q(\rho_2)} \frac{\partial}{\partial \rho_2} \right) + \frac{(\rho_2 + \rho_1)\sqrt{Q(\rho_3)}}{(\rho_2 - \rho_3)(\rho_1 - \rho_3)} \frac{\partial}{\partial \rho_3} \left(\sqrt{Q(\rho_3)} \frac{\partial}{\partial \rho_3} \right),$$

$$X_3 = \frac{\rho_2 \rho_3 \sqrt{Q(\rho_1)}}{(\rho_1 - \rho_2)(\rho_3 - \rho_1)} \frac{\partial}{\partial \rho_1} \sqrt{Q(\rho_1)} \frac{\partial}{\partial \rho_1} + \frac{\rho_1 \rho_3 \sqrt{Q(\rho_2)}}{(\rho_1 - \rho_2)(\rho_2 - \rho_3)} \frac{\partial}{\partial \rho_2} \left(\sqrt{Q(\rho_2)} \frac{\partial}{\partial \rho_2} \right) +$$

$$+ \frac{\rho_1 \rho_2 \sqrt{Q(\rho_3)}}{(\rho_2 - \rho_3)(\rho_3 - \rho_1)} \frac{\partial}{\partial \rho_3} \left(\sqrt{Q(\rho_3)} \frac{\partial}{\partial \rho_3} \right); \qquad Q(\rho) \equiv (\rho - a)(\rho - b)(\rho - c)(\rho - d).$$

Т а б л и ц а 3

Наборы коммутирующих операторов в эвклидовом пространстве E_3, выраженные через генераторы группы движений пространства E_3

1. $X_2 = P_y^2, \quad X_3 = -P_x^2 - P_y^2$

2. $X_2 = L_z^2, \quad X_3 = -P_x^2 - P_y^2$

3. $X_2 = L_z^2 + a^2 P_x^2, \quad X_3 = -P_x^2 - P_y^2$

4. $X_2 = L_z P_y + P_y L_z, \quad X_3 = -P_x^2 - P_y^2$

5. $X_2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2, \quad X_3 = L_z^2$

6. $X_2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 - a^2(P_x^2 + P_y^2), \quad X_3 = L_z^2$

7. $X_2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 + a^2(P_x^2 + P_y^2), \quad X_3 = L_z^2$

8. $X_2 = A_z^2 = \{[(\vec{L} \times \vec{P}) - (\vec{P} \times \vec{L})\}_z, \quad X_3 = L_z^2$

9. $X_2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2, \quad X_3 = b^2 L_y^2 + c^2 L_z^2$

10. $X_2 = b^2 L_y^2 + c^2 L_z^2 + b^2 c^2 P_x^2,$

$X_3 = -L_x^2 - L_y^2 - L_z^2 - (c^2 + b^2) P_x^2 - c^2 P_y^2 - b^2 P_z^2$

11. $X_2 = \frac{1}{4} L_z^2 + \frac{b}{2}(L_x P_y + P_y L_x) - \frac{c}{2}(L_y P_x + P_x L_y) - bcP_z^2 =$

$= \frac{1}{4} L_z^2 - bc\, P_z^2 + \{(\vec{L} \times \vec{Q}) - (\vec{Q} \times \vec{L})\}_z, \quad \vec{Q} = \frac{c}{2} P_x + \frac{b}{2} P_y + P_z,$

$X_3 = A_z - c\,(P_x^2 + P_z^2) - b\,(P_y^2 + P_z^2).$

Рукопись поступила в издательский отдел
29 июля 1965 г.