ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р-2306

Я.А. Смородинский и И.И. Тугов

ГРУППОВЫЕ СВОЙСТВА И ИНВАРИАНТНАЯ ФОРМА УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1965

P - 2306

Я.А. Смородинский и И.И. Тугов

ГРУППОВЫЕ СВОЙСТВА И ИНВАРИАНТНАЯ ФОРМА УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

Направлено в ЖЭТФ

1. В в е д е н и е

Исследование групповых свойств дифференциальных уравнений в частных производных 2-го порядка проводилось в работах [1,2]. В работах [3,4] рассматривался вопрос об инвариантных подгруппах группы Лоренца и связи этих подгрупп с системами координат, в которых разделяются переменные в уравнении Лапласа в пространстве релятивистских скоростей Лобачевского.

В работе авторов [5] приведены возможные полные наборы наблюдаемых переменных. Последние не исчерпываются, например, в случае уравнения Лапласа наборами, соответствующим подгруппам группы Лоренца. Таким образом, полные наборы, соответствующие диагонализации инвариантов различных подгрупп группы движения пространства, не дают всех возможных наборов квантовых чисел. Соответствующие системы координат содержат лишь поверхности транзитивности и не включают поверхности эллиптического типа.

В этой работе показано, что уравнение Шредингера может быть записано в инвариантном виде в пространстве, группа движения которого есть группа уравнения. В следующей работе мы покажем, что инвариантный потенциал, пропорциональный скалярной кривизне этого пространства, автоматически удовлетворяет условиям разделения переменных в соответствующем уравнении Шредингера. Таким образом, задача классификации систем координат неэллиптического типа, в которых уравнение Лапласа допускает разделение переменных по подгруппам группы Лоренца, естественно обобщается. Соответствующую классификацию для уравнения Шредингера следует проводить по подгруппам группы движения некоторого риманова пространства, группа которого есть группа уравнения Шредингера и в терминах которого исследуемое уравнение имеет инвариантный вид.

2. Определяющие уравнения

Рассмотрим линейное однородное уравнение второго порядка с искомой функцией u от независимых переменных $x^1, x^2, \dots x^n$

$$F[u] = a^{ij}u_{ij} + b^i u_i + cu = 0, \tag{1}$$

где $u_i = \partial u/\partial x^i$, $u_{ij} = \partial^2 u/\partial x^i \partial x^j$; $a^{ij} = a^{ji}$, b^i и c являются заданными функциями от $x = (x^1, x^2, \dots x^n)$. x/ Операторы допускаемой уравнением (1) группы G ищем в виде

$$X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \eta \frac{\partial}{\partial u}, \tag{2}$$

где ξ^i и η –функции переменных x и u. Условие инвариантности уравнения (1) относительно оператора (2) имеет вид

$$XF[u] = \lambda F[u], \tag{3}$$

причем оператор X продолжен на производные второго порядка от u, а множитель $\lambda = \lambda(x, u, u_1, u_2, \dots u_n)$. Так как уравнение (1) линейно, G содержит бесконечную подгруппу преобразований T

$$x' = x, \quad u' = tu + \phi(x) \tag{4}$$

с операторами $X_\phi = u\frac{\partial}{\partial u}$, $X_+ = \phi(x)\frac{\partial}{\partial u}$, где t – произвольный параметр, а $\phi(x)$ есть любое решение уравнения (1). В работе /1/ показано, что T – нормальный делитель G и преобразования фактор-группы G/T характеризуются операторами вида

$$X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} + \sigma u \frac{\partial}{\partial u}, \tag{2'}$$

где ξ^i, σ, а также множитель λ зависят только от x, причем σ определена с точностью до постоянного слагаемого. Координаты ξ^i и σ оператора (2') находятся из системы определяющих уравнений

x/ Обозначения такие же, как в работе /1/; матрица $\| a^{ij} \|$ не нулевая, а уравнение (1) не сильно вырожденное, т.е. ни в какой системе координат не сводится к дифференциальному уравнению, решение которого зависит от остальных (n –1) независимых переменных как от параметров.

$$\xi_{i,j} + \xi_{j,i} = \mu a_{ij}, \qquad \mu = \sigma - \lambda; \qquad i,j = 1,2,\dots n \tag{5}$$

$$2\frac{\partial \sigma}{\partial x^i} = \frac{2-n}{2}\mu_{,i} - (a_k \xi^k)_{,i} - K_{ij}\xi^j, \qquad i = 1,2,\dots n \tag{6}$$

$$\xi^i H_{,i} + \mu H = 0 \tag{7}$$

$$(K_{i\ell}\xi^\ell)_{,j} = (K_{j\ell}\xi^\ell)_{,i}. \tag{8}$$

Величины a_{ij} определены с помощью уравнений

$$a_{jk}a^{ij} = \delta^i_k, \qquad i,k = 1,2,\dots n \tag{9}$$

δ^i_k – символ Кронекера, ранг матрицы $\| a^{ij} \|$ равен n. Скалярная функция H, контравариантный вектор a^i и кососимметричный тензор K_{ij}, равные соответственно

$$H = -2c + a^i_{,i} + \tfrac{1}{2} a^i a_i + \frac{n-2}{2(n-1)} R, \tag{10}$$

$$a^i = b^i + a^{k\ell}\Gamma^i_{k\ell}, \tag{11}$$

$$K_{ij} = a_{i,j} - a_{j,i}, \tag{12}$$

определены в ассоциированном с уравнением (1) римановом пространстве V_n с метрикой, построенной по формуле (9)

$$ds^2 = | a_{ij}\, dx^i dx^j |. \tag{13}$$

Как обычно, R –скалярная кривизна этого пространства, $\Gamma^i_{k\ell}$ – символы Кристоффеля 2-го рода, запятой отмечены ковариантные производные относительно фундаментального тензора a_{ij}.

Уравнение $F'[u] = 0$ называется эквивалентным уравнению (1), если первое получается из второго применением следующих операций: замены независимых переменных

$$x' = x'(x), \tag{14}$$

линейной замены искомой функции $u' = \psi(x)u$ и умножения левой части уравнения на некоторую функцию от x

$$F'[u] = e^{-\theta(x)} F[u]. \tag{15}$$

Группы, допускаемые эквивалентными уравнениями, подобны. Эквивалентные по отношению к операции (14) уравнения обладают одним пространством V_n. Пространство, ассоциированное с уравнением (15) $F'[u]=0$, конформно пространству V_n, его линейный элемент

$$ds'^2 = e^{\theta(x)} ds^2. \tag{16}$$

Уравнение (1) и эквивалентное ему по функции уравнение $F'[u]=0$, где

$$F'[u] = e^{-\theta(x)} F[e^{\theta(x)}] \tag{17}$$

обладают одним ассоциированным пространством. При этом для эквивалентности по функции двух невырожденных уравнений, имеющих одинаковые коэффициенты a^{ij}, необходимо и достаточно совпадения связанных с ними скаляров H и тензоров K_{ij}:

$$H' = H, \quad K'_{ij} = K_{ij}, \qquad i,j = 1,2,\dots n. \tag{18}$$

Величины H и K_{ij} называются инвариантами уравнения (1). Если левые части уравнений $F[u]=0$ и $F'[u]=0$ связаны соотношением (15), то их инварианты

$$H' = e^{-\theta} H, \quad K'_{ij} = K_{ij}, \qquad i,j = 1,2,\dots n. \tag{19}$$

3. Группа уравнения Шредингера

Л.В. Овсянниковым доказано /1/, что если для уравнения (1) инвариант $H \neq 0$, то группа G/T этого уравнения есть подгруппа группы движения риманова пространства, конформного ассоциированному. Справедлива теорема:

Группа G/T уравнения Шредингера

$$F[u] = \Delta_2 u + (E-V)u = 0 \tag{20}$$

есть группа движений пространства, конформного ассоциированному. Δ_2 – второй дифференциальный параметр Бельтрами /2/ относительно формы (13), величина E – постоянная, V –скалярный потенциал. Согласно формулам (10)–(12) для уравнения (20) K_{ij}, H и a^i будут

$$H = -2(E-V) + \frac{n-2}{2(n-1)} R, \quad a^i = 0, \quad K_{ij} = 0; \; i,j = 1,2,\dots n. \tag{21}$$

Рассмотрим допускающее ту же группу уравнение

$$F'[u] = \frac{1}{H}\{\Delta_2 u + (E-V)u\} = 0, \tag{22}$$

где H из (21), левая часть которого связана с уравнением (20) умножением на $\operatorname{sgn} H\, e^{-\theta}$, где $e^{\theta} = |H|$. Так как после умножения уравнения на первый множитель $\operatorname{sgn} H$ инвариант H из (21) равен $H \operatorname{sgn} H$, то в результате этого преобразования согласно формуле (19)

$$H' = H \operatorname{sgn} H \cdot |H|^{-1} = 1,$$
$$K'_{ij} = K_{ij}, \qquad i,j = 1,2,\dots n. \tag{23}$$

Пространство V'_n, ассоциированное с уравнением (22), дается формулой (16) при $e^{\theta} = |H| = |2(E-V) + \frac{n-2}{2(n-1)} R|$. Как известно, /2/ символы Кристоффеля Γ'^k_{ij} пространства V'_n конформного V_n связаны с символами Кристоффеля Γ^k_{ij} пространства V_n соотношением

$$\Gamma^k_{ij} = \Gamma'^k_{ij} - \delta^k_i \theta_j - \delta^k_j \theta_i + a'_{ij} a'^{k\ell} \theta_\ell, \tag{24}$$

где $\theta_i = \partial\theta/\partial x^i$.

Принимая во внимание $a^{ij} = e^{\theta} a'^{ij}$, $a_{ij} = e^{-\theta} a'_{ij}$, $b^i = e^{\theta} b'^i$,

получим $a^k = e^{\theta}[a'_k + \frac{n-2}{2}\theta_\ell]$, $\quad k = 1,2,\dots n$,

откуда, т.к. $a^k = 0$ для преобразованного уравнения:

$$a'^k = -\frac{n-2}{2} a'^{k\ell} \theta_\ell. \tag{25}$$

В терминах пространства V'_n определяющие уравнения (5)–(7) запишутся (в дальнейшем штрихи в величинах, относящихся к V'_n уравнения (22), опущены):

$$\xi_{i,j} + \xi_{j,i} = 0, \tag{5^I}$$
$$2\frac{\partial\sigma}{\partial x^i} = -(a_k \xi^k)_{,i} \tag{6^I}$$
$$\mu = 0. \tag{7^I}$$

Условия (8) разрешимости уравнений (6) в силу (21) и (23) удовлетворены тождественно. Далее покажем, что за счет перехода к уравнению, эквивалентному по функции уравнению (22), можно сделать вектор a^i тождественно равным нулю. Нетрудно видеть, что при преобразовании (17) для уравнения

$$\bar F[u] \equiv e^{-\nu} F[e^{\nu} u] = 0 \qquad (26)$$

величине $\bar a^i = a^i + 2a^{ij}\nu_j$. Подставив сюда выражение (25), получим систему уравнений $\bar a^i = 0$ в виде

$$2a^{ij}\nu_j - \frac{n-2}{2}a^{ij}\theta_j = 2a^{ij}\left(\nu_j - \frac{n-2}{4}\theta_j\right) = 0,$$

откуда

$$\nu = \frac{n-2}{4}\theta + \mathrm{const}. \qquad (27)$$

Так как уравнения (22) и (26) обладают одним ассоциированным пространством, определяющие уравнения (5^1) – (7^1) сводятся к уравнениям Киллинга (5^1), причем $\sigma = \mathrm{const}$. Поскольку величина σ определена с точностью до постоянной, базис алгебры Ли состоит из операторов

$$X = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

4. Инвариантная форма уравнения Шредингера

Покажем, что в результате преобразования (26) с функцией (27), уравнение (22) переходит в уравнение Шредингера в пространстве V'_n, группа движения которого есть группа уравнения. Так как для уравнения (26) $\bar a^i = 0$, $\bar a^{ij} = a^{ij}$, $\bar\Gamma^i_{k\ell} = \Gamma^i_{k\ell}$, то $\bar b^i = -a^{k\ell}\Gamma^i_{k\ell}$ и уравнение имеет вид

$$\bar F[u] \equiv a^{ij}u_{ij} - a^{k\ell}\Gamma^i_{k\ell}u_i + \bar c u \equiv \Delta_2 u + \bar c u = 0. \qquad (28)$$

Вычислим коэффициент $\bar c$ преобразованного уравнения. Формулы (10), (18) и (23) дают

$$\bar H = -2\bar c + \bar a^i_{,i} + ½\,\bar a^i \bar a_i + \frac{n-2}{2(n-1)}R = 1$$

и при $\bar a^i = 0$ имеем

$$\bar c = -½ + \frac{n-2}{4(n-1)}R,$$

$$\bar F[u] \equiv \Delta_2 u + \left[-½ + \frac{n-2}{4(n-1)}R\right] = 0 \qquad (29)$$

уравнение $\bar F[u] = 0$ есть уравнение Шредингера в пространстве V'_n, конформном ассоциированному с уравнением (20), при этом потенциал пропорционален скалярной кривизне R этого пространства.

Согласно [1], если функция $\phi(x)$ есть решение уравнения (1), то функция $\phi' = \xi^i \frac{\partial\phi}{\partial x^i} - \sigma u$ также является решением этого уравнения. Отсюда следует, что на многообразии $\bar F[u] = 0$ коммутатор

$$[\bar F, X] = 0.$$

Оператор $\bar F$, соответствующий уравнению (29), можно рассматривать как инвариантный дифференциальный оператор второго порядка (оператор Лапласа [7]) на пространстве V'_n). Отметим, что в случае пространства постоянной кривизны $\bar F$ есть с точностью до произвольного слагаемого оператор Бельтрами-Лапласа.

Литература

1. Л.В. Овсянников. Групповые свойства дифференциальных уравнений. Новосибирск, 1962 год.
2. И.М. Гельфанд, Р.А. Минлос, З.Я. Шапиро. Представления группы вращения и группы Лоренца. Физматгиз. 1958 .
3. П. Винтерницм, Я.А. Смородинский, М. Углирж. Ядерная физика, 1, 163 (1965).
4. П. Винтерницм, И.Фриш. Ядерная физика, 1, № 5 (1965).
5. Я.А. Смородинский и И.И. Тугов ЖЭТФ.
6. Л.П. Эйзенхарт. Риманова геометрия, ИЛ (1948).
7. И.М. Гельфанд. ДАН СССР, 50 , № 1 (1950).

Рукопись поступила в издательский отдел
29 июля 1965 г.