О Б Ъ Е Д И Н Е Н Н Ы Й   И Н С Т И Т У Т   Я Д Е Р Н Ы Х

И С С Л Е Д О В А Н И Й

Лаборатория теоретической физики

Н.Н.Боголюбов, Б.В.Медведев, М.К.Поливанов, Д.В.Ширков.

"ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ДИСПЕРСИОННЫХ СООТНОШЕНИЙ"

Март 1957 г.

Этот манускрипт представляет собой изложение работы Н.Н.Боголюбова, Б.В.Медведева и М.К.Поливанова в том виде, в котором она вошла /в качестве главы IX/ в монографию Н.Н.Боголюбова и Д.В.Ширкова "Введение в теорию квантованных полей", находящуюся в настоящее время в печати.

§ 46. Общие представления о методе.

I. Введение. Во всем предыдущем изложении мы занимались построением теории поля только с точки зрения теории возмущений.

Именно этим путем был проведен общий анализ структуры матрицы рассеяния с учетом физических требований причинности, унитарности и ковариантности, а также сформулирована методика устранения бесконечностей и получения степенных разложений для основных величин теории.

Как уже указывалось, эта методика оказывается непригодной в области мезонной теории, где параметр разложения $g^2/4\pi\hbar c$ не является малой величиной (согласно последним исследованиям этот параметр равен примерно 15). Из-за этого последующие члены степенных разложений быстро увеличиваются и конечные суммы таких членов не дают даже качественного соответствия с экспериментом. Более того, как отмечалось в предыдущей главе, в области квантовой электродинамики, где $e^2/4\pi\hbar c = 1/137$ теория возмущений также имеет ограниченную область применимости и вследствие этого не является внутренне замкнутой.

Все эти обстоятельства обусловливают большой интерес к любым попыткам кардинального выхода за рамки теории возмущений. В настоящее время все работы такого рода можно отнести к четырем различным направлениям.

Это – метод функционального интегрирования, метод сильной связи, метод исследования различных модельных теорий и, наконец, метод дисперсионных соотношений.

Первый из этих методов уже рассматривался нами в главе УП. Как там указывалось, этот метод наталкивается на существенные математические трудности и ввиду этого до сих пор не привел к существенным результатам.

Второе и третье из перечисленных направлений по своему существу с самого начала являются приближенными и поэтому от них можно ожидать лишь ограниченных результатов. Тем не менее ни метод сильной связи[x)], представляющей собой попытку построить теорию поля на основании разложений по обратным степеням параметра связи, ни метод исследования модельных теорий[x)], заключающийся в исследовании различных моделей взаимодействия, поддающихся точному решению, также не привели пока к существенным результатам.

---

x) См., например, работы Паули, Данков (1941), Сербер, Данков (1942), Пекар (1956 а,б).

x) См., например, работы Ли (1955), Рюигрок и Ван Хов (1956).

Особо важным представляется четвертое направление, которому и посвящается эта последняя глава. В работах этого направления (подробную библиографию см. в § 46.3) получены точные соотношения между отдельными матричными элементами матрицы рассеяния.

Особенно важным является то обстоятельство, что эти соотношения с самого начала не связаны с какими-либо степенными разложениями, а основаны на анализе свойств аналитичности матричных элементов всей S -матрицы в целом.

2. Математическая и физическая основы дисперсионных соотношений. Математической основой дисперсионных соотношений является интегральная формула Коши.

Как известно, эта формула позволяет представить аналитическую функцию f от комплексной переменной z через интеграл по замкнутому контуру Γ, ограничивающему область G, внутри которой $f(z)$ аналитична. Согласно этой формуле

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f(z')}{z'-z}\,dz' = \begin{cases} f(z) & \text{если } z \text{ лежит внутри } \Gamma \quad (46.\text{Ia}) \\ 0 & \text{если } z \text{ лежит снаружи } \Gamma \quad (46.\text{Iб}) \end{cases}$$

В промежуточном случае, когда точка z лежит на контуре интегрирования, рассмотрение интеграла Коши в смысле главного значения приводит к формуле[x)]

$$f(z) = \frac{1}{\pi i}\mathcal{P}\int_{\Gamma}\frac{f(z')}{z'-z}\,dz' \qquad (46.2)$$

Рассматривая по отдельности действительную и мнимую части уравнения (2), приходим к соотношениям между $\mathrm{Re}\, f$ и $\mathrm{Im}\, f$. Дисперсионные соотношения как раз и представляют собой соотношения подобного типа между действительной и мнимой частями матричных элементов матрицы рассеяния.

Ясно поэтому, что для установления дисперсионных соотношений весьма важным является анализ свойств аналитичности матричных элементов.

С этой целью обычно занимаются рассмотрением аналитической природы матричных элементов рассеяния, как функции энергии и возможностью их аналитического продолжения на верхнюю полуплоскость.

Рассмотрим теперь случай, когда в результате такого аналитического продолжения мы получим функцию $g(E)$, которая при $|E| \to \infty$ на

---

x) Эта формула может быть получена из (46.Ia) с помощью символического тождества

$$\frac{1}{z'-z\mp i\varepsilon} = \mathcal{P}\frac{1}{z'-z} \pm i\pi\,\delta(z'-z) \qquad (46.3)$$

(Использование в (3) δ - функция от комплексного аргумента не может привести к каким-либо недоразумениям, поскольку эта формула лишь символически описывает правило обхода полюса).

верхней полуплоскости убывает не медленнее, чем $const.|E|^{-1}$, т.е.

$$|g(E)| \leq \frac{A}{|E|} \qquad \text{при} \quad |E| \to \infty \tag{46.4}$$

Выбирая тогда в (2) в качестве контура интегрирования контур, составленный из действительной оси и дуги верхней полуокружности бесконечно-большого радиуса, мы сможем отбросить интеграл по полуокружности и получить формулу вида

$$g(E) = \frac{1}{\pi i} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(E')}{E'-E} dE' \tag{46.5}$$

Беря от (46.5) действительную часть, приходим к соотношению между действительной и мнимой частями функции f :

$$\mathcal{R}e\, g(E) = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathcal{J}m\, g(E')}{E'-E} dE' \tag{46.6}$$

Следует сказать, что для физических приложений условие (46.4) оказывается несколько узким. Нетрудно, однако, распространить проведенные рассуждения и на случай функций $g(E)$, полиномиально возрастающих при больших $|E|$. Пусть, например, $g(E)$ обладает на бесконечности полюсом n -го порядка, т.е.

$$g(E) \leq A|E|^{n} \qquad \text{при} \qquad |E| \to \infty \tag{46.7}$$

Тогда величина

$$\frac{g(E)}{(E-E_0)^{n+1}} \tag{46.8}$$

будет аналитической функцией в верхней полуплоскости, удовлетворяющей условию (4) для любых E_0, обладающих отрицательной мнимой частью. Подставляя комбинацию (9) в (2), в котором контур Γ выбран как и ранее в (4), получим после перехода к пределу[x)] при $\mathcal{I}m\, E_0 \to 0$ соотношение, действительная часть которого имеет вид

$$\mathcal{R}e\, g(E) = \frac{(E-E_0)^{n+1}}{\pi} \mathcal{P}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathcal{I}m\, g(E')\, dE'}{(E'-E)(E'-E_0)^{n+1}} +$$

$$+ \mathcal{R}e\, g(E_0) + \ldots + \frac{\mathcal{R}e\, g^{(n)}(E_0)}{n!}(E-E_0)^n \quad (-\infty < E, E_0 < \infty)$$

Соотношением такого типа является, например, полученное еще в 20-х годах Кронигом (1926) и Крамерсом (1927) в области классической электродинамики дисперсионное соотношение между вещественной и мнимой частью показателя преломления[xx)]

$$\mathcal{R}e\left[n(\omega)-n(0)\right] = \frac{2}{\pi}\mathcal{P}\int_{0}^{\infty} \frac{\omega'^2\, \mathcal{I}m\, n'(\omega')}{\omega'(\omega'^2-\omega^2)}\, d\omega' \qquad (46.11)$$

Именно из-за соображений преемственности с формулой Крамерса-Кронига, соотношения типа (10) именуются теперь дисперсионными соотношениями.

Подчеркиваем, что возможность аналитического продолжения на верхнюю полуплоскость энергетической переменной, а, следовательно, и самого получения формул типа (10), обусловлена соображениями причинности, которые представляют собой физическую основу дисперсионных соотношений.

Чтобы пояснить связь, существующую между условием причинности и возможностью аналитического продолжения на верхнюю полуплоскость, представим себе, несколько упростив реальное положение вещей, что

$$f(E) = \int_{-\infty}^{\infty} F(t)\, e^{iEt}\, dt \qquad (46.12)$$

[x)] Этот предельный переход может быть выполнен с помощью формулы

$$\frac{1}{(E'-E+i\varepsilon)^{n+1}} = \mathcal{P}\frac{1}{(E'-E)^{n+1}} - \frac{i\pi(-1)^n}{n!}\delta^{(n)}(E'-E) \qquad (46.9)$$

получающейся из (3) n -кратным дифференцированием.

[xx)] Формула Крамерса-Кронига получается из (10) при $n=0$, $E_0 = 0$

причем в силу условия причинности, зависящая от времени t, функция F обладает свойством:

$$F(t) = 0 \qquad \text{при} \qquad t < 0$$

При переходе на верхнюю полуплоскость, когда у E проявляется добавок $+i|\Im m E|$, и в интеграле (I2) множитель $\exp(-t|\Im m E|)$, этот множитель будет играть роль режущего фактора, обеспечивающего сходимость интеграла (I2), поскольку при $t < 0$, когда $\exp(-t|\Im m E|)$ возрастает, функция $F(t)$ вследствие условия причинности равна нулю.

Можно показать также, что даже если $F(t)$ будет сингулярной функцией, лишь бы она была интегрируемой (в смысле определения данного в математическом дополнении) интеграл (6) сходится и определяет функцию без существенных особенностей на бесконечности.

Иное положение будет иметь место, когда $F(t)$ обращается в нуль лишь при $t < -a$, где a - некоторая "элементарная длина". Тогда, заменив под интегралом в (I2) t на $t-a$, найдем, что

$$f(E) = e^{-iaE} f_1(E), \tag{I3}$$

причем у функции $f_1(E)$ на бесконечности не будет существенной особенности (она будет у фактора $\exp(-iaE)$).

Поэтому в данном случае, чтобы получить функцию, для которой выполняется дисперсионное соотношение, необходимо умножать $F(E)$ на $e^{i\alpha E}$ с $\alpha \geq a$.

Разумеется, на самом деле положение будет значительно более сложным, хотя бы из-за того, что в формулах, заменяющих (I2) будет большее число переменных интегрирования.

Тем не менее, несмотря на необходимость существенного технического усовершенствования приведенного рассуждения, основа его сохранится неизменной.

3. Обзор работ по дисперсионным соотношениям. Чтобы воспользоваться математическими дисперсионными соотношениями для изучения какого-либо процесса соударения частиц, необходимо, как видно, предварительно убедиться, что соответствующая характеристика рассеяния, как функция энергии, может быть надлежащим образом продолжена на верхнюю полуплоскость.

В качестве такой характеристики в квантовой механике обычно рассматривается так называемая амплитуда рассеяния f, которую в рассматриваемом случае квантовой теории поля, ограничиваясь для определенности случаем упругого рассеяния мезона на нуклоне, мы введем следующим образом

$$\langle \vec{p}\,'s', \vec{q}\,'\rho' | S | \vec{p}s, \vec{q}\rho \rangle = \delta(\vec{p}-\vec{p}\,')\delta_{ss'}\delta(\vec{q}-\vec{q}\,')\delta_{\rho\rho'} + \frac{i}{2\pi\sqrt{q^0 q_0'}}\delta(p'+q'-p-q) f_{s'\rho';s\rho}(\vec{p}\,',\vec{q}\,';\vec{p},\vec{q}) \tag{14}$$

Здесь $\vec{p}$ $(\vec{p}\,')$ – импульс нуклона до (после) рассеяния, $s(s')$ – совокупность его дискретных спиновых и изотопических индексов до (после) рассеяния, а $\vec{q}, \rho, \vec{q}\,', \rho'$ – соответствующие характеристики мезона:

$$|\vec{p}s, q\rho\rangle = a_s^{(+)}(\vec{p})\, a_\rho^{(+)}(\vec{q})\, \Phi_0 \,, \tag{46.15}$$

$$\langle \vec{p}\,'s', \vec{q}\,'\rho'| = \overset{*}{\Phi}_0\, a_{s'}^{(-)}(\vec{p}\,')\, a_{\rho'}^{(-)}(\vec{q}\,') \tag{46.16}$$

а f – амплитуда рассеяния. Как видно, введенная таким образом амплитуда рассеяния отличается лишь множителем $i\,[2\pi\sqrt{q^0 q'^0}\,]^{-1}$ от использовавшейся ранее функции F (см. (21.43)).

Вопросам аналитического продолжения амплитуды рассеяния было посвящено много работ. Упомянем, например, работы Гейзенберга (1943,а,б;1946), Ху Нина (1948), Ахиезера и Померанчука (1948), Ван Кампена (1953 а,б) и М.Г.Крейна (1955).

В этих работах рассматривается процесс упругого соударения двух частиц с точки зрения обычной квантовой механики, сводимый к задаче рассеяния одной частицы на неподвижном силовом центре.

В качестве $g(E)$ здесь изучается компонента амплитуды рассеяния, соответствующая парциальной волне с определенным моментом количества движения, главным образом компонента для S – волны.

Важным результатом, полученным в этом направлении, являются теоремы о возможности аналитического продолжения амплитуды S – рассеяния $f_s(E)$ на верхнюю полуплоскость для случая, когда взаимодействие практически исчезает на расстояниях больше радиуса некоторой "сферы действия". Оказывается, однако, что на бесконечности $f_s(E)$ может иметь существенную особенность. Эта особенность, впрочем, устраняется умножением на режущий фактор $\exp(iaE)$ (в соответствии с (I3), так что функция $f_s(E)e^{iaE}$ будет уже регулярной в верхней полуплоскости и для нее применимо дисперсионное соотношение (3). Такого типа дисперсионное соотношение было применено Гебелем, Карплюсом и Рудерманом (I955) к упругому рассеянию π -мезонов (пионов) на нуклонах. Использовав имеющиеся экспериментальные данные по S - рассеянию, эти авторы получили, в частности, результат, заключающийся в том, что радиус мезон-нуклонного взаимодействия должен быть больше 0,I комптоновской длины для мезона.

Следует, однако, подчеркнуть, что работы данного направления исходят из схемы обычной квантовой механики, не учитывающей специфики теории поля, в частности, возможности процессов рождения и уничтожения частиц.

Дисперсионные соотношения для рассеяния мезонов в квантовой теории поля были предметом исследования другого направления, представленного работами Гелл-Мана, Гольдбергера и Тирринга (I954), Гольдбергера (I955 а,б), Карплуса и Рудермана (I955), Гольдбергера, Миязава и Оэме (I955), Оэме (I956), Салама (I956), Салама и Гильберта (I956), Полкингхорна (I956) и др.

В этих работах в качестве $g(E)$ рассматривается амлитуда рассеяния вперед (E - энергия мезона), причем на основании экспериментальных данных приводятся убедительные основания к тому, что особенность у $g(E)$ на бесконечности будет не сильнее первого порядка.

Рассмотрение амплитуды рассеяния вперед f особенно удобно из-за того, что, по так называемой "оптической теореме" ее мнимая часть пропорциональна полному эффективному сечению процесса:

Для того, чтобы показать это, рассмотрим матричный элемент от $S\overset{+}{S}=1$ между амплитудами состояний $\langle \vec{p}\,'s', \vec{q}\,'\rho'|$ и $|\vec{p}s, \vec{q}\rho\rangle$, содержащих нуклон с импульсом $\vec{p}\,'(\vec{p})$ и дискретным индексом $s'(s)$ и мезон с импульсом $\vec{q}\,'(\vec{q})$ и дискретным индексом $\rho\ (\rho')$:

$$\langle \vec{p}\,'s', \vec{q}\,'\rho'|S\overset{+}{S}|\vec{p}s, \vec{q}\rho\rangle = \langle \vec{p}\,'s', \vec{q}\,'\rho'|\vec{p}s, \vec{q}\rho\rangle = \delta(\vec{p}-\vec{p}\,')\delta_{ss'}\delta(\vec{q}-\vec{q}\,')\delta_{\rho\rho'} \tag{46.17}$$

Записывая левую часть этого выражения в виде суммы по полной системе амплитуд состояний $|n\rangle$, получим

$$\langle \vec{p}\,'s', \vec{q}\,'\rho'|S\overset{+}{S}|\vec{p}s, \vec{q}\rho\rangle = \sum_n \langle \vec{p}\,'s', \vec{q}\,'\rho'|S|n\rangle\langle n|\overset{+}{S}|\vec{p}s, \vec{q}\rho\rangle. \tag{46.18}$$

Суммирование по n включает в себя здесь как суммирование по дискретным характеристикам состояний $|n\rangle$, так и интегрирование по их непрерывным характеристикам.

Переходя в правой части (I9) к амплитуде рассеяния и ограничиваясь суммированием по состояниям, содержащим один нуклон $(\vec{p}'', s'')$ и один мезон $(\vec{q}'', \rho'')$, и переходя с помощью (46.I4) к амплитуде рассеяния, имеем

$$\langle \vec{p}'s', \vec{q}'\rho' | S S^{+} | \vec{p}s, \vec{q}\rho\rangle = \delta(\vec{p}-\vec{p}')\delta_{ss'}\delta(\vec{q}-\vec{q}')\delta_{\rho\rho'} +$$

$$+ \frac{i\delta(p'+q'-p-q)}{2\pi\sqrt{q^0 q'^0}}\left(f_{s'\rho', s\rho}(\vec{p}', \vec{q}', \vec{p}, \vec{q}) - f^{*}_{s\rho, s'\rho'}(\vec{p}', \vec{q}', \vec{p}, \vec{q})\right) +$$

$$+ \frac{\delta(p'+q'-p-q)}{(2\pi)^2\sqrt{q^0 q'^0}} \sum_{s'', \rho''} \int \frac{d\vec{p}'' d\vec{q}''}{q''^0} f_{s'\rho', s''\rho''}(\vec{p}', \vec{q}', \vec{p}'', \vec{q}'') f^{*}_{s''\rho'', s\rho}(\vec{p}'', \vec{q}'', \vec{p}, \vec{q}) .$$

$$\delta(p''+q''-p-q).$$

Принимая во внимание (I8), получаем отсюда для случая рассеяния вперед, когда $\vec{p}' = \vec{p}$, $\vec{q}' = \vec{q}$, $s' = s$, $\rho' = \rho$:

$$i\left(f_{s\rho, s\rho}(\vec{p}, \vec{q}, \vec{p}, \vec{q}) - f^{*}_{s\rho, s\rho}(\vec{p}, \vec{q}, \vec{p}, \vec{q})\right) =$$

$$= -\sum_{s'', \rho''} \int \frac{d\vec{p}'' d\vec{q}''}{2\pi q''^0} \delta(p''+q''-p-q) \left| f_{s\rho, s''\rho''}(\vec{p}, \vec{q}, \vec{p}'', \vec{q}'')\right|^2 =$$

$$= \int \frac{d\vec{q}''}{2\pi q''^0} \delta(p''^0+q''^0-p^0-q^0) \sum_{s'', \rho''} \left| f_{s\rho, s''\rho''}(\vec{p}, \vec{q}, \vec{p}'', \vec{q}'')\right|^2 \Bigg|_{\vec{p}'' = \vec{p}+\vec{q}-\vec{q}''} \tag{46.I9}$$

Отсюда получаем

$$\mathrm{Im}\, f = \frac{|\vec{q}|}{4\pi}\sigma , \tag{46.20}$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f|^2 \tag{46.2I}$$

Здесь σ и $d\sigma/d\vec{\Omega}$ - соответственно полное и дифференциальное эффективные сечения упругого рассеяния мезона на нуклоне, а f - амплитуда рассеяния вперед

$$f = f_{s\rho, s\rho}\,(\vec{p}, \vec{q}, \vec{p}, \vec{q})$$

Можно показать, что учет в сумме правой части (46.I9) членов, соответствующих состояниям, содержащим большее число частиц, приведет к тому, что в (46.20) под σ будет подразумеваться полное эффективное сечение всех возможных процессов.

Дисперсионное соотношение для процессов рассеяния мезонов на нуклонах было впервые получено Карплусом и Рудерманом (I955). Мы приведем их результат, относящийся к случаю нейтральных мезонов.

Если в соответствии с их рассуждением мы предположим, что амплитуда рассеяния $f(E)$ аналитична в верхней полуплоскости и ее полюс на бесконечности не выше первого порядка, то сможем воспользоваться формулой (9) при n =I.

Замечая, что в силу вещественности скалярного мезонного поля переход от положительных энергий к отрицательным эквивалентен комплексному сопряжению, т.е.
$$\overset{*}{f}(E) = f(-E)$$

и, следовательно,

$$\mathrm{Im}\, f(-E) = -\,\mathrm{Im}\, f(E)\,, \quad \mathrm{Re}\, f(-E) = \mathrm{Re}\, f(E)$$

получаем из (9) после исключения члена с производной от $\mathrm{Re}\, f$ и интеграла по отрицательной области:

$$\mathrm{Re}\,[f(E) - f(E_0)] =$$
$$= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \mathrm{Im}\, f(E')E'dE'\left\{\frac{1}{E'^2-E^2} - \frac{1}{E'^2-E_0^2}\right\}. \qquad (46.22)$$

Переходя здесь от $\mathrm{Im}\, f(E)$ к полному сечению σ по формуле (46.20) и от энергетической переменной E к импульсной $p = (E^2-\mu^2)^{1/2}$ приходим (после исключения ненаблюдаемой области $0 \leq E' \leq \mu$) к дисперсионному соотношению Карплуса - Рудермана для рассеяния нейтральных мезонов на нуклонах

$$\mathrm{Re}\left[f(k)-f(k_0)\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi^2}\int_0^\infty \sigma(k')\,dk'\left\{\frac{k^2}{k'^2-k^2}-\frac{k_0^2}{k'^2-k_0^2}\right\} \qquad (46.23)$$

Аналогичные дисперсионные соотношения для рассеяния заряженных мезонов на нуклонах были рассмотрены Гольдбергером (1955) и Гольдбергером и Оэме (1955). Оэме (1955) получил соответствующие уравнения для амплитуды такого рассеяния мезона на нуклоне, в результате которого спин нуклона меняет свое направление (спинфлип рассеяние). Точнее, дисперсионное соотношение было получено для производной от спинфлиповой амплитуды, рассматриваемой при нулевом угле[x].

В более поздней работе Оэме (1956) получил дисперсионное соотношение для высших производных при нулевом угле при рассеянии без переворачивания спина. Одновременно та же задача была разрешена Саламом и Гильбертом (1956 а,б).

Наконец, недавно появился ряд работ, посвященных получению дисперсионных соотношений для процессов фоторождения π -мезонов на нуклонах[xx].

Все эти дисперсионные соотношения имеют в правой части интегралы типа (20) по области энергий от 0 до ∞, Ясно, однако, что $\mathrm{Im}\, f(E)$ (или $\sigma(E)$) могут быть определены экспериментально лишь для энергий мезона, больших энергий покоя $E > \mu$ и, таким образом, указанные интегралы всегда содержат "ненаблюдаемую часть", соответствующую интервалу

$$0 < E < \mu$$

К счастью, оказывается, однако, что в ряде важных случаев (например, для амплитуды мезон-нуклонного рассеяния вперед) интеграл по этому интервалу может быть вычислен в явном виде, поскольку $f(E)$ оказывается пропорциональной $\delta(E-E_p)$, где E_p - энергия некоторого связанного состояния.

Мы не будем сейчас останавливаться на этом важном вопросе, так как в дальнейшем он будет подробно рассмотрен (§§ 50-52).

---

x) Сама спинфлиповая амплитуда рассеяния вперед равняется нулю.

xx) Доклады Б.Л.Иоффе, А.А.Логунова, Б.М.Степанова и А.Н.Тавхелидзе на Всесоюзной конференции по физике высоких энергий (Москва, май 1956) и также доклады Гольдбергера, Лоу, Чу и Намбу на Международном съезде по теоретической физике (Сиэттл, Сентябрь, 1956).

Укажем лишь на две основных возможности применения дисперсионных соотношений.

Как известно, при обработке экспериментальных данных по мезон-нуклонному рассеянию пользуются фазовым анализом, основанным лишь на ковариантности и унитарности матрицы рассеяния. Фазовый анализ, как известно, не приводит к однозначному определению фазовых углов и дает ряд возможных наборов их. Дисперсионные же соотношения, основывающиеся на свойствах другого типа, а именно на свойствах причинности, дают ряд дополнительных равенств, позволяющих произвести дискриминацию между этими наборами и выбрать правильную систему фазовых углов (см., например, работу Андерсона, Давидона и Крузе (1955)).

Во-вторых, и это особенно важно ~~с~~ принципиальной точки зрения, дисперсионные соотношения открывают путь к экспериментальной проверке наличия элементарной длины. Связь между условием микроскопичеакой причинности и свойством аналитического продолжения амплитуды рассеяния схематически уже разбиралась выше в § 46.2. Там было установлено (13), что в случае отступления от условия причинности на малых расстояниях порядка a , для того, чтобы получить функцию, для которой выполняются дисперсионные соотношения, необходимо умножить $f(E)$ на $\exp i\alpha E \ (\alpha \geq a)$.

Разумеется, на самом деле ситуация будет более сложной, однако, факт определенной модификации дисперсионных соотношений в случае наличия элементарной длины также имеет место, вследствие чего экспериментальная регистрация отклонений от обычных дисперсионных соотношений явится свидетельством о необходимости введения нелокальная модификация теории.

46.4. Проблема обоснования. В течение последних двух лет были получены дисперсионные соотношения для ряда наиболее интересных задач. Следует, однако, отметить, что корректные математическое выводы этих соотношений до самого последнего времени отсутствовали. Это было связано в первую очередь с трудностями доказательства аналитичности амплитуды рассеяния.

Первый вывод дисперсионных соотношений в формализме квантовой теории поля был предложен Гелл-Манном, Гольдбергером и Тиррингом (1954), которые воспользовались теорией Коши, установив предварительно должные свойства аналитичности амплитуды рассеяния вперед. Однако это доказательство (во всяком случае для частиц с массой покоя, отличной от нуля) не свободно от возражений, серьезность которых была признана впоследствии самими авторами (см. Гольдбергер (1955 б)).

8464

Карплус и Рудерман (I955) установили дисперсионное соотношение (2I) для рассеяния нейтральных мезонов на нуклонах, основываясь на аналитичности амплитуды рассеяния, как предварительном предположении.

Гольдбергер (I955 б) попробовал вообще обойти вопрос об аналитическом продолжении амплитуды рассеяния в комплексную плоскость, рассматривая дисперсионные соотношения просто как тождества, вытекающие чисто алгебраически из представления эрмитовой и антиэрмитовой частей амплитуды рассеяния через суммы по полной системе промежуточных состояний. Однако используемые им рассуждения некорректны, так как при $E < \mu$ соответствующие выражения расходятся.

Это обстоятельство было, повидимому, замечено Оэме (I956), который вновь вернулся к использованию теорем теории функций комплексного переменного. Однако ему удалось провести аналитическое продолжение амплитуды рассеяния в верхнюю полуплоскость лишь в предположении ее квадратичной интегрируемости. Для реальных физических процессов такое предположение является слишком жестким, так как оно исключает возможность употребления обобщенных функций (например δ - функций).

Наконец, во второй половине I956 года было предложено два доказательства дисперсионных соотношений (одно из них[x]) для рассеяния вперед, другое[xx]) для произвольного угла рассеяния), которые уже, повидимому, не встречают возражений.

Таким образом, после продолжительных попыток сейчас можно считать установленным, что дисперсионные соотношения действительно следуют из основных положений современной квантовой теории поля, причем для их вывода является существенным наличие условия микроскопической причинности.

Глава, открывающаяся этим параграфом, содержит вывод дисперсионных соотношений для амплитуды рассеяния π -мезонов (пионов) на нуклонах. Наше изложение в основном следует изложению Боголюбова, Поливанова и Медведева (I957), причем в основу рассуждений положено условие причинности для матрицы рассеяния в форме типа (I7.30), (I7.3I). Следующий, 47 параграф посвящен анализу и отбору основных положений современной квантовой теории поля необходимых для получения дисперсионных соотношений. В §§ 48, 49 устанавливаются так называемые спектральные параметрические представления для одночастичных функций Грина. Включение материала о параметрических представлениях в главу о дисперсионных соот-

---

x) К.Симанзик, доклад на Международном съезде по теоретической физике в Сиэттле (сентябрь I956 г.).

xx) Боголюбов, доклад на Международном съезде по теоретической физике в Сиэттле (сентябрь I956 г.); см. также работу Боголюбова, Поливанова и Медведева (I957)

§45'4

ношениях объясняется тем, что с методической стороны вывод параметрических представлений очень близок к выводу дисперсионных соотношений. Он проводится также при помощи аналитического продолжения в комплексную плоскость, но в то же время является значительно более простым. В нашем изложении §§ 48, 49 как бы играют роль методического введения к последующему материалу.

Два последующие параграфа (§§ 50, 51) содержат вывод дисперсионных соотношений. Наконец, в последнем § 52 приведены явные формулы для конкретных процессов рассеяния.

§ 47. Основные свойства S -матрицы в локальной теории поля.

I. Вступительные замечания. В большей части упоминавшихся работ дисперсионные соотношения устанавливались с помощью обычной схемы симметричной псевдоскалярной мезонной теории, хотя при этом и замечалось, что та или иная конкретная модель взаимодействия здесь не при чем, а существенны лишь некоторые общие физические положения, и среди них в первую очередь условие причинности.

Ввиду большой принципиальной важности вопроса о применимости дисперсионных соотношений и возможности их обобщений, целесообразно сформулировать в явном виде те основные физические положения, которые действительно необходимы для их вывода.

В настоящей монографии при построении теории матрицы рассеяния мы пытались действовать по программе подобного рода, взяв в качестве исходных положений явно сформулированные условия на S - матрицу (условия унитарности, ковариантности, причинности). При этом построение теории было ограничено рамками теории возмущений.

Однако и кроме этого у нас был еще один серьезный недостаток, связанный с употреблением вспомогательной функции $g(x)$.

С помощью этой функции было сформулировано общепринятое "псевдофизическое" представление об адиабатическом включении и выключении взаимодействия, а также получена возможность исследовать локальные характеристики теории. Эта возможность технически была связана с операцией функционального дифференцирования S -матрицы по $g(x)$.

Нам представляется поэтому желательным произвести сейчас некоторый пересмотр системы наших основных положений с тем, чтобы совсем освободиться от привлечения функции $g(x)$, введение которой в сущности требуется лишь для получения разложений по степеням малости взаимодействия.

§ 47.1

В самом деле, в § 17.6 указывалось, что при описании локальной структуры теории, связанной с вариационными производными S - матрицы, роль функционального аргумента вместо $g(x)$ могут играть классические внешние поля. Это дает возможность формально ввести соответствующие функциональные производные от S -матрицы по квантованным полям, определяя их как пределы соответствующих функциональных производных по аддитивным классическим добавкам $\eta(x)$ к квантованным $u(x)$ при $\eta(x)=0$, т.е.

$$\frac{\delta^k S}{\delta u_{\alpha_1}(x_1)\dots\delta u_{\alpha_k}(x_k)} \stackrel{\circ}{=} \left\{ \frac{\delta^k}{\delta\eta_{\alpha_1}(x_1)\dots\delta\eta_{\alpha_k}(x_k)} S(\eta)\right\}_{\eta=0} \qquad (47.1)$$

где $S(\eta)$ получено из S операций замены

$$u_i(x) \to u_i(x) + \eta_i(x) \qquad (47.2)$$

Для того, чтобы полученные таким образом вариационные производные по Ферми-полям ψ обладали надлежащими свойствами антикоммутативности, необходимо различать производные справа от производных слева и считать, что вспомогательные классические спиноры η строго антикоммутируют сами с собой и со всеми ψ

При этом вариационная "производная слева" $\delta C/{}'\delta\psi(x)$, по определению

$$\delta C(\psi+\eta) = \int \delta\eta_i(x)\,{}'A_i(x;\psi+\eta)\,dx = \int A'_i(x;\psi+\eta)\,\delta\eta_i(x)\,dx,$$

$$\frac{\delta C}{{}'\delta\psi_i(x)} = \lim_{\eta\to 0} {}'A_i(x;\eta+\psi)$$

будет отличаться знаком от "производной справа" $\delta C/\delta'\psi(x)$,

$$\frac{\delta C}{\delta'\psi_i(x)} = \lim_{\eta\to 0} A'_i(x;\psi+\eta)$$

в тех случаях, когда C является функцией от четного числа Ферми-операторов ψ и будет совпадать с ней, если C зависит от нечетного числа ψ.

§471

Рассмотрим, например,

$$C = A = \int \mathcal{L}(x)dx = g\int :\bar{\psi}(x)\,O\varphi(x)\psi(x): dx$$

Ясно, что

$$\frac{\delta A}{\delta' \bar{\psi}(x)} = -\frac{\delta A}{{}'\delta \bar{\psi}(x)} = -gO :\varphi(x)\psi(x):$$

С другой стороны,

$$\frac{\delta}{\delta'\psi(y)}\left(\frac{\delta A}{\delta'\bar{\psi}(x)}\right) = \frac{\delta}{{}'\delta\psi(y)}\left(\frac{\delta A}{\delta'\bar{\psi}(x)}\right) = -gO\varphi(x)\,\delta(x-y)$$

В дальнейшем нам будет удобно брать производные по нуклонному спинору ψ всегда "справа", а по сопряженному $\bar{\psi}$ - всегда "слева". Мы обозначим поэтому

$$\frac{\delta}{\delta'\psi} \equiv \frac{\delta}{\delta\psi} \quad ; \quad \frac{\delta}{{}'\delta\bar{\psi}(x)} \equiv \frac{\delta}{\delta\bar{\psi}(x)} \tag{3}$$

Мы откажемся также от введения S -матрицы с помощью общепринятого представления об адиабатическом включении и выключении взаимодействия и возвратимся здесь к ее первоначальному определению, данному Гейзенбергом, как матрицы, элементами которой являются амплитуды вероятности перехода от одного состояния при $t = -\infty$ к другому состоянию при $t = \infty$. В каждом из этих состояний может находиться система "бесконечно" удаленных друг от друга как отдельных элементарных частиц, так и их комплексов в связанных состояниях. Эта постановка вопроса о введении S -матрицы является более реалистичной, чем использованная нами ранее, так как она не предполагает того, что в реальных состояниях при $t = \pm\infty$ отсутствует взаимодействие с виртуальными полями (смотри об этом в § I7.I).

При такой постановке встает проблема описания начальных и конечных состояний пространственно разделенных реальных частиц и проблема описания связанных состояний. Мы не будем однако заниматься этими сложными вопросами и приступим сейчас к формулировке интересующих нас основных необходимых физических посылок современной теории поля.

Проблема описания пространственно разделенных частиц и связанных комплексов в обычной теории была недавно рассмотрена Клейном (1956), который решил задачу выделения члена самодействия следующим остроумным способом:

§47.1

Рассмотрим систему, описываемую полным гамильтонианом H, обозначим через R_0 состояние вакуума, а через R_1 - пространство всех одночастичных собственных состояний (содержащих одну реальную элементарную частицу). Если гамильтониан H допускает связанные состояния, то через $R_2, R_3, \ldots$ обозначим пространства всех состояний, содержащих один связанный комплекс из 2, 3, ... реальных частиц. Заметим, что такие состояния также можно считать "одночастичными". При этом имеются в виду две особенности таких состояний: а) с точки зрения их наблюдения они обладают некоторой степенью локализации; б) они являются стабильными.

Пространство, векторы которого будут описывать интересующие нас начальные (или конечные) состояния, содержащие любое число решений частиц или связанных комплексов, может теперь быть получено в виде прямого произведения R_0 на пространства $R_1, R_2, R_3, \ldots$ причем каждый из сомножителей может входить в это произведение произвольное число раз, в соответствии с произвольностью частиц данного сорта:

$$R = R_0 \times R_1 \times R_1 \times \ldots \times R_2 \times R_2 \times \ldots \times R_K \times R_K \times \ldots$$

"Свободный" гамильтониан, собственными функциями которого являются амплитуды состояний, содержащих любое число реальных частиц и связанных комплексов, не взаимодействующих друг с другом, можно теперь построить так: введем операторы проектирования гамильтониана H на пространства $R_0, R_1, R_2, \ldots$ операторы $P_0, P_1, \ldots$ и определим "свободный" гамильтониан H_0 в виде

$$H_0 = P_0 H + P_1 H + P_1 H + \ldots + P_2 H + P_2 H + \ldots + P_K H + \ldots \qquad (47.4)$$

Полный гамильтониан H теперь можно представить в виде

$$H = H_0 + V = H_0 + (H - H_0) \qquad (5)$$

Гамильтониан взаимодействия V описывает теперь только взаимодействия различных частиц и комплексов, но не само действие, которое полностью заключено в H_0. Точнее, V относится только к той части взаимодействия, которая ответственна лишь за процессы рассеяния и взаимного превращения частиц и комплексов, так как взаимодействие "сдерживающее" частицы в составе комплексов также заключено в H_0. Поэтому при переходе к начальному или конечному состоянию ($t = \pm\infty$) мы можем, например, использовать адиабатическое выключение V - ни к исчезновению самодействия, ни к распаду связанных состояний это теперь не приведет.

2. Общие свойства. Подчеркнем, что все формулируемые ниже положения не являются чем-то новым и имеют место в обычной современной теории. С другой стороны мы не считаем также, что эти положения полностью исчерпывают содержание современной теории или, что они образуют в какой-либо степени полную систему независимых аксиом. Оставляя все эти интересные вопросы в стороне, мы будем относиться к приводимой ниже системе посылок как к совокупности положений, достаточных для получения дисперсионных соотношений.

Все эти положения удобно разделить на две группы: а) общие свойства, характерные для весьма обширного класса возможных теорий и б) специальные свойства локальности, связанные в частности с условием микроскопической причинности.

Общие свойства.

А[x]. Асимптотические состояния системы содержат бесконечно удаленные реальные частицы и их связанные комплексы. Взаимодействие между такими частицами и комплексами равно нулю и потому основные динамические характеристики системы (типа энергии, импульса, момента и т.п.) являются аддитивными. Такие состояния описываются амплитудами $|\ldots\rangle$, являющимися элементами некоторого линейного пространства.

Б. Имеется группа G преобразований L , включающая лоренцевскую группу преобразований пространства - времени (G может включать и другие элементы, например, изотопические преобразования). Под действием преобразований L из G амплитуды состояний $|\ldots\rangle$ преобразуются с помощью некоторого унитарного представления U_L группы.

В. Если в состоянии $|p\rangle$ имеется определенный 4 -вектор энергии-импульса p , то

$$U_{L_a}|p\rangle = e^{-ipa}|p\rangle \qquad (47.6)$$

где L_a - трансляция $x \to x+a$. Существует состояние ваку-

---

[x]Эти пункты ниже будут цитироваться, как 47.2А, 47.2Б и т.д.

ума $|0\rangle$, для которого

$$U_{L_a}|0\rangle = |0\rangle \tag{47.7}$$

Г. Существует система амплитуд $|n, \vec{k}\rangle$, которая вместе с амплитудой $|0\rangle$ является замкнутой, так что

$$\langle\alpha|AB|\beta\rangle_0 = \langle\alpha|A|0\rangle\langle 0|B|\beta\rangle + \sum_n \int d\vec{k}\, \langle\alpha|A|n,\vec{k}\rangle\langle n,\vec{k}|B|\beta\rangle \tag{47.8}$$

и притом такая, что в состоянии $|n,\vec{k}\rangle$ имеется определенный импульс $\vec{k}$ и энергия $E_n(\vec{k})$. Индекс n обозначает совокупность квантовых чисел, дискретных и непрерывных, которая вместе с $\vec{k}$ плотностью характеризует состояние из данной замкнутой системы.

Аналогичные свойства могут быть сформулированы для неприводимых представлений других подгрупп G, в частности, для представлений, соответствующих моменту.

Д. Амплитуда вероятности перехода от состояния $|\alpha\rangle$ к состоянию $|\beta\rangle$ дается матричным элементом $\langle\beta|S|\alpha\rangle$ оператора S (матрицы рассеяния), удовлетворяющего условию унитарности.

$$S\overset{+}{S} = 1 \tag{47.9}$$

Е. При преобразовании L из группы G матрица рассеяния S преобразуется с помощью унитарного представления U_L.

Ж. Если $|\alpha\rangle$ является амплитудой вакуума или состояния, содержащего одну реальную частицу или один стабильный комплекс, то условие стабильности таких состояний имеет вид:

$$S|\alpha\rangle = |\alpha\rangle \tag{10}$$

Условие (10) представляет собой не что иное, как фиксирование унитарного фазового множителя, с точностью до которого обычно определяется матрица рассеяния. Так, с точки зрения обычной теории, изложенной в главах Ш, IУ, уравнение (10) сводится к условию стабильности состояния вакуума и одночастичных состояний.

Такое условие может быть там получено путем замены обычной матрицы рассеяния S оператором S', полученным из S посредством вычитания из лагранжиана взаимодействия вакуумного и одночастичных контрчленов. Например, для спинорной электродинамики

$$S' = T\Big\{ \exp i\int dp \Big[\mathcal{L}(p) - (Z_2 - 1)\bar\psi(\hat p - m)\psi - \delta m \bar\psi\psi - (Z_3 - 1)\sum_{n,m} A_n (g^{mn}p^2 - p^m p^n) A_m - R_{ВАК} \Big]\Big\}$$

вследствие чего

$$\langle 0|S'|0\rangle \equiv \langle S'\rangle_0 = 1$$

а также $\langle 1$ фотон $| S' | 1$ фотон $\rangle = 1$ и

$\langle 1$ электрон $| S' | 1$ электрон $\rangle = 1$

что эквивалентно (10).

Положения 47.2А - 47.2Ж являются настолько общими, что, повидимому, сохранятся и при возможных дальнейших перестройках теории элементарных частиц.

3. Локальные свойства. Прежде чем приступить к формулировке необходимых нам локальных свойств теории, напомним соответствующие моменты обычной схемы.

Начнем с того, что представление S -матрицы рассеяния через T -экспоненту

$$S = T\left(\exp^{i\int \mathcal{L}(z)dz}\right)$$

позволяет (с помощью процедуры типа (1), (2)) сразу же получить ее вариационные производные. Например,

$$\frac{\delta S}{\delta u_\alpha(x)} = iT\left(\frac{\partial \mathcal{L}(x)}{\partial u_\alpha(x)} \exp i\int \mathcal{L}(z)dz\right)$$

Такого же типа выражения получатся и для высших вариационных производных.

Условие причинности можем теперь записать в виде аналогичном (17.31):

$$\frac{\delta}{\delta u_\alpha(x)}\left[\frac{\delta S}{\delta u_\beta(y)} \overset{+}{S}\right] = 0 \quad \text{при} \quad x \lesssim y \qquad \text{(11)}$$

8473

Заметим далее, что амплитуды вероятности для процессов рассеяния свободных частиц (т.е. для таких процессов, в которых нет и не появляются связанные комплексы) выражаются через вакуумные средние от вариационных производных S -матрицы по свободным полям.

В самом ~~деле~~ рассмотрим, матричный элемент

$$\frac{1}{S_0} \langle 0 | a^{(-)}_{\beta_1}(\vec{p}_1{}') \dots a^{(-)}_{\beta_s}(\vec{p}_s{}')\, S\, a^{(+)}_{\alpha_1}(\vec{p}_1) \dots a^{(+)}_{\alpha_r}(\vec{p}_r) | 0 \rangle \qquad (I2)$$

для процессов, в начале которого имеются частицы с импульсами $\vec{p}_1, \dots \vec{p}_r$ и другими квантовыми числами $\alpha_1, \dots \alpha_r$, а в конце - частицы с импульсами $\vec{p}_1{}', \dots \vec{p}_s{}'$ и другими квантовыми числами $\beta_1, \dots \beta_s$ (При этом, как обычно, считается, что среди пар $\vec{p}_i \alpha_i$, $\vec{p}_j{}' \beta_j$ нет совпадающих).

Воспользуемся теперь обычными перестановочными соотношениями

$$\left\{ a^{(-)}_{\beta}(\vec{p}\,'), u_\gamma(x) \right\}_{\pm} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{ip'x} v_\gamma^{\beta,+}(\vec{p}\,'),$$
$$\left\{ u_\gamma(x), a^{(+)}_{\alpha}(\vec{p}) \right\}_{\pm} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-ipx} v_\gamma^{\alpha,-}(\vec{p}) \qquad (47.I3)$$

и примем во внимание, что $\mathcal{L}(x)$ должен быть четной функцией Ферми-полей. С учетом (2) это дает

$$\left[a^{(-)}_{\beta}(\vec{p}\,'), S \right]_{-} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\sigma} v_\sigma^{\beta,+}(\vec{p}\,') \int dx\, e^{ip'x} \frac{\delta S}{\delta u_\sigma(x)},$$
$$\left[S, a^{(+)}_{\alpha}(\vec{p}) \right]_{-} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{\sigma} v_\sigma^{\alpha,+}(\vec{p}) \int dx\, e^{-ipx} \frac{\delta S}{\delta u_\sigma(x)} \qquad (47.I4)$$

Будем теперь переносить в (47.I2) все операторы уничтожения вправо, до тех пор пока они, подействовав на $|0\rangle$, не дадут нуль, а операторы рождения - влево.

§47 3

Тогда с помощью формулы (47.I4) мы сможем выразить матричный элемент (I2) в виде суммы членов пропорциональных интегралам

$$\int \left\langle \frac{\delta^{s+r} S}{\delta u_{\beta_1}(x_1') \dots \delta u_{\alpha_r}(x_r)} \right\rangle_0 \exp i\left(\sum_\beta p'x' - \sum_\alpha px\right) dx_1' \dots dx_r \qquad (47.I5)$$

Выполняя исключение вакуумных петель мы придем в подинтегральных выражениях к матричным элементам вида

$$\frac{1}{S_0}\left\langle \frac{\delta^n S}{\delta u_1(x_1)\dots \delta u_n(x_n)} \right\rangle_0 = \left\langle \frac{\delta^n S}{\delta u_1(x_1)\dots \delta u_n(x_n)} \overset{+}{S} \right\rangle_0 \qquad (47.I6)$$

В справедливости написанного соотношения легко убедиться, если учесть, что амплитуда $\overset{+}{S}|0\rangle$ может отличаться от $|0\rangle$ лишь на фазовый множитель, который как раз и равен $(S_0)^{-1}$.

Мы пришли таким образом к важному понятию радиационного оператора n -го порядка:

$$H_n(x_1, \dots x_n) = \frac{\delta^n S}{\delta u_1(x_1)\dots \delta u_n(x_n)} \overset{+}{S} \qquad (47.I7)$$

Как видно под порядком оператора здесь имеется в виду суммарная степень вариационных производных. К вакуумным ожиданиям таких радиационных операторов и сводятся матричные элементы (I2).

При переходе к вариационным производным по квантованным полям типа (I) может возникнуть сомнение в законности такого перехода, так как свойство квантованных функций удовлетворять уравнениям поля никак не отражено в определении (I). Нетрудно убедиться, что какие-либо основания к такого рода сомнениям отсутствуют. В самом деле в S - матрице "свойство квантованных операторов поля удовлетворять уравнениям поля" в действительности связано с процедурой вычисления матричных элементов, и проявляется лишь для тех операторов поля, которые, с точки зрения диаграмм Фейнмана, соответствуют внешним линиям. При этом указанное свойство является тривиальным следствием перестановочных соотношений (I3) между оператором $u(x)$ из матрицы S и оператором рождения (или уничтожения) свободной частицы $a^{(\pm)}(\vec{k})$ из амплитуды состояния. Ввиду этого при рассмотрении S -матрицы и ее вариационных производных мы можем полностью отвлечься от указанного "свойства" (и считать, что мы при этом имеем дело с формальным расширением функционала S на класс функций и не подчиняющихся каким-либо уравнениям). При этом разумеется на конечном этапе при переходе к матричным элементам приходится рассматривать проекцию S на множество класса операторов, удовлетворяющих уравнениям свободных полей (речь идет лишь об операторах соответствующих внешним линиям диаграмм Фейнмана).

Для дальнейшего развития теории поля, в направлении получения дисперсионных соотношений нам не потребуется не только представления S - матрицы через T -экспоненту, но даже и понятия о лагранжиане взаимодействия.

Нам достаточно будет лишь сохранить возможность вариационного дифференцирования S -матрицы, условие причинности в форме (II) и возможность выражения амплитуды перехода (I2) через интегралы типа (I5).

Поэтому мы приходим к возможности сформулировать следующие локальные свойства.

А[x] Реальные элементарные частицы (но не комплексы!) характеризуются бозонными и фермионными полями $u(x)$, которые обладают теми же трансформационными и коммутационными свойствами как и в теории свободных полей. Оператор S обладает вариационными производными любого порядка по этим полям. Вариационные производные имеют здесь все свои обычные свойства. Так их трансформационный характер обусловливается трансформационными свойствами полей. Производные по бозонным полям коммутируют, а по фермионным антикоммутируют между собой.

Радиационные операторы (47.I7) и произведения таких операторов с независимыми аргументами являются интегрируемыми (в смысле определения § I6), то-есть все матричные элементы

$$\langle \beta | H(x_1,\dots x_n)\dots H(z_1,\dots z_k) | \alpha \rangle$$

суть обобщенные функции, принадлежащие к одному из классов $C(q,r,n)$.

Б. Выполняется условие причинности в форме (47.II)

В. Пусть

$$|\alpha_1,\vec{p}_1,\dots,\alpha_n,\vec{p}_r\rangle = |\omega\rangle$$

обозначает амплитуду состояния системы бесконечно удаленных элементарных частиц с импульсами $p_1,\dots p_n$ и другими квантовыми числами $\alpha_1,\dots \alpha_r$.

---

x) Эти свойства упоминаются ниже как 47.3А, 47.3Б...

§47.3

Тогда матричный элемент

$$S_{\omega'\omega} = \langle \omega' | S | \omega \rangle$$

может быть выражен через вакуумные средние радиационных операторов (47.II) с помощью следующего формального приема. Напишем

$$S_{\omega'\omega} = \langle 0 | a^{(-)}_{\alpha'_1}(\vec{p}\,'_1) \dots a^{(-)}_{\alpha'_s}(\vec{p}\,'_s) S a^{(+)}_{\alpha_1}(\vec{p}_1) \dots a^{(+)}_{\alpha_r}(\vec{p}_r) | 0 \rangle$$

и будем переносить операторы уничтожения $a^{(-)}$ направо, а $a^{(+)}$ налево, пока не получим членов, у которых $a^{(-)}$ действуют на $|0\rangle$, а $a^{(+)}$ на $\langle 0|$, и которые обращаются в нуль. При этом будем пользоваться для $a^{(+)}, a^{(-)}$ обычными перестановочными соотношениями из теории невзаимодействующих полей, а для перестановок $a^{(+)}, a^{(-)}$ и S - соотношениями типа (I4).

Таким путем выразим $S_{\omega'\omega}$ через вакуумные ожидания от вариационных производных S - матрицы. Используя затем условие стабильности вакуума 47.2Ж можем свести их к вакуумным средним от радиационных операторов.

§ 48. Спектральное представление пионной функции Грина.

В этом и последующем параграфах будут получены так называемые спектральные представления для пионной и нуклонной функции Грина. Впервые представления этого типа были получены Челленом (1952) в квантовой электродинамике и Леманом (1954) в мезонной теории. Однако метод исследования упомянутых работ не может считаться удовлетворительным, так в нем приходится иметь дело с бесконечными постоянными ренормировок, формально манипулировать с ними и т.д. (ср. критику работ этого направления в § 31.4).

Ниже мы получим спектральные представления Челлена-Лемана для функций Грина псевдоскалярной мезонной теории, исходя из общих свойств локальной теории поля, сформулированных в § 47 и пользуясь методом аналитического продолжения на комплексную плоскость. Как уже упоминалось, материал §§ 48 и 49 не имеет непосредственного отношения к последующему выводу дисперсионных соотношений и может рассматриваться лишь в качестве методического вступления к последнему.

I. Радиационные операторы I-го и 2-го порядка и их вакуумные средние. Имея в виду дальнейшие приложения к процессам мезон-нуклонного рассеяния с этого момента ограничимся рассмотрением 8 -компонентного спинорного нуклонного и 3 - компонентного мезонного полей, взаимодействующих друг с другом зарядово-симметричным образом и не будем принимать во

внимание наличия электромагнитного поля и слабых взаимодействий частицами.

Как и ранее (см. § 33.I) в качестве мезонного поля будем рассматривать поле с тремя вещественными псевдоскалярными компонентами $\varphi_i(x)$, образующими вектор в изотопическом пространстве (изовектор). При этом частицам π^+, π^- и π^0 (с массой m) сопоставляются поля

$$\varphi_+ = \frac{\varphi_1 + i\varphi_2}{\sqrt{2}} \, , \quad \varphi_- = \frac{\varphi_1 - i\varphi_2}{\sqrt{2}} \, , \quad \varphi_0 = \varphi_3 \tag{48.I}$$

Нуклонное поле (с массой M) характеризуется спинором

$$\psi(x) = \begin{vmatrix} \psi_P(x) \\ \psi_N(x) \end{vmatrix} \, . \tag{48.2}$$

Кроме изотопической инвариантности, т.е. инвариантности относительно преобразований вращения в 3-мерном изотопическом пространстве, мы будем пользоваться представлением об инвариантности по отношению к градиентным преобразованиям I-го рода

$$\psi(x) \to e^{i\alpha}\psi(x) \, , \quad \bar{\psi}(x) \to e^{-i\alpha}\bar{\psi}(x) \tag{48.3}$$

т.е. будем считать, что оба этих преобразования входят в группу G из положения 47.2Б.

Займемся сейчас исследованием вакуумных средних от радиационных операторов I-го и 2-го рода в рамках сформулированной теории.

Не составляет труда убедиться, что из соображений ковариантности по отношению к вращениям в обычном и изотопическом пространстве, равны нулю вакуумные ожидания от радиационных операторов I-го порядка, а также от тех операторов 2-го порядка, в которых одно дифференцирование выполняется по бозонному полю, а другое-по фермионному. Из соображений инвариантности по отношению к градиантному преобразованию (3) обращаются также в нуль вакуумные ожидания от $\delta^2 S/\delta\psi\delta\psi$ и $\delta^2 S/\delta\bar{\psi}\delta\bar{\psi}$. Таким образом отличными от нуля оказываются лишь вакуумные ожидания от радиационных операторов $\delta^2 S/\delta\varphi(x)\delta\varphi(y)$ и $\delta^2 S/\delta\bar{\psi}(x)\delta\psi(y)$. Замечая, что на основании соображений трансляционной инвариантности эти ожидания могут зависеть от разности $x-y$, запишем их в виде
(лишь)

$$i\left\langle \frac{\delta^2 S}{\delta\varphi_\sigma(x)\,\delta\varphi_\rho(y)} \overset{+}{S} \right\rangle_0 = Q_{\sigma\rho}(x-y) \tag{48.4}$$

$$i\left\langle \frac{\delta^2 S}{\delta\bar{\psi}_\alpha(x)\,\delta\psi_\beta(y)}\,\overset{+}{S}\right\rangle_0 = R_{\alpha\beta}(x-y) \qquad (48.5)$$

Заметим, что на основании свойства 47.2Ж $\overset{+}{S}|0\rangle = |0\rangle$, вследствие чего множитель $\overset{+}{S}$ в формулах (4) и (5) может быть опущен.

Для уяснения смысла выражений (4) и (5) в рамках обычной теории заметим, что они могут быть весьма просто связаны с полными функциями Грина путем следующего рассуждения, основанного на "обобщенной теореме Вика", сформулированной в § 34.2.

Применяя эту теорему к полной мезонной функции Грина

$$\Delta_{\sigma\rho}(x-y) = i\,\frac{\langle T(\varphi_\sigma(x)\varphi_\rho(y)S)\rangle_0}{S_0}$$

получаем

$$\Delta_{\sigma\rho}(x-y) = i\,\overline{\varphi_\sigma(x)\varphi_\rho}(y) + \frac{i}{S_0}\sum_\alpha\int\left\langle \overline{\varphi_\sigma(x)\varphi_\rho(y)\varphi_\alpha}(z)\,\frac{\delta S}{\delta\varphi_\alpha(z)}\right\rangle_0 dz$$

Применяя затем эту теорему еще раз ко второму члену, находим

$$\Delta_{\sigma\rho}(x-y) = \overset{0}{\Delta}_{\sigma\rho}(x-y) - \sum_{\alpha,\beta}\int \overset{0}{\Delta}_{\sigma\alpha}(x-z)\,Q_{\alpha\beta}(z-\tau)\,\overset{0}{\Delta}_{\beta\rho}(\tau-y)\,dz\,d\tau \qquad (48.6)$$

где

$$\overset{0}{\Delta}_{\sigma\rho}(x-y) = i\,\overline{\varphi_\sigma(x)\varphi_\rho}(y)$$

Переходя в (48.6) с помощью формул типа

$$Q_{\alpha\beta}(z-\tau) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{-ip(z-\tau)}\,q_{\alpha\beta}(p)\,dp \qquad (48.7)$$

к импульсному представлению, получим

$$\Delta_{\sigma\rho}(p) = \frac{1}{\mu^2-p^2} - \frac{1}{\mu^2-p^2}\,q_{\sigma\rho}(p)\,\frac{1}{\mu^2-p^2} \qquad (48.8)$$

Аналогичным образом для нуклонной функции Грина G можно получить

$$G(p) = (M-\hat{p})^{-1} - (M-\hat{p})^{-1} r(p) (M-\hat{p})^{-1} \tag{48.9}$$

Подчеркнем, что соотношения (8) и (9) приведены нами исключительно в иллюстративных целях и мы не будем пользоваться ими при исследовании Q и R, к которому мы сейчас перейдем.

2. Вакуумное ожидание от $\delta^2 S / \delta\varphi_\sigma \delta\varphi_\rho$. Рассмотрим теперь более подробно $Q(x-y)$. Введем для этого радиационный бозе-оператор I-го порядка

$$j_\sigma(x) = i \frac{\delta S}{\delta\varphi_\sigma(x)} \overset{+}{S} \tag{48.10}$$

который будем называть оператором тока (из соображений соответствия с обычной псевдоскалярной мезонной теорией).

Оператор j является эрмитовым

$$\overset{+}{j}_\rho(x) = j_\rho(x) \tag{48.11}$$

что является следствием действительности φ и унитарности S и может быть продемонстрировано с помощью элементарной выкладки (подобной той, которая была использована в § 18.2 при доказательстве эрмитовости обобщенного гамильтониана).

Теперь можно выразить входящий в (48.4) радиационный оператор через введенный оператор тока и его вариационную производную.

Варьируя (48.10), с учетом унитарности S матрицы и эрмитовости тока (48.11), получаем

$$\frac{\delta j_\sigma(x)}{\delta\varphi_\rho(y)} = i \frac{S}{\delta\varphi_\sigma(x)\delta\varphi_\rho(y)} \overset{+}{S} + i \frac{\delta S}{\delta\varphi_\sigma(x)} \cdot \frac{\delta \overset{+}{S}}{\delta\varphi_\rho(y)} =$$

$$= i \frac{\delta^2 S}{\delta\varphi_\sigma(x)\delta\varphi_\rho(y)} \overset{+}{S} + i j_\sigma(x) j_\rho(y) \tag{48.12}$$

Принимая теперь во внимание, что согласно условию причинности 47.3Е

$$\frac{\delta j_\sigma(x)}{\delta\varphi_\rho(y)} = 0 \quad \text{при} \quad y \gtrsim x$$

находим

$$i\frac{\delta^2 S}{\delta\varphi_\sigma(x)\,\delta\varphi_\rho(y)}\, S^{+} = -i\, j_\sigma(x)\, j_\rho(y) \quad \text{при} \quad y \lesssim x \qquad (48.13)$$

Ввиду того, что левая часть этого соотношения симметрична относительно перестановки $(x,\sigma) \rightleftarrows (y,\rho)$, имеем также

$$i\frac{\delta^2 S}{\delta\varphi_\sigma(x)\,\delta\varphi_\rho(y)}\, S^{+} = -i\, j_\rho(y)\, j_\sigma(x) \quad \text{при} \quad x \lesssim y \qquad (48.14)$$

Мы получаем таким образом:

$$i\frac{\delta^2 S}{\delta\varphi_\sigma(x)\,\delta\varphi_\rho(y)}\, S^{+} = -i\, T\left(j_\sigma(x)\, j_\rho(y)\right) \qquad (48.15)$$

Из (48.13) и (48.14) вытекает также, что

$$\left[j_\sigma(x),\, j_\rho(y)\right] = 0 \quad \text{при} \quad y \sim x$$

Для $Q(x-y)$ получаем из (48.15)

$$Q_{\sigma\rho}(x-y) = -i\left\langle T\left(j_\sigma(x)\, j_\rho(y)\right)\right\rangle_0 = \begin{cases} -i\langle j_\sigma(x)\, j_\rho(y)\rangle_0 & \text{при } x \gtrsim y \\ -i\langle j_\rho(y)\, j_\sigma(x)\rangle_0 & \text{при } y \gtrsim x \end{cases} \qquad (48.16)$$

3. <u>Вакуумное ожидание произведения двух токов.</u> Мы выразили Q через вакуумные ожидания от произведения двух токов.

Рассмотрим теперь подробнее структуру этого выражения, воспользовавшись для его преобразования условием 47.2Г. Замечая что, как было недавно установлено, вакуумное ожидание тока j равно нулю, можем теперь написать

$$\langle j_\sigma(x) j_\rho(y)\rangle_0 = \sum_n \int d\vec{k} \langle 0|j_\sigma(x)|n,\vec{k}\rangle\langle n,\vec{k}|j_\rho(y)|0\rangle \qquad (17)$$

Воспользовавшись далее свойствами 42.2Б и 42.2В можем написать

$$\langle n,\vec{k}_0|j_\rho(y)|0\rangle = \langle n,\vec{k}|\overset{+}{U}_{b_y} j_\rho(0) U_{b_y}|0\rangle = = e^{i\{E_n(\vec{k})x^0-\vec{k}\vec{x}\}}\langle n,\vec{k}|j_\rho(0)|0\rangle \qquad (48.18)$$

Используя аналогичное представление для $\langle 0|j_\sigma(x)|n,\vec{k}\rangle$, получаем вместо (48.17)

$$\langle j_\sigma(x) j_\rho(y)\rangle_0 = = \sum_n \int d\vec{k}\, e^{-i\{E_n(\vec{k})(x^0-y^0)-\vec{k}(\vec{x}-\vec{y})\}}\langle 0|j_\sigma(0)|n,\vec{k}\rangle\langle n,\vec{k}|j_\rho(0)|0\rangle \qquad (48.19)$$

Будем теперь считать, что в сумме (18) низшими энергетическими состояниями после вакуума являются состояния с одним, двумя и тремя мезонами. (Это соответствует предположению об отсутствии связанных комплексов мезонов и нуклонов с массой меньшей 3μ, которое, повидимому, не противоречит эксперименту и предположению об отсутствии взаимодействия с частицами более легкими, чем μ -мезон).

Покажем, что для одномезонных состояний $|n,\vec{k}\rangle$ матричные элементы

$$\langle n,\vec{k}|j_\sigma(0)|0\rangle \qquad (48.20)$$

будут равны нулю. Введем для этого операторы уничтожения мезонов $a^{(-)}_\rho(\vec{p})$ с обычными перестановочными соотношениями (сравни (ф1.12) и (3.36))

$$[a^{(\mp)}_\rho(\vec{p}), \varphi_\sigma(x)] = \pm\frac{\delta_{\rho\sigma}}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2p^0}}\, e^{\pm ipx} \quad (p^0=\sqrt{\vec{p}^2+\mu^2}>0)$$

и воспользуемся условием 47.3В. Это даст

$$a^{(\mp)}_\sigma(\vec{p})S - S a^{(\mp)}_\sigma(\vec{p}) = \pm\frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2p^0}}\int e^{\pm ipx}\frac{\delta S}{\delta\varphi_\sigma(x)}\,dx \qquad (48.21)$$

С помощью этого соотношения и учитывая свойство 47.2Ж (47.10) для вакуума и одномезонных состояний, получаем

$$\int e^{ipx}\langle n,\vec{k}|j_\sigma(x)|0\rangle dx = i\int e^{ipx}\langle n,\vec{k}|\frac{\delta S}{\delta\varphi_\sigma(x)}\overset{+}{S}|0\rangle dx =$$

$$= i(2\pi)^{3/2}\sqrt{2p^0}\left\{\langle n,k|a_\sigma^{(-)}(\vec{p})|0\rangle - \langle n,\vec{k}|S a_\sigma^{(-)}(\vec{p})\overset{+}{S}|0\rangle\right\} = 0$$

И потому, ввиду (18)

$$\delta(p-k)\langle n,\vec{k}|j_\sigma(0)|0\rangle = \frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{ipx}\langle n,\vec{k}|j_\sigma(x)|0\rangle dx = 0$$

что и доказывает сделанное утверждение.

Заметим также, что равенство нулю выражений (48.20) для двухмезонных состояний вытекает непосредственно из псевдоскалярности мезонов.

Таким образом в разложении (48.19) состояния $|n,\vec{k}\rangle$ включают по крайней мере три мезона и для них

$$E_n^2(\vec{k}) - \vec{k}^2 \geqslant (3\mu)^2 \qquad (48.22)$$

Примем теперь во внимание, что на основании трансляционной и изотопической инвариантности

$$\langle j_\sigma(x) j_\rho(y)\rangle_0 = \delta_{\sigma\rho}\,\mathcal{U}(x-y)$$

функцию $\mathcal{U}$ можно представить в виде

$$\mathcal{U}(x) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int e^{-ikx}v(k)\,dk$$

причем в соответствии с (48.19) функция $v(k)$ имеет вид

$$v(k) = (2\pi)^3\sum_n |\langle 0|j_\sigma(0)|n,\vec{k}\rangle|^2\,\delta(k^0 - E_n(\vec{k})) \qquad (48.23)$$

На основании (48.22) и (48.23) с учетом соображений лоренцевой ковариантности можно заключить, что

$$v(k) = \theta(k^0)\,J(k^2) \qquad (48.24)$$

причем функция J обладает свойствами

$$J(k^2) \geqslant 0 \qquad (48.25)$$

и

$$J(k^2) = 0 \qquad \text{при} \quad k^2 < (3\mu)^2 \tag{48.26}$$

Итак, мы получили:

$$\langle j_\sigma(x) j_\rho(y) \rangle_0 = \frac{\delta_{\sigma\rho}}{(2\pi)^3} \int e^{-ik(x-y)} \theta(k^0) J(k^2) dk \tag{48.27}$$

Эта формула представляет собой фактически спектральное представление для $\langle j_\sigma(x) j_\rho(y) \rangle_0$.

Из (48.16) и (48.27) вытекает, что функция $Q(x-y)$ обладает "свойством причинности" - подобно причинным функциям Грина при $x^0 > y^0$ она обладает лишь отрицательными частотами по отношению к аргументу x^0-y^0, а при $x^0 < y^0$ - положительными. Ввиду этого мы будем обозначать ее ниже через Q^c:

$$Q_{\sigma\rho}(x-y) = \delta_{\sigma\rho} Q^c(x-y) \tag{48.28}$$

48.4. Аналитические свойства Q^r и Q^a.

Однако соотношений (48.16) и (48.27) нам еще недостаточно для того, чтобы сделать заключение об аналитических свойствах функции Q^c. Дело в том, что соотношением (48.16) Q^c определена лишь при $x \neq y$. Для получения недостающей информации нам придется ввести в рассмотрение еще две функции:

$$\delta_{\sigma\rho} Q^r(x-y) = \left\langle \frac{\delta j_\rho(y)}{\delta \varphi_\sigma(x)} \right\rangle_0 \tag{48.29}$$

$$\delta_{\sigma\rho} Q^a(x-y) = \left\langle \frac{\delta j_\sigma(x)}{\delta \varphi_\rho(y)} \right\rangle_0 \tag{48.30}$$

При написании левой части этих соотношений мы использовали соображения трансляционной и изотопической инвариантности. Индексы "r" и "a" соответствуют свойствам

$$Q^r(x-y) = Q^a(y-x) = 0 \qquad \text{при} \qquad x \lesssim y$$

§48

Ясно также, что вообще

$$Q^r(x-y)=Q^a(y-x) \tag{48.31}$$

Переходя в импульсное представление

$$Q(x)=\frac{1}{(2\pi)^4}\int e^{-ikx}q(k)\,dk$$

на основании формул (I2) и (27) получаем, что

$$\begin{aligned} q^c(k) &= -i\,2\pi\theta(k^0)J(k^2)+q^a(k)= \\ &= 2\pi i\,\theta(-k^0)J(k^2)+q^r(k) \end{aligned} \tag{48.32}$$

и потому в частности

$$q^c(k)=q^a(k)=q^r(k) \quad \text{при} \quad k^2<(3\mu)^2 \tag{48.33}$$

Рассмотрим теперь аналитические свойства функции

$$q^r(k)=\int Q^r(k)e^{ikx}dx \tag{48.34}$$

с учетом того, что вследствие условия причинности

$$Q^r(x)=0 \qquad \text{при} \qquad x\lesssim 0 \tag{48.35}$$

Соотношение (34) определяет $q^r(k)$ в области действительных значений компонент k . Из (48.35) следует, что $q^r(k)$ может быть определенным образом продолжена на область комплексных k. Положим, что k обладает отличной от нуля мнимой частью, т.е.

$$\begin{gathered} k=p+i\Gamma \quad , \quad p=\mathrm{Re}\,k \quad , \Gamma=\mathrm{Im}\,k \\ \Gamma^2>0\,,\ \Gamma^0>0 \end{gathered} \tag{48.36}$$

Получим тогда

$$q^r(p+i\Gamma)=\int Q^r(x)e^{ipx}e^{-\Gamma x}dx \tag{48.37}$$

Множитель $\exp(-\Gamma x)$ будет играть роль режущего фактора, обеспечивающего сходимость интеграла. В самом деле согласно (48.35) интеграл (48.37) фактически берется по области, в которой

$$x^0 \geq 0 , \quad \vec{x}^2 \leq (x^0)^2 ;$$

а в этой области по самой грубой оценке

$$\Gamma x = \Gamma^0 x^0 - \vec{\Gamma}\vec{x} > (\Gamma^0 - |\vec{\Gamma}|)x^0 > \frac{1}{2}(\Gamma^0 - |\vec{\Gamma}|)(|x^0| + |\vec{x}|)$$

так что

$$e^{-\Gamma x} \leq e^{\alpha(|x^0| + |\vec{x}|)} \tag{48.38}$$

где в соответствии с (48.36) $\alpha = \dfrac{\Gamma^0 - |\vec{\Gamma}|}{2} > 0$

В то же время по условию 47.3А функция $Q^r(x)$ является интегрируемой и потому интеграл

$$\int Q^r(x) h(x) dx$$

являющийся линейным функционалом в пространстве функций $h(x)$ из класса $C(q, n, 1)$, удовлетворяющих условию ограниченности величин

$$h_{mn} = \sup\left\{ |x|^m \frac{\partial^n h(x)}{(\partial x^0)^{\alpha_0} \ldots (\partial x^3)^{\alpha_3}} \right\} \quad \left(\begin{matrix} m = 0, 1, \ldots, r ; \\ n = \alpha_0 + \ldots + \alpha_3 = 0, 1, \ldots q \end{matrix} \right)$$

существует и ограничен по абсолютной величине линейной комбинацией величин h_{mn}

В силу оценки (48.38) функция $\exp\{ipx - \Gamma x\}$ во всяком случае принадлежит к классу $C(q, r, 1)$ с любыми конечными значениями q, r, ввиду чего интеграл (48.37) и его производные по k

$$\int Q^r(x) (x^0)^{\beta_0} \ldots (x^3)^{\beta_3} e^{ikx} dx \tag{48.39}$$

будут сходящимися. Таким образом $q^r(k)$ является аналитической функцией k в области (48.38). При этом, поскольку производные по компонентам x от $\exp(ikx)$ пропорциональны степеням k, функция $q^r(k)$, ограниченная комбинацией величин h_{mn}, на бесконечности будет возрастать не быстрее полинома по k степени не выше n (разумеется, мы имеем здесь дело с областью k, в которой неравенство (48.38) не ослабляется).

Переход к действительному осуществляется несобственным предельным переходом

$$q^r(p+i\Gamma) \to q^r(p) \; ; \; \Gamma^2 \to 0 \; ; \; \Gamma^0 > 0 \tag{48.40}$$

Аналогичными рассуждениями можно показать, что функция q^a может быть продолжена в комплексную область

$$k \to p - i\Gamma \quad ; \; \Gamma^2 > 0 \quad , \; \Gamma^0 > 0 \tag{48.41}$$

с теми же свойствами аналитичности, что и у $q^r(k)$.

Но так как в силу (48.33) при вещественных k в области, где $k^2 < (3m)^2$ обе эти функции совпадают, то их следует рассматривать как одну аналитическую функцию f, определенную в областях (48.38) и (48.41). Ввиду того, что в указанной области эти функции совпадают с $q^c(k)$ которая в силу соображений ковариантности и инвариантности $Q^c(x)$ относительно изменения знака времени зависит лишь от k^2, функция f также зависит лишь от k^2.

Мы пришли, таким образом, к функции $f(k^2)$, аналитической в той области значений аргумента, которая соответствует комплексным компонентам k, таким что

$$\Gamma^2 = (\mathrm{Im}\, k)^2 > 0 \tag{48.42}$$

Обозначим теперь:

$$\mathrm{Re}\, k^2 = \xi \quad , \; \mathrm{Im}\, k^2 = \eta \qquad \text{т.е.} \qquad k^2 = \xi + i\eta = \zeta$$

так что

$$\xi = p^2 - \Gamma^2 \qquad , \qquad \eta = 2(p\Gamma) \quad . \tag{48.43}$$

Ясно теперь, что условие (48.42) сводится к исключению из комплексной плоскости ζ вещественной положительной полуоси[x)]

$$\eta = 0 \qquad , \qquad 0 < \xi < \infty \tag{48.44}$$

---

x) Действительно, если $\xi > 0$, то $p^2 > \Gamma^2 + \xi > 0$.
Но так как и $\Gamma^2 > 0$, то $\eta = 2(p\Gamma) \neq 0$.

6484

Таким образом функция $f(\zeta)$ является аналитической функцией с линией разреза (44) и на бесконечности возрастает не быстрее полинома.

Определим теперь граничные значения функции f на верхнем и нижнем берегу разреза как соответствующие несобственные пределы

$$f_{\pm}(p^2) = \lim_{\eta \to \pm 0} f(\kappa^2) \tag{48.45}$$

Из (48.3I), (48.36), (48.4I) и (48.43) теперь вытекает, что

$$q^r(\kappa) = q^a(-\kappa) = \begin{cases} f_+(\kappa^2) & \text{при} \quad \kappa^0 > 0 \\ \\ f_-(\kappa^2) & \text{при} \quad \kappa^0 < 0 \end{cases} \tag{48.46}$$

Принимая во внимание (48.32), получаем также

$$f_+(\kappa^2) - f_-(\kappa^2) = 2\pi i J(\kappa^2) \tag{48.42}$$

Замечая теперь, что на основании (48.33) разность (48.47) обращается в нуль при $\kappa^2 < (3\mu)^2$, получаем, что линией разреза будет не вся вещественная положительная полуось, а лишь ее часть

$$\eta = 0 \qquad (3\mu)^2 \leq \zeta < \infty \tag{48.48}$$

Эти предельные соотношения с учетом (48.43) можно также записать в более компактном виде

$$q^r(\kappa) = \lim_{\varepsilon \to +0} f(\kappa^2 + i\varepsilon\kappa^0) \tag{48.49}$$

$$q^a(\kappa) = \lim_{\varepsilon \to +0} f(\kappa^2 - i\varepsilon\kappa^0) \tag{48.50}$$

Комбинируя эти выражения с (48.32), получаем также

$$q^c(\kappa) = \lim f(\kappa^2 + i\varepsilon) \tag{48.5I}$$

48.5. Спектральное представление для g^r, g^a и g^c. Установленные выше заключения об аналитической функции $f(\zeta)$ позволяют перейти теперь к получению для g^r, g^a и g^c спектральных представлений типа (27). С этой целью мы воспользуемся сейчас интегральной теоремой Коши примерно так же, как и в § 46.2, введя вспомогательную функцию

$$h(\zeta) = \frac{f(\zeta)}{(\zeta-\mu^2)^{n+1}}$$

с соответствующим n и в качестве замкнутого контура выберем контур, изображенный на рис. 56.

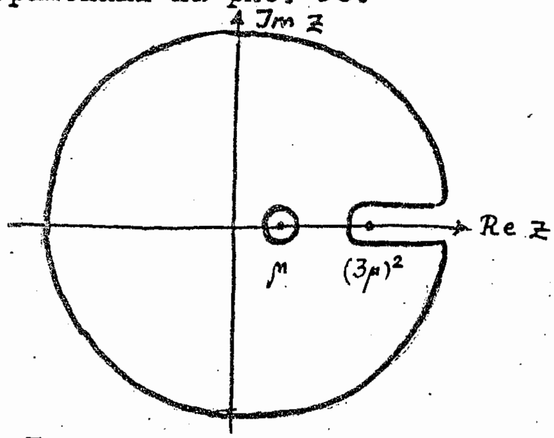


Рис. 56

Контур интегрирования для получения спектральных представлений

Переходя затем к пределу при $R\to\infty$, а затем полагая $\rho\to 0, \delta\to 0$ получаем

$$f(z) =$$

$$= \frac{(z-\mu^2)^{n+1}}{2\pi i}\int\limits_{(3\mu)^2}^{\infty}\frac{f_+(z')-f_-(z')}{(z'-\mu^2)^{n+1}(z'-z)}dz' + \frac{(z-\mu)^{n+1}}{2\pi i}\oint\limits_{\rho}\frac{dz'}{(z'-\mu^2)^{n+1}}\frac{f(z')}{z'-z}$$

Вычисляя интеграл по малому кругу радиуса ρ вокруг точки μ^2 и используя (48.47), находим.

$$f(k^2) = (k^2-\mu^2)\int\limits_{(3\mu)^2}^{\infty}\frac{J(z)dz}{(z-\mu^2)^{n+1}(z-k^2)} + i\sum_{0\le m\le n}\frac{(k^2-\mu^2)^m}{m!}f^{(m)}(\mu^2) \qquad (48.52)$$

$$f^{(m)}(\mu^2) = \left[\frac{\partial^m f(z)}{\partial z^m}\right]_{z=\mu^2}$$

Соотношения (48.49), 48.50) и (48.51) позволяют сразу перейти в (48.52) к любой из функции g^a, g^r и g^c. Так, например, имеем для g^c

$$g^c(k^2) = (k^2-\mu^2)^{n+1}\int\limits_{(3\mu)^2}^{\infty}\frac{J(z)dz}{(z-\mu^2)^{n+1}(z-k^2-i\varepsilon)} + i\sum_{0\le m\le n}\frac{(k^2-\mu^2)^m}{m!}f^{(m)}(\mu^2) \qquad (48.53)$$

Аналогичные соотношения, отличающиеся от (48.53) заменой $i\varepsilon$ на $\pm i\varepsilon k^0$, могут быть выписаны для q^a и q^r.

Заметим здесь, что спектральное представление (48.53) формально можно было бы получить непосредственно из формул (48.16), (48.27) с помощью "вычитательного формализма". В самом деле из указанных соотношений имеем

$$Q(x) = \frac{i}{(2\pi)^3}\int e^{-ikx}\theta(k^0)J(k^2)\,dk =$$

$$= \int_{(3\mu)^2}^{\infty} dz' J(z') \frac{i}{(2\pi)^3}\int e^{-ikx}\theta(k^0)\delta(k^2-z')\,dk = \tag{48.54}$$

$$= \int_{(3\mu)^2}^{\infty} dz' J(z') D_{z'}^{(-)}(x)\,dz' \quad \text{при} \quad x \gtrsim 0$$

Здесь $D_{z'}^{(-)}$ - частотная часть функции Паули-Вилларса для массы z':

$$D_{z'}^{(-)}(x) = \frac{i}{(2\pi)^3}\int e^{-ikx}\theta(k^0)\delta(k^2-z)\,dk$$

Комбинируя (48.54) с соответствующим представлением для $Q(x)$ в области $x \lesssim 0$, получим

$$Q(x) - \int_{(3\mu)^2}^{\infty} J(z') D_{z'}^{c}(x)\,dz' = 0 \qquad \text{при} \quad x \neq 0$$

откуда вытекает

$$q^c(k) = \int_{(3\mu)^2}^{\infty} \frac{J(z)\,dz}{z-k^2-i\varepsilon} + P(k^2) \tag{48.55}$$

где $P(k^2)$ - некоторый полином по k^2.

Если функция $J(z)$ на бесконечности не убывает достаточно быстро, то интеграл в (48.55) расходится. Однако посредством вычитательной процедуры его можно сделать сходящимся и тем самым придать определенный смысл формуле (48.55).

§ 48 В

Для этой цели воспользуемся формулой

$$\frac{1}{z-k^2} = \frac{1}{z-\mu^2-(k^2-\mu^2)} =$$

$$= \frac{1}{(z-\mu^2)}\left\{1+\frac{k^2-\mu^2}{z-\mu^2}+\ldots+\left(\frac{k^2-\mu^2}{z-\mu^2}\right)^n\right\} + \frac{(k^2-\mu^2)^{n+1}}{(z-k^2)(z-\mu^2)^{n+1}}$$

с помощью которой представим (48.55) в виде

$$q^c(k) = (k^2-\mu^2)^{n+1}\int\limits_{(3\mu)^2}^{\infty}\frac{J(z)\,dz}{(z-k^2-i\varepsilon)(z-\mu^2)^{n+1}} + \tag{48.56}$$

$$+\sum_{0\le m\le n}(k^2-\mu^2)^m\int\limits_{(3\mu)^2}^{\infty}\frac{J(z)\,dz}{(z-\mu^2)^{m+1}} + \mathcal{P}(k^2)$$

Выберем число n достаточно большим, так чтобы первый интеграл в (48.56) оказался сходящимся. Расходящиеся члены в сумме по степеням $k^2-\mu^2$ можно скомпенсировать за счет полинома $\mathcal{P}(k^2)$. В результате такой "компенсации расходимостей", типичной для обычной вычитательной процедуры, мы и придем к формуле (48.53).

Покажем теперь, что в силу наших условий нулевой член в сумме (48.53) отсутствует, т.е.

$$f(\mu^2) = 0 \tag{48.57}$$

Заметим для этого, что на основании свойства (47.3В) с помощью (2I) матричный элемент от S между двумя одномезонными состояниями $\langle \bar p'\sigma|$ и $|\bar p\rho\rangle$ может быть представлен в виде .

$$\langle \bar p'\sigma|S|\bar p\rho\rangle = \langle 0|S a^{(-)}_\sigma(\bar p')a^{(+)}_\rho(\bar p)|0\rangle +$$

$$+\frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2p'^0}}\int\langle 0|\frac{\delta S}{\delta\varphi_\sigma(x)}a^{(+)}_\rho(\bar p)|0\rangle e^{ip'x}\,dx \quad \text{при} \quad p^2 = p'^2 = \mu^2$$

Коммутируя теперь под интегралом в правой части $a^{(+)}$ с $\delta S/\delta\varphi$ с учетом свойства (47.2Ж) и (48.4), получаем

$$\langle \bar p'\sigma|S|\bar p\rho\rangle = \langle a^{(-)}_\sigma(\bar p')a^{(+)}_\rho(\bar p)\rangle_0 +$$

$$+\frac{1}{(2\pi)^3 2\sqrt{p^0p'^0}}\int Q_{\sigma\rho}(x,y)\,e^{i(p'x-py)}\,dx\,dy = \quad \text{при} \quad p^2=\mu^2$$

$$= \langle \bar p'\sigma||\bar p\rho\rangle + \delta_{\sigma\rho}\frac{\pi}{p^0}\delta(p-p')\,q^c(p)$$

С другой стороны на основании того же (47.2Ж) можем прямо написать

$$\langle \bar{p}'\sigma | S | \bar{p}\rho \rangle = \langle \bar{p}'\sigma | \bar{p}\rho \rangle$$

откуда с учетом (33) и (5I) вытекает (57).

Покажем еще, что постоянные $f^{(m)}(\mu^2)$ являются чисто мнимыми. Действительно, согласно определению (4) и действительности φ функция Q является эрмитовой, вследствие чего с учетом четности $q^c(k)$

$$\overset{*}{q}{}^c(k^2) = -q^c(k^2)$$

Но, ввиду того, что согласно (33) и (5I) в окрестности точки μ^2 функция q^c совпадает с f, это дает

$$\overset{*}{f}{}^{(m)}(\mu^2) = f^{(m)}(\mu^2)$$

Доказано, таким образом, что функции q^r, q^a и q^c допускают спектральные представления типа (52), в котором

$$f^0(\mu^2) = f(\mu^2) = 0 \tag{58}$$

и

$$\overset{*}{f}{}^{(m)}(\mu^2) = -f^{(m)}(\mu^2) \tag{59}$$

Известный результат Челлена-Лемана для бозонной функции Грина может быть получен из формул (53), (58), (59) с помощью (8) при дополнительном предположении о том, что "степень роста" n равна единице. Подставляя (53) в (8), получаем при этом

$$\Delta(p) = \frac{1 + i f^{(1)}(\mu^2)}{\mu^2 - p^2} + \int\limits_{(3\mu)^2}^{\infty} \frac{I(z)\,dz}{z - p^2}, \quad I(z) = \frac{J(z)}{(z-\mu^2)^2} \tag{60}$$

§ 49 I

§ 49. Спектральное представление фермионной функции Грина

I. Спектральное представление вакуумного ожидания от $\delta^2 S/\delta\bar\psi\delta\psi$.

Перейдем теперь к построению спектрального представления для вакуумного ожидания фермиевского радиационного оператора второго порядка

$$R^c_{\alpha\beta}(x-y) = i \left\langle \frac{\delta^2 S}{\delta\bar\psi_\alpha(x)\,\delta\psi_\beta(y)} \overset{+}{S} \right\rangle_0 \qquad (48.5)$$

который, как было показано в § 48.I, является единственным радиационным оператором второго порядка, содержащим вторую вариационную производную, обладающую отличным от нуля вакуумным средним. Поскольку отличие нижеследующих рассуждений от материала § 48 обусловлено лишь отличием трансформационных свойств R и Q, мы проведем здесь это исследование более конспективным путем.

Со вспомогательными целями введем радиационные Ферми-операторы первого порядка[ж]

$$\vartheta(x) = i\, S \frac{\delta \overset{+}{S}}{\delta\bar\psi(x)} \qquad (1)$$

и

$$\bar\theta(y) = -i \frac{\delta S}{\delta\psi(x)} \overset{+}{S} \qquad (2)$$

Рассматривая связь между вариационными Ферми-производными $\delta\theta(x)/\delta\psi$ и $\delta\bar\theta(x)/\delta\bar\psi$ и $\delta^2 S/\delta\bar\psi\delta\psi$, подобно тому как это было проделано в 48.2 для Бозе-производных с учетом условия и унитарности, приходим к формулам[жж]

$$\frac{\delta\theta(x)}{\delta\psi(y)} = i \frac{\delta^2 S}{\delta\bar\psi(x)\,\delta\psi(y)} \overset{+}{S} + i\,\theta(x)\bar\theta(y) \qquad (4)$$

$$\frac{\delta\bar\theta(y)}{\delta\bar\psi(x)} = -i \frac{\delta^2 S}{\delta\bar\psi(x)\,\delta\psi(y)} \overset{+}{S} + i\,\bar\theta(y)\theta(x) \qquad (5)$$

ж С учетом (47.3) не составляет труда убедиться, что $\bar\theta(x) = \overset{*}{\theta}(x)\gamma^0$ (3)

жж Здесь была использована формула дифференцирования произведения

$$\delta(AB)/\delta\psi = \frac{\delta A}{\delta\psi} B + (-1)^{\eta_A} A\, \delta B/\delta\psi\,,$$

где η_A - "степень линейности" A по Ферми-операторам.

из которых с помощью условия причинности получаем

$$\left\{\frac{\delta}{\delta\bar{\psi}(x)}\frac{\delta}{\delta\psi(y)}S\right\}\overset{+}{S} = -T\left(\theta(x),\bar{\theta}(y)\right),$$

$$i\left(\frac{\delta\theta(x)}{\delta\psi(y)}+\frac{\delta\bar{\theta}(y)}{\delta\bar{\psi}(x)}\right)+\left[\theta(x),\bar{\theta}(y)\right]_{+}=0 \quad \text{при} \quad x\sim y$$

Введем теперь в рассмотрение вакуумные средние:

$$R^{r}(x-y) = -\left\langle\frac{\delta}{\delta\bar{\psi}(x)}\bar{\theta}(y)\right\rangle_{0}, \tag{6}$$

$$R^{a}(x-y) = +\left\langle\frac{\delta}{\delta\psi(y)}\theta(x)\right\rangle_{0}, \tag{7}$$

$$R^{(-)}(x-y) = i\left\langle\theta(x)\bar{\theta}(y)\right\rangle_{0} \tag{8}$$

$$R^{(+)}(x-y) = -i\left\langle\bar{\theta}(x)\theta(y)\right\rangle_{0} \tag{9}$$

которые на основании (4) и (5) связаны с R^{c} соотношениями

$$\begin{aligned} R^{a}(x) &= R^{c}(x)+R^{(-)}(x)\\ R^{r}(x) &= R^{c}(x)+R^{(+)}(x)\end{aligned} \tag{10}$$

При этом в силу условия причинности

$$\begin{aligned} R^{r}(x) &= 0 \quad \text{при} \quad x\lesssim 0\\ R^{a}(x) &= 0 \quad \text{при} \quad x\gtrsim 0\end{aligned} \tag{11}$$

Ввиду соображений изотопической и лоренцевой инвариантности все эти функции имеют следующую структуру

$$R(x) = \delta_{st}\left(i\hat{\partial}u_{1}(x)+u_{2}(x)\right), \tag{12}$$

где u_1 и u_2 - инвариантные скалярные функции, s и t - изотопические (протонно-нейтронные) индексы, а компоненты $\hat{\partial}$ содержат обычные матрицы Дирака четвертого ранга.

Принимая затем во внимание свойства инвариантности выражений (6)-(9) относительно преобразования зарядового сопряжения, получаем, что функции $u(x)$ связаны между собой соотношениями

$$u_1^{(+)}(x) = -u_1^{(-)}(-x)\,, \quad u_2^{(+)}(x) = u_2^{(-)}(-x)$$
$$u_1^{r}(x) = -u_1^{a}(-x)\,, \quad u_2^{r}(x) = u_2^{a}(-x) \qquad (12)$$

Рассмотрим теперь функцию $R^{(-)}$.

Согласно условию 47.2В можем написать ее в виде

$$R^{(-)}(x-y) = \sum_n \int d\vec{k} \langle 0|\vartheta(0)|n,\vec{k}\rangle\langle n,\vec{k}|\bar{\vartheta}(0)|0\rangle e^{-ik(x-y)} \qquad (13)$$

В этой сумме, как и ранее в § 48.2 ряд первых членов равен нулю. Так, по соображениям ковариантности

$$\langle 0|\vartheta(0)|n,\vec{k}\rangle = 0 \qquad (14)$$

для безнуклонных состояний $|n,\vec{k}\rangle$. Кроме того, рассуждая как и ранее в § 48.2, убеждаемся, что (14) справедливо также для однонуклонного состояния; поэтому интеграл (13) фактически распространен по области, в которой $k^2 \geqq (M+\mu)^2$.

Ясно теперь, что $R^{(-)}$ может быть представлена в виде

$$R^{(-)}(x) = \frac{\delta_{\rho\sigma}}{(2\pi)^3 i} \int e^{-ikx}\theta(k^0)[\hat{k}\rho_1(k^2) + \rho_2(k^2)]\,dk\,, \qquad (15)$$

$$\rho_{1,2}(k^2) = 0 \text{ при } k^2 < (M+\mu)^2$$

Вводя для R^a, R^r и R^c аналогичные импульсные представления через скалярные функции φ_1 и φ_2:

$$R(x) = \frac{\delta_{\rho\sigma}}{(2\pi)^4} \int e^{-ikx}[\hat{k}\varphi_1(k) + \varphi_2(k)]\,dk\,, \qquad (16)$$

с помощью (10) и (12) приходим к соотношениям:

$$\varphi_i^c(k) = \varphi_i^r(k) - 2\pi i\,\theta(k^0)\rho_i(k^2) = \qquad (17)$$
$$= \varphi_i^a(k) + 2\pi i\,\theta(-k^0)\rho_i(k^2) \qquad (i=1,2)$$

Используя здесь (I6), получаем также

$$\varphi_i^c(k) = \varphi_i^r(k) = \varphi_i^a(k) \qquad \text{при} \quad k^2 < (M+\mu)^2 \qquad (18)$$

Ввиду того, что соотношения (I8) и (I9) полностью аналогичны формулам (48.32) и (48.33), мы можем теперь дословно повторить для функций u_i рассуждения, проведенные в § 48.4 , с функциями q

Получим этим путем

$$\begin{aligned} \varphi_i^r(k) &= \lim_{\varepsilon \to 0} f_i(k^2 + i\varepsilon k^0), \\ \varphi_i^a(k) &= \lim_{\varepsilon \to 0} f_i(k^2 - i\varepsilon k^0), \\ \varphi_i^c(k) &= \lim_{\varepsilon \to 0} f_i(k^2 + i\varepsilon), \end{aligned} \qquad (19)$$

где функции f_i - аналитические во всей комплексной плоскости своего аргумента, за исключением линии разреза

$$\operatorname{Im} k^2 = 0 \;, \qquad \operatorname{Re} k^2 > (M+\mu)^2$$

и на бесконечности возрастают не быстрее полинома n- ой степени, вследствие чего могут быть представлены в виде, аналогичном (48.52):

$$f_i(k^2) = (k^2 - M^2)^{n+1} \int\limits_{(M+\mu)^2}^{\infty} \frac{\rho_i(z)\, dz}{(z-M^2)^{n+1}(z-k^2)} + i \sum_{0 \le m \le n} \frac{(k^2-M^2)^m}{m!} f_i^{(m)}(M^2) \qquad (20)$$

Установим теперь некоторые неравенства, которым должны удовлетворять функции ρ_i.

Заметим для этого, что на основании (II), (I3) и (I8) можем написать соотношение

$$\begin{aligned} &\hat{k}_{\alpha\beta}\, \rho_1(k^2) + \delta_{\alpha\beta}\, \rho_2(k^2) = \\ &= \sum_{n,\, \omega} \langle 0 | \vartheta_\alpha(0) | n, \vec{k} \rangle \langle \bar{n}, \vec{k} | \overset{*}{\vartheta}_\omega(0) | 0 \rangle \gamma^0_{\omega\beta} \end{aligned} \qquad (21)$$

справедливое при всех $k^2 = M_n^2$, $k^0 > 0$.

Положим здесь

$$\vec{k} = 0, \qquad k^0 = \nu > 0 \;, \quad k^2 = \nu^2, \qquad \alpha = \beta$$

и воспользуемся тем*, что в используемом обычно представлении

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Получим тогда

$$\nu\rho_1(\nu^2) + \rho_2(\nu^2) = \sum_n |\langle 0|\vartheta_\alpha(0)|n,0\rangle|^2 > 0$$

$$-\nu\rho_1(\nu^2) + \rho_2(\nu^2) = -\sum_n |\langle 0|\vartheta_\alpha(0)|n,0\rangle|^n < 0 \qquad (22)$$

Введем теперь функции

$$J_1(\nu) = \frac{\rho_1(\nu^2) - \frac{\rho_2(\nu^2)}{\nu}}{2}, \quad J_2(\nu) = \frac{\rho_1(\nu^2) + \frac{\rho_2(\nu)}{\nu}}{2}$$

которые в силу (22) являются не отрицательными:

$$J_1(\nu) \geqq 0, \quad J_2(\nu) \geqq 0 \qquad (23)$$

и заметим, что

$$\hat{k}\rho_1(\nu^2) + \rho_2(\nu^2) = (\hat{k} - \nu) J_1(\nu^2) + (\hat{k} + \nu) J_2(\nu) \qquad (24)$$

На основании (20) и (24) можем теперь заключить, что комбинации

$$R(\hat{k}) = \hat{k} f_1(k^2) + f_2(k^2) \qquad (25)$$

---

* Т.е. выберем K чисто временным и обозначим через $\mathcal{Y}$ совокупность M_n, при которых правая часть (2I) отлична от нуля.

** Обращение к конкретному представлению матриц Дирака не является здесь обязательным. Мы прибегли к нему лишь в целях упрощения изложения.

обладают спектральным представлением вида

$$R(\hat{k}) = (k^2 - M^2)^{n+1} \int_{M+\mu}^{\infty} \frac{(\hat{k}-\nu)J_1(\nu) + (\hat{k}+\nu)J_2(\nu)}{(\nu^2 - M^2)^{n+1}} \frac{d\nu^2}{\nu^2 - k^2} +$$

$$+ i \sum_{0 \le m \le n} \frac{(k^2 - M^2)^m}{m!} \left(\hat{k} f_1^{(m)}(M^2) + f_2^{(m)}(M^2)\right). \tag{26}$$

Ясно при этом, что в силу (I6) и (I9) в (26) в качестве $R(\hat{k})$ можно взять импульсное представление R^r, R^a или R^c, выбирая лишь согласно (I9) соответствующее правило обхода для полюса $\nu^2 = k^2$.

Спектральное представление (26) можно несколько преобразовать. Заметим для этого, что разности

$$\left(\frac{k^2 - M^2}{\nu^2 - M^2}\right)^{n+1} \frac{1}{\nu \pm \hat{k}} - \left(\frac{\hat{k} - M}{\nu \pm M}\right)^{2n+2} \frac{1}{\nu \pm \hat{k}}$$

по отношению к $\hat{k}$ являются полиномами степени $2n+1$. Ввиду этого формулу (26) можно записать в виде

$$R(\hat{k}) = (\hat{k} - M)^{2n+2} \int_{(\nu \ge M+\mu)} \left(\frac{I_1(\nu)}{\nu + \hat{k}} + \frac{I_2(\nu)}{\nu - \hat{k}} \right) d\nu + \tag{27}$$

$$+ \sum_{0 \le m \le 2n+1} B_m (\hat{k} - M)^m,$$

где

$$I_1(\nu) = \frac{2\nu J_1(\nu)}{(\nu + M)^{2n+2}} \ge 0$$

$$I_2(\nu) = \frac{2\nu J_2(\nu)}{(\nu - M)^{2n+2}} \ge 0 \tag{28}$$

а B_m - скалярные постоянные.

Как и в случае бозонной функции g можно показать, что $B_0 = 0$, так как на основании (48.9) только в этом случае соответствующая функция Грина имеет полюс первого порядка в точке $\hat{k} = M$. Конструктивно соответствующее доказательство может быть проведено с помощью рассмотрения матричного элемента S между двумя однонуклонными состояниями тем же самым путем, что и в предыдущем бозонном случае.

Наконец, используя вытекающее из определений (5) и (7) свойство сопряжения

$$\overline{R}^r(x-y) \equiv (R^r(x-y))^* \gamma^0 = R^a(y-x)$$

из которого также вытекает, что

$$\gamma^0 \tilde{R}^r(k)\gamma^0 = R^a(k),$$

получим, что все B_m - вещественны.

Представление Челлена-Лемана для фермионной функции Грина получится отсюда с помощью (48.9) при дополнительном предположении о том, что h=0.

Мы опять столкнулись здесь с тем интересным фактом, что при наличии нашей системы условий (§§ 47.2,3) задание "степени роста" эквивалентно заданию формы лагранжиана.

<u>2. Близость к противоречию.</u> Скажем в заключение несколько слов по поводу условия (47.3А), в соответствии с которым вакуумные средние от радиационных операторов должны быть "интегрируемыми функциями" в обобщенном смысле, т.е. принадлежать к одному из классов $C(q,r,h)$

Представим себе, что получилось бы, если бы наложили на эти вакуумные средние $h(x_1,\ldots,x_n)$ более жесткое условие, потребовав, чтобы они являлись обычными функциями, для которых существуют интегралы вида

$$\int |h(x_1,\ldots x_n)|\,\rho(x_1,\ldots x_n)\,dx_1\ldots dx_n \tag{29}$$

с весовыми функциями ρ, убывающими на бесконечности, как

$$\left(\frac{1}{|x_1|+\ldots\ldots+|x_n|}\right)^m \qquad (|x|=|x^0|+|\vec{x}|)$$

с достаточно высокой степенью m.

Поскольку мы не ослабляем нашу систему условий, а наоборот делаем ее более сильной, все доказанные выше теоремы остаются верными. Продолжают выполняться, в частности, и формулы (48.52), (26), (27).

Перейдем, например, в (48.53) к x - представлению. Получим

$$Q_{\sigma\rho}(x-y) = \delta_{\rho\sigma}(\Box_x-\mu^2)^{n+1}\int_{(3\mu)^2}^{\infty} I(z)\,D_z^c(x-y)\,dz + \\ + \sum_{1\leq m\leq n} C_m(\mu^2-\Box_x)^m\,\delta(x-y), \tag{30}$$

где

$$\Box_x = \Delta_x - \frac{\partial^2}{(\partial x^0)^2}, \quad I(z) = \frac{J(z)}{(z-\mu^2)^{n+1}} \geq 0$$

а D^c_z – причинная функция для поля с массой $\sqrt{z}$.

Но, как известно, функция $D^c_z(x-y)$ имеет на световом конусе особенность типа $1/(x-y)^2$. Благодаря положительности весовой функции в интеграле (30) все эти особенности не компенсируются, а складываются. Действие оператора $(\Box-\mu^2)^m$ еще более усиливает характер сингулярности на световом конусе. Вследствие этого интегралы типа (29) расходятся для функций Q , принадлежностей к рассматриваемому классу функций – вакуумных ожиданий радиационных операторов.

Итак, оказалось достаточным несколько сузить одно из условий системы (47.2), (47.3), чтобы придти к внутреннему противоречию.

Разумеется отсюда нельзя сделать никаких заключений о совместимости самой "недоформированной" системы условий (47.2,3) и мы здесь хотим лишь обратить внимание на то, что вопрос о внутренней непротиворечивости всей локальной теории не является полностью ясным.

Обратим внимание еще на одно интересное обстоятельство. Так иногда высказывается мнение, что применение вычитательного формализма в теории поля обусловлено использованием теории возмущений. Это мнение нам представляется неправильным.

Действительно, как мы только что убедились, полная функция Грина имеет сингулярность на световом конусе во всяком случае не меньшую, чем D^c функция свободного поля. Представим себе, что нам нужно выполнить хотя бы операцию умножения

$$D^c_\alpha(x-y)\, D^c_\beta(x-y).$$

Для того, чтобы придать ей смысл, необходимо прибегнуть к вычитательной процедуре, так как при тривиальном ее понимании немедленно возникнет расходимость типа ультрафиолетовой катастрофы. Нам кажется поэтому, что вычитательный формализм является неизбежным атрибутом любой локальной теории.

§50. Амплитуда рассеяния мезонов на нуклонах

Этот параграф содержит вспомогательный материал, на основании которого в § 51 будет дан вывод дисперсионных соотношений для процесса рассеяния мезона на нуклонах. Здесь будут введены все основные и вспомогательные величины, а также будет намечен математически более простой вывод дисперсионных соотношений для случая рассеяния вперед.

I. Связь амплитуды рассеяния с "запаздывающим" и "опережающим" матричным элементами. Мы будем считать, что до акта рассеяния нуклон находится в состоянии, характеризуемом импульсом $\vec{p}$ и дискретными спиновым и изотопическим индексами, в совокупности обозначенными буквой s и что пион находится в состоянии с импульсом $\vec{q}$ и дискретными индексами ρ. Соответствующие характеристики нуклона и пиона в состоянии после рассеяния обозначим штрихованными буквами ($\vec{p}', s'$ - для нуклона; $\vec{q}', \rho'$ - для пиона). В дальнейшем нам будет удобно особо выделить импульсы пиона $\vec{q}$ и $\vec{q}'$, обозначая совокупность остальных характеристик начального и конечного состояний одной буквой:

$$\alpha = (\vec{p}, s, \rho) \quad ; \qquad \omega = (\vec{p}', s', \rho')$$

В соответствии с (46.I4) амплитуда рассеяния указанного процесса будет выражаться через матричный элемент

$$\langle \vec{p}', s', \vec{q}' \rho' | S | \vec{p} s, \vec{q} \rho \rangle$$

Выделив из амплитуд начального и конечного состояний пионные операторы $a^{(-)}_{\rho'}(\vec{q}')$ и $a^{(+)}_{\rho}(\vec{q})$, прокоммутируем $a^{(+)}$ с S- матрицей

$$\langle \vec{p}' s', \vec{q}' \rho' | S | \vec{p} s, \vec{q} \rho \rangle = \langle \vec{p}' s' | a^{(-)}_{\rho'}(\vec{q}') S a^{(+)}_{\rho}(\vec{q}) | \vec{p} s \rangle =$$

$$= \langle \vec{p}' s' | a^{(-)}_{\rho'}(\vec{q}') a^{(+)}_{\rho}(\vec{q}) S | \vec{p} s \rangle + \frac{1}{(2\pi)^{3/2}\sqrt{2q^0}} \int dy\, e^{iqy} \langle \vec{p}' s' | a^{(-)}_{\rho'}(\vec{q}') \frac{\delta S}{\delta \varphi_\rho(y)} | \vec{p} s \rangle \tag{50.I}$$

Для вычисления первого члена воспользуемся условием стабильности однонуклонного состояния. Выполняя затем коммутирование операторов, получим, что он равен произведению δ - функций. Во втором члене следует прокоммутировать еще $a^{(-)}$ с $\delta S / \delta \varphi$. Принимая во внимание (46.I4), получаем отсюда следующее выражение для амплитуды рассеяния

$$\delta(p+q-q'-p') f(\alpha \vec{q}, \omega \vec{q}') =$$

$$= \frac{\pi}{(2\pi)^3 i} \int dx\, dy\, e^{i(q'x - qy)} \langle \vec{p}' s' | \frac{\delta^2 S}{\delta \varphi_{\rho'}(x) \delta \varphi_\rho(y)} \overset{+}{S} | \vec{p} s \rangle \tag{2}$$

$$p'^0 = \sqrt{\vec{p}^2 + M^2}, \ \ldots \quad q^0 = \sqrt{\vec{q}^2 + \mu^2}$$

§ 50!

Входящий под знак интеграла матричный элемент, по аналогии с рассмотренными в §§ 48, 49 вакуумными ожиданиями и функциями Грина, уместно назвать "причинным матричным элементом" и обозначить через F^c:

$$F^c(x,y) = \frac{2\pi^2}{i} \langle \vec{p}'s' | \frac{\delta^2 S}{\delta\varphi_{\rho'}(x)\,\delta\varphi_\rho(y)} \overset{+}{S} | \vec{p}s \rangle . \qquad (3)$$

В дальнейшем нам будет удобно использовать в рассуждениях величины

$$F^{ret}(x,y) = \frac{2\pi^2}{i} \langle \vec{p}'s' | \frac{\delta}{\delta\varphi_{\rho'}(x)} \left(\frac{\delta S}{\delta\varphi_\rho(y)} \overset{+}{S} \right) | \vec{p}s \rangle \qquad (4)$$

$$F^{adv}(x,y) = \frac{2\pi^2}{i} \langle \vec{p}'s' | \frac{\delta}{\delta\varphi_\rho(y)} \left(\frac{\delta S}{\delta\varphi_{\rho'}(x)} \overset{+}{S} \right) | \vec{p}s \rangle \qquad (5)$$

обладающие свойствами

$$F^{ret}(x,y) = 0 \quad \text{при} \quad x \lesssim y \qquad (6)$$

$$F^{adv}(x,y) = 0 \quad \text{при} \quad y \lesssim x \qquad (7)$$

а также выражения

$$F^{(-)}(x,y) = \frac{2\pi^2}{i} \langle \vec{p}'s' | \frac{\delta S}{\delta\varphi_{\rho'}(x)} \frac{\delta S^{+}}{\delta\varphi_\rho(y)} | \vec{p}s \rangle = \frac{2\pi^2}{i} \langle \vec{p}'s' | j_{\rho'}(x)\, j_\rho(y) | \vec{p}s \rangle \qquad (8)$$

$$F^{(+)}(x,y) = \frac{2\pi^2}{i} \langle \vec{p}'s' | j_\rho(y)\, j_{\rho'}(x) | \vec{p}s \rangle \qquad (9)$$

связанные с F^{ret}, F^{adv} и F^c соотношениями

$$F^c = F^{ret} - F^{(+)} = F^{adv} - F^{(-)} \qquad (10)$$

На основании (47.2В), (47.2Е) и (47.6) при преобразовании трансляции на $a = (x+y)/2$, получаем, что матричные элементы F^c, F^{ret}, F^{adv}, $F^{(+)}$ и $F^{(-)}$ могут быть представлены в виде

$$F(x,y) = e^{i(p'-p)a} F(x-a,\, y-a) = e^{i\frac{p'-p}{2}(x+y)} F(x-y) \qquad (11)$$

8 54.1

где $$F(x-y) = F\left(\frac{x-y}{2}, \frac{y-x}{2}\right)$$

Нам будет удобно ввести представления Фурье для функций

$$T_{\alpha\omega}(k) = \int dx\, e^{ikx} F(x) \tag{I2}$$

Из определений (4), (5), (6), (7) вытекают следующие соотношения для T : ($P_{\rho\rho'}$ - символ перестановки индексов ρ и ρ')

$$T^{ret}_{\alpha\omega}(k) = P_{\rho\rho'} T^{adv}_{\alpha\omega}(-k)$$
$$T^{(-)}_{\alpha\omega}(k) = P_{\rho\rho'} T^{(+)}_{\alpha\omega}(-k) \tag{I3}$$

откуда, с учетом (I0), имеем также

$$T^{c}_{\alpha\omega}(k) = T^{ret}_{\alpha\omega}(k) - T^{(+)}_{\alpha\omega}(k) = T^{adv}_{\alpha\omega}(k) - T^{(-)}_{\alpha\omega}(k) \tag{I4}$$

$$T^{ret}_{\alpha\omega}(k) - T^{adv}_{\alpha\omega}(k) = T^{(+)}_{\alpha\omega}(k) - P_{\rho\rho'} T^{(+)}_{\alpha\omega}(k) \tag{I5}$$

Заметим также, что амплитуда рассеяния связана с T^c соотношением

$$f(\alpha\vec{q}, \omega\vec{q}') = T^{c}_{\alpha\omega}\left(\frac{q+q'}{2}\right) \tag{I6}$$

Подобно тому, как это делалось раньше, мы будем теперь сводить причинную функцию T^c (или F^c) к запаздывающей или опережающей, имея ввиду, что в силу свойств (6) и (7) функции F^{ret} и F^{adv} более удобны для аналитического продолжения.

С этой целью рассмотрим подробнее величину $T^{(-)}$:

$$T^{(-)}_{\alpha\omega}\left(\frac{q+q'}{2}\right) = \frac{2\pi^2}{i} \int dx\, e^{i\frac{q+q'}{2}x} \langle \vec{p}'s' | j_\rho\left(\frac{y-x}{2}\right) j_{\rho'}\left(\frac{x-y}{2}\right) | \vec{p}s \rangle .$$

Используем теперь свойство полноты системы функций (47.2I). Совершая замены типа

$$j(z) = U^{+}_{Lz}\, j(0)\, U_{Lz}$$

и пользуясь свойством (47.6), получаем после интегрирования по x :

$$T^{(+)}_{\alpha\omega}\left(\frac{q+q'}{2}\right) = \frac{2\pi^2}{i} \int dx\, e^{i\frac{q+q'}{2}x} \sum_n \int d\vec{k} \langle \vec{p}'s' | j_\rho\left(-\frac{x}{2}\right) | \vec{k}n \rangle \langle \vec{k}n | j_{\rho'}\left(\frac{x}{2}\right) | \vec{p}s \rangle =$$
$$= \frac{(2\pi)^5 \pi}{i} \sum_n \delta\left(\sqrt{\vec{k}^2 + M_n^2} + \frac{q^0 + q'^0 - p^0 - p'^0}{2}\right) \langle \vec{p}'s' | j_\rho(0) | \vec{k}n \rangle \langle \vec{k}n | j_{\rho'}(0) | \vec{p}s \rangle \tag{I7}$$

при $\vec{k} = \dfrac{\vec{p} + \vec{p}' - \vec{q} - \vec{q}'}{2}$

§ 50.2

Замечая, что в силу (I6) нас интересует такая область, в которой

$$p+q-p'-q'=0$$

аргумент δ - функции в сумме (I7) можно представить в виде

$$\sqrt{(\vec{p}-\vec{q}\,')^2+M_n^2}+q^{0\prime}-p^0= \tag{I8}$$

$$=\sqrt{(\vec{p}-\vec{q}\,')^2+M_n^2}+\sqrt{\mu^2+\vec{q}\,'^2}-\sqrt{M^2+\vec{p}^{\,2}}$$

Поскольку (I8) стоит под знаком δ - функции, то должно быть

$$\sqrt{M_n^2+(\vec{p}-\vec{q}\,')^2}+\sqrt{\mu^2+\vec{q}^{\,2}}=\sqrt{M^2+\vec{p}^{\,2}}$$

Это соотношение соответствует превращению частицы с массой M в две частицы с массами μ и M_n. Но поскольку во всяком случае

$$M_n \geqq M$$

то это невозможно из-за соображений сохранения энергии и импульса. Отсюда вытекает, что выражение (I8) существенно положительно, вследствие чего T^{c} обращается в нуль.

Таким образом в том случае, когда матричные элементы берутся между состояниями реальных частиц, обладающими положительно энергией

$$p^0=\sqrt{\vec{p}^{\,2}+M^2} \qquad \text{и т.д.,}$$

причем выполняется закон сохранения 4 - импульса, то причинный матричный элемент совпадает с запаздывающим

$$T^{c}_{\alpha\omega}(k)=T^{ret}_{\alpha\omega}(k)$$

$$k^0=\frac{q^0+q^{0\prime}}{2}>\mu \tag{20}$$

Совершенно аналогичными рассуждением можно установить, что

$$T^{c}_{\alpha\omega}(k)=T^{adv}_{\alpha\omega}(k) \quad \text{при} \quad k^0<-\mu \tag{2I}$$

<u>2. Переход к фиксированной системе отсчета. Трудности аналитического продолжения</u>. Как указывалось в § 46. для получения дисперсионных соотношений необходимо установить свойства аналитичности в комплексной плоскости энергетической переменной. Такие свойства для запаздывающей функции одного аргумента в примере § 46 были непосредственно получены из свойства, аналогичного свойству (6).

В данном случае мы имеем дело с функциями большого числа независимых аргументов (импульсов различных частиц), причем в отличие от случая, рассмотренного в §§ 48, 49 эти аргументы не сводятся к одному скаляру (типа квадрата 4-импульса k^2). Из-за этого наши рассуждения значительно усложнятся.

Для того, чтобы в явной форме выделить отдельные независимые переменные энергии и импульса, фиксируем теперь систему отсчета. Наиболее удобно воспользоваться общепринятой системой, в которой сумма импульсов нуклона до и после рассеяния равна нулю

$$\vec{p} + \vec{p}' = 0 \tag{22}$$

(Эта система переходит в лабораторную систему при рассеянии вперед, когда $\vec{p} = \vec{p}' = 0$). В такой системе $\vec{p}^2 = \vec{p}'^2$, в силу закона сохранения энергии, также $\vec{q}^2 = \vec{q}'^2$. Закон сохранения импульса в свою очередь приводит к соотношениям

$$\vec{p} = \frac{\vec{q}' - \vec{q}}{2} \quad ; \qquad и \qquad (\vec{q} + \vec{q}')\vec{p} = 0 \tag{23}$$

Вследствие этого можно положить

$$\frac{\vec{q}' + \vec{q}}{2} = \varkappa \vec{e} \tag{24}$$

где $\vec{e}$ - единичный вектор, ортогональный $\vec{p}$:

$$\vec{e}^2 = 1, \quad \vec{e}\vec{p} = 0$$

Из (23) и (24) вытекает, что

$$\vec{q} = -\vec{p} + \varkappa \vec{e} \quad , \quad \vec{q}' = \vec{p} + \varkappa \vec{e}$$

и, следовательно,

$$\vec{q}^2 = \vec{q}'^2 = \vec{p}^2 + \varkappa^2 \quad , \quad q^0 = q'^0 = \sqrt{\mu^2 + \vec{p}^2 + \varkappa^2}$$

Таким образом, 4-векторный аргумент $(q+q')/2$ можно заменить величинами $\varkappa$ и $\vec{e}$. При этом наряду с $\varkappa$ удобно использовать энергию мезона

$$\frac{q^0 + q'^0}{2} = q^0 = E = \sqrt{\mu^2 + \vec{p} + \varkappa^2} \tag{25}$$

При фиксированном $\vec{p}$ величины E и $\varkappa$ связаны взаимнооднозначным образом.

Таким образом в системе отсчета (22) интересующие нас величины с помощью (12) могут быть представлены следующим образом:

$$T^{ret}_{\alpha\omega}(E, \vec{e}) = \int dx \, e^{i\left(Ex^0 - \sqrt{E^2 - \mu^2 - \vec{p}^2}\, \vec{e}\vec{x}\right)} F^{ret}_{\alpha\omega}(x) \tag{26}$$

9302

В соответствии с (6) интеграл здесь фактически берется по верхнему световому конусу $x^0 > 0$, $x^0 > |\vec{x}|$.

Рассмотрим возможность аналитического продолжения выражения (26) в верхнюю половину комплексной плоскости переменной a. Заметим, прежде всего, что для действительных положительных a всегда[ж]

$$\operatorname{Im}\sqrt{E^2 - a} > \operatorname{Im} E \tag{27}$$

Ввиду этого при добавлении к действительному E чисто мнимого добавка $i\Gamma$:

$$E \to E + i\Gamma \qquad (\Gamma > 0)$$

Для каждого значения x^0 всегда найдется область таких $\vec{x}$, что

$$-x^0\Gamma + \vec{e}\vec{x} \operatorname{Im}\sqrt{E^2 - \mu^2 - \vec{p}^2} > 0$$

вследствие чего выражение (26) не будет обладать свойствами аналитичности в верхней полуплоскости переменной E.

Как видно, эта трудность полностью закрывает возможность непосредственного аналитического продолжения выражения (26) на область комплексных значений переменной E. Более того, выражение (26) имеет смысл для действительных E лишь при

$$E^2 > \mu^2 + \vec{p}^2$$

так как после перехода через точки ветвления

$$E_0 = \pm\sqrt{\mu^2 + \vec{p}^2}$$

подинтегральное выражение приобретает возрастающий фактор

$$\exp\left\{\vec{e}\vec{x}\sqrt{\mu^2 + \vec{p}^2 - E}\right\}$$

и теряет смысл.

Таким образом, формула (26) представляет функцию T лишь на двух отрезках действительной оси

$$-\infty < E < -\sqrt{\mu^2 + \vec{p}^2}, \quad \sqrt{\mu^2 + \vec{p}^2} < E < \infty$$

и не может быть непосредственно продолжена за пределы этих отрезков.

[ж] Непосредственное алгебраическое доказательство неравенства (27) несколько громоздко. Более просто можно убедиться в его справедливости путем графических построений на плоскости комплексного переменного.

Ясно также, что совершенно аналогичные трудности возникнут при попытке аналитического продолжения опережающей функции $T^{adv}(E,\vec{e})$.

Ввиду этого для аналитического продолжения выражений T^{ret} и T^{adv} приходится прибегать к сложным искусственным приемам. Относительно более простой процедурой может быть рассмотрен случай рассеяния вперед, к рассмотрению которого мы сейчас перейдем.

3. Схема получения дисперсионных соотношений для амплитуды рассеяния вперед. Рассмотрим случай рассеяния вперед, когда $\vec{p}=0$. При этом

$$T(E,\vec{e}) = \int dx\, e^{i\left(Ex^0 - \sqrt{E^2-\mu^2}\,\vec{e}\vec{x}\right)} F(x) \tag{28}$$

а также*

$$T^{(\pm)}\left(\frac{q+q'}{2}\right) = T^{(\pm)}(q) = \frac{(2\pi)^5\pi}{i}\,\delta\left(\sqrt{M^2+\vec{q}^2} - M \pm E\right)\times$$
$$\times \sum_{s''} \langle 0s'|j_s(0)|\vec{q}s''\rangle\langle\vec{q}s''|j_s(0)|0s\rangle +$$
$$+\frac{(2\pi)^5\pi}{i}\sum_{(M_n>M+\mu)}\delta\left(\sqrt{M_n^2+\vec{q}^2}-M\pm E\right)\langle 0s'|j_s(0)|\vec{q}n\rangle\langle\vec{q}n|j_s(0)|0s\rangle \tag{29}$$

Исследуем структуру членов в (29) для произвольных вещественных значений E. При этом мы естественно не будем считать, что E ограничена условиями типа

$$E^2 = \mu^2 + \vec{q}^2 \quad , \quad E > \mu$$

рассматривая E, как независимую от q переменную.

Первый член в (29) дает вклад, отличный от нуля при

$$E = \pm\left(\sqrt{M^2+\vec{q}^2} - M\right)$$

или что эквивалентно при

$$E = \pm\frac{E^2-\vec{q}^2}{2M} = \pm\frac{q^2}{2M} \tag{30}$$

Вклад второго члена отличен от нуля при

$$|E| = \sqrt{M_n^2+\vec{q}^2} - M > \sqrt{(M+\mu)^2+\vec{q}^2} - M > (M+\mu) - M = \mu \tag{31}$$

---

* Здесь опять существенно предположение об отсутствии взаимодействия с частицами более легкими, чем π - мезоны.

§ 50 3

Таким образом, на отрезке действительной оси

$$-\mu < E < \mu$$

вклад в выражение T дает лишь промежуточное однонуклонное состояние при двух значениях энергии, связанных с квадратом 4-импульса соотношением (30). Поэтому, если мы введем в рассмотрение вместо функций F выражение

$$\tilde{F}(x) = -\left[\left(\frac{\partial}{\partial x^0}\right)^2 + \left(\frac{\Box}{2M}\right)^2\right] F(x) \tag{32}$$

что в импульсном представлении эквивалентно умножению на полином

$$\tilde{T}(q) = \left[q^{0\,2} - \left(\frac{\vec{q}^{\,2}}{2M}\right)^2\right] T(q), \tag{33}$$

то при значениях $-\mu < q^0 < \mu$ функции $\tilde{T}^{(+)}$ и $\tilde{T}^{(-)}$ будут равны нулю*, вследствие чего

$$\tilde{T}(q) = \tilde{T}^{ret}(q) = T^{adv}(q) \quad \text{при } -\mu < q^0 < \mu \tag{34}$$

Из (28) следует, что точки $K^0 = \pm\mu$ являются, вообще говоря, точками ветвления функций $\tilde{T}$. Для того, чтобы ликвидировать двузначность квадратного корня $\pm\sqrt{E^2 \mp \mu^2}$, проще всего рассмотреть вместо функции $T(E, \vec{e})$ их симметризованные и антисимметризованные комбинации

$$S_+ T(E, \vec{e}) = \frac{T(E, \vec{e}) + T(E, -\vec{e})}{2} \tag{35а}$$

$$S_- T(E, \vec{e}) = \frac{T(E, \vec{e}) - T(E, -\vec{e})}{2\surd} \tag{35в}$$

совокупность которых мы в дальнейшем будем обозначать через ST. Функции ST^{ret} и ST^{adv} могут быть продолжены на область значений комплексных E следующим путем. Введем выражения

$$S\int \tilde{F}^{ret}(x)\, e^{i(Ex^0 - \vec{e}\vec{x}\sqrt{E^2-\mu^2}) - \varepsilon \vec{x}^2}\, dx^0 d\vec{x} = \Phi^r(E, \vec{e}; \varepsilon) \tag{36}$$

---

* В силу соотношений типа $x\,\delta(x)$

** Этот момент рассуждения существенно основан на допущении $\vec{p} = 0$, так как в случае $\vec{p} \neq 0$ нарушается неравенство (33).

$$S\int \tilde{F}^{adv}(x)\, e^{i(Ex^0-\vec{e}\vec{x}\sqrt{E^2-\mu^2})-\varepsilon\vec{x}^2}\, dx^0 d\vec{x} = \Phi^{a}(E,\vec{e};\varepsilon) \tag{37}$$

Здесь—в соответствии с (35)

$$S_+\, e^{-i\vec{e}\vec{x}\sqrt{E^2-\mu^2}} = \cos(\lambda\vec{e}\vec{x}) \tag{38}$$

$$S_-\, e^{-i\vec{e}\vec{x}\lambda} = \frac{\sin(\lambda\vec{e}\vec{x})}{i\lambda} \tag{39}$$

Ясно, во-первых, что из-за наличия фактора $\exp(-\varepsilon\vec{x}^2)$ функция $\Phi^r(E,\vec{e};\varepsilon)$ будет аналитической в верхней полуплоскости комплексных значений E, а $\Phi^a(E,\vec{e};\varepsilon)$ в нижней. Во-вторых, в силу (34)

$$\Phi^r(E,\vec{e};\varepsilon)-\Phi^a(E,\vec{e};\varepsilon)=0 \quad \text{при} \quad -\mu<\operatorname{Re}E<\mu,\ \operatorname{Im}E=0$$

Таким образом, совокупность функций Φ^r и Φ^a представляет собой функцию

$$\Phi(E,\vec{e};\varepsilon)=\begin{cases}\Phi^r(E,\vec{e};\varepsilon) & \text{при} \quad \operatorname{Im}E>0\\[2ex] \Phi^a(E,\vec{e};\varepsilon) & \text{при} \quad \operatorname{Im}E<0\end{cases} \tag{40}$$

аналитическую во всей комплексной плоскости аргумента E, за исключением линий разреза

$$-\infty<\operatorname{Re}E<-\mu, \quad \operatorname{Im}E=0 \tag{4Ia}$$

и

$$\mu<\operatorname{Re}E<\infty, \quad \operatorname{Im}E=0. \tag{4Iб}$$

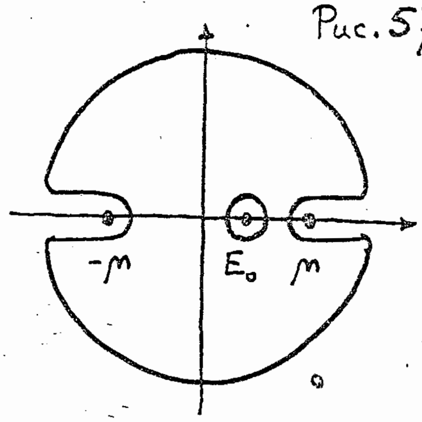
При этом значения Φ на верхних берегах разрезов равны значениям Φ^r, а на нижних - значениям Φ^a.

Обозначая теперь порядок роста функции Φ при больших E через n, можем использовать интегральную теорему Коши для выражения

$$\frac{\Phi(E,\vec{e};\varepsilon)}{(E-E_0)^{n+1}}$$

где E_0 - некоторый вещественный параметр, лежащий в интервале $(-\mu,+\mu)$

Рис.57



Выберем контур интегрирования, состоящий из окружности малого радиуса δ вокруг точки E_0, двух полуокружностей большого радиуса R и соединяющих эти полуокружности контуров вдоль линий разреза, отстоящих от них на расстоянии δ (см.рис. 57). Устремляя R к бесконечности интеграла по большим полуокружностям обратим в нуль. Переходя затем к пределу при $\delta \to 0$ получим

$$\Phi(E,\vec{e};\varepsilon) = \frac{(E-E_0)^{n+1}}{2\pi i} \int_{-\infty}^{-\mu} \frac{\Phi(E'+i0,\vec{e};\varepsilon) - \Phi(E'-i0,\vec{e};\varepsilon)}{(E'-E)(E'-E_0)^{n+1}} dE' +$$

$$+ \frac{(E-E_0)^{n+1}}{2\pi i} \int_{\mu}^{\infty} \frac{\Phi(E'+i0,\vec{e};\varepsilon) - \Phi(E'-i0,\vec{e};\varepsilon)}{(E'-E)(E'-E_0)^{n+1}} dE' + P_n(E) \quad (42)$$

где $P_n(E)$ – полином n – ой степени от E.

В интегралах правой части (42) перейдем к пределу при $(E-E_0)^{n+1}$. Ввиду того, что интегрирование проводится по наблюдаемой области $E'^2 > \mu^2$, в соответствии с (36) и (37), числители подинтегральных выражений примут вид

$$\Phi^r(E',\vec{e};0) - \Phi^a(E',\vec{e};0) = S\tilde{T}^{ret}(E',\vec{e}) - S\tilde{T}^{adv}(E',\vec{e})$$

При этом сами интегралы, умноженные на $(E-E_0)^{n+1}$, при $\varepsilon = 0$ будут представлять функции, аналитические во всей плоскости комплексного переменного E, за исключением линий разрезов (41). Из (42) следует поэтому, что при $\varepsilon = 0$ правая часть определяет функцию $\Phi(E,\vec{e};0)$ аналитическую во всей плоскости E за исключением двух упомянутых разрезов. Но, как следует из (40), (36), (37) и (33) $\Phi(E,\vec{e};0)$ отличается лишь множителем

$$E^2 - \left(\frac{E^2-\vec{q}^2}{2M}\right)^2 =$$

$$= \left(E+M+\sqrt{M^2+\vec{q}^2}\right)\left(E+M-\sqrt{M^2+\vec{q}^2}\right)\left(E-M-\sqrt{M^2+\vec{q}^2}\right)\left(E-M+\sqrt{M^2+\vec{q}^2}\right) \quad (43)$$

от функции

$$S\tilde{T}(E,\vec{e}) = \begin{cases} ST^{ret}(E,\vec{e}) \text{ при } & \mathrm{Im}\, E > 0 \\ ST^{adv}(E,\vec{e}) \text{ при } & \mathrm{Im}\, E < 0 \end{cases}$$

§ 50.3

Ясно поэтому, что функция $S\tilde{T}(E,\vec{e})$ также будет аналитической функцией во всей комплексной области переменной E, за исключением двух линий разреза (41) и точек, в которых множитель (43) обращается в нуль. В тех из этих точек, которые лежат вне линий разреза (41), функция $S\tilde{T}(E,\vec{e})$ будет иметь полюса первой степени. При этом на бесконечности функция $S\tilde{T}$ будет возрастать не быстрее полинома n-4-го порядка.

Ясно теперь, что к функции $S\tilde{T}(E,\vec{e})/(E-E_0)^{n-3}$ можно применить интегральную формулу Коши, причем контур интегрирования следует выбирать с учетом наличия дополнительных полюсов, связанных с множителем (43).

Так, при

$$\vec{q}^{\,2} > (M+\mu)^2 - M^2 = 2M\mu + \mu^2$$

дополнительных полюсов не возникает и контур интегрирования следует выбрать таким же, как на рис. 57.

Наоборот, при

$$\vec{q}^{\,2} < 2M\mu + \mu^2$$

появляются два дополнительные полюса в точках

$$E_1 = \sqrt{M^2+\vec{q}^{\,2}} - M < \mu$$

$$E_2 = -E_1 = -\sqrt{M^2+\vec{q}^{\,2}} + M > -\mu$$

и в контур интегрирования следует добавить две окружности вокруг этих полюсов, как изображено на рис. 58.

Переходя затем к пределу при $R\to\infty$, $\delta\to 0$, сведем интегральный член к интегралам по наблюдаемой области $(-\infty < E < -\mu)$, (Подобно тому, как в (42)) и вычетам в полюсах $\pm E_1$. Устремляя затем в наблюдаемую область аргумент функции $S\tilde{T}(E,\vec{e})$, стоящей вне интеграла, получим дисперсионные соотношения для наблюдаемой величины $ST^c(E,\vec{e})$.

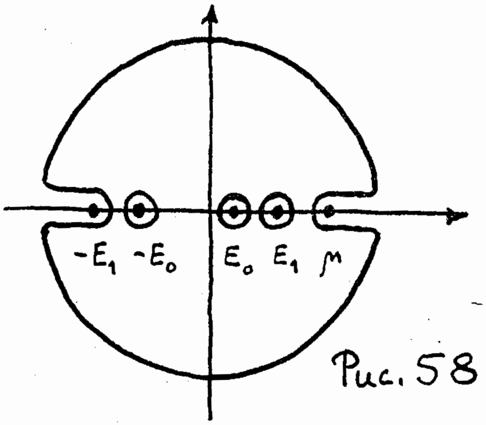


Рис. 58

Мы, однако, не будем здесь этим заниматься, имея ввиду, что ниже (§51) будут получены дисперсионные соотношения для более общего случая при $\vec{p}\neq 0$, которые будут подробно обсуждаться (§52).

§ 51. Вопросы аналитического продолжения амплитуды рассеяния при $\vec{p} \neq 0$.

Перейдем теперь к выводу дисперсионных соотношений для общего случая $\vec{p} \neq 0$. В предыдущем параграфе амплитуда рассеяния была представлена интегралом

$$T^c(E,\vec{e}) = \int e^{i(Ex^0 - \mathcal{S}\vec{e}\vec{x})} F(x)\,dx$$

рассматриваемом при

$$\mathcal{S}^2 = E^2 - \mu^2 - \vec{p}^2 \qquad (1)$$

Как там было продемонстрировано, все затруднения с аналитическим продолжением в область комплексных значений E были связаны с тем, что $\mathcal{S}^2 < E^2$. Поэтому ниже мы рассмотрим сперва фиктивный случай, когда $\mathcal{S}^2 > E^2$ и операция аналитического продолжения на комплексные значения не встречает каких-либо затруднений, построим для этого случая дисперсионные соотношения, а затем проведем аналитическое продолжение в область $\mathcal{S}^2 < E^2$ и получим дисперсионные соотношения для реального случая.

1. Аналитические свойства в фиктивной области $\tau < -\vec{p}^2$

Положим вместо (1)

$$\mathcal{S}^2 = E^2 - \vec{p}^2 - \tau \qquad (2)$$

где τ - новая вспомогательная переменная, ограниченная пока условием

$$\tau < -\vec{p}^2 \qquad (3)$$

Введем теперь выражения

$$\mathcal{S}T^r(E,\vec{e};\tau) = \mathcal{S}\int e^{i(Ex^0 - \vec{e}\vec{x}\sqrt{E^2-\vec{p}^2-\tau})} F^{ret}(x)\,dx \qquad (4а)$$

$$\mathcal{S}T^a(E,\vec{e};\tau) = \mathcal{S}\int e^{i(Ex^0 - \vec{e}\vec{x}\sqrt{E^2-\vec{p}^2-\tau})} F^{adv}(x)\,dx \qquad (4б)$$

которые в реальном случае $\tau = \mu^2$ переходят в рассмотренные ранее (§50) $\mathcal{S}T^{ret}(E,\vec{e})$ и $\mathcal{S}T^{adv}(E,\vec{e})$

$$\mathcal{S}T^r(E,\vec{e};\mu^2) = \mathcal{S}T^{ret}(E,\vec{e}), \qquad (5а)$$

$$\mathcal{S}T^a(E,\vec{e};\mu^2) = \mathcal{S}T^{adv}(E,\vec{e}). \qquad (5б)$$

§ 51.1

Ясно теперь, что поскольку в области (3) всегда

$$\mathrm{Im}\,E > \mathrm{Im}\sqrt{E^2-\vec{p}^2-\tau} = \mathrm{Im}\,\varkappa \tag{6}$$

то $ST^r(E,\vec{e};\tau)$ будет аналитической функцией в области $\mathrm{Im}\,E>0$, а $ST^a(E,\vec{e};\tau)$ будет аналитической в области $\mathrm{Im}\,E<0$.

Для того, чтобы установить, что функция

$$S\tilde{T}(E,\vec{e};\tau) = \begin{cases} ST^r(E,\vec{e};\tau) & \text{при} \quad \mathrm{Im}\,E>0 \\ ST^a(E,\vec{e};\tau) & \text{при} \quad \mathrm{Im}\,E<0 \end{cases} \tag{7}$$

будет аналитической функцией во всей плоскости комплексного E (за исключением быть может некоторого числа точек и линий разреза на действительной оси), рассмотрим разность функций ST^r и ST^a в области действительных E . Имеем в соответствии с (4), (50.I0) и (50.I3)

$$ST(E,\vec{e};\tau) = ST^r(E,\vec{e};\tau) - ST^a(E,\vec{e};\tau)$$

$$= S\int dx\, e^{i(Ex^0-\varkappa\vec{e}\vec{x})}\left\{F^{(+)}(x) - P_{ss'}F^{(+)}(-x)\right\} \tag{8}$$

Подставляя с помощью (50.I2) и (50.I7) в правую часть этого выражения представление для $F^{(+)}$ через суммы по полной системе состояний, получим, после проведения интеграций (в системе $\vec{p}+\vec{p}\,'=0$)

$$ST(E,\vec{e};\tau) =$$

$$= (2\pi)^5\pi i\sum_n \delta\left(E-\sqrt{\varkappa^2+M_n^2}+\sqrt{\vec{p}^2+M^2}\right) S\langle\vec{p}\,'s'|j_{s'}(0)|\varkappa\vec{e}n\rangle\langle\varkappa\vec{e},n|j_s(0)|\vec{p}s\rangle \tag{9}$$

$$-(2\pi)^5\pi i\sum_n \delta\left(E+\sqrt{\varkappa^2+M_n^2}-\sqrt{\vec{p}^2+M^2}\right) S\langle\vec{p}\,'s'|j_s(0)|\varkappa\vec{e}n\rangle\langle\varkappa\vec{e}n|j_{s'}(0)|\vec{p}s\rangle$$

Ограничимся теперь областью импульсов $\vec{p}$, для которых

$$\vec{p}^2 < \frac{\mu M + \mu^2/2 - \tau}{2} \tag{I0}$$

Введем теперь обозначение

$$E_1 = \frac{2M\mu+\mu^2-2\vec{p}^2-\tau}{2\sqrt{M^2+\vec{p}^2}} > 0 \tag{II}$$

Не составляет труда убедиться, что однонуклонные члены в сумме (9) отличны от нуля лишь при

$$E = \pm E_p(\tau)\ ;\quad E_p(\tau) = \frac{2\vec{p}^2+\tau}{2\sqrt{M^2+\vec{p}^2}} \tag{I2}$$

При этом в силу (II)

$$-E_1 < -E_p\,,\ E_p < E_1 \tag{I3}$$

С другой стороны, согласно ранее сделанному допущению в суммах (9) для всех n', кроме однонуклонного

$$M_n > M+\mu$$

Отсюда вытекает, что суммы всех членов в (9), кроме однонуклонного, отличны от нуля лишь при

$$|E| = \frac{|M_n^2 - M^2 - 2\vec{p}^{\,2} - \tau|}{2\sqrt{M^2+\vec{p}^{\,2}}} > E_1 \tag{I4}$$

Отсюда вытекает, что при $|E| < E_1$ в формуле (9) отличны от нуля лишь одномезонные составляющие, которые можно записать в виде

$$ST(E,\vec{e};\tau) =$$

$$= \frac{(2\pi)^6 i}{2}\,\frac{2M^2-\tau}{2(M^2+\vec{p}^{\,2})}\,\delta(E+E_p)\sum_{s''}\langle\vec{p}'s'|j_{g'}(0)|\varkappa\vec{e},s''\rangle\langle\varkappa\vec{e},s''|j_g(0)|\vec{p}s\rangle - \tag{I5}$$

$$-\frac{(2\pi)^6 i}{4}\,\frac{2M^2-\tau}{M^2+\vec{p}^{\,2}}\,\delta(E-E_p)\sum_{s''}\langle\vec{p}'s'|j_g(0)|-\varkappa\vec{e},s''\rangle\langle-\varkappa\vec{e},s''|j_{g'}(0)|\vec{p}s\rangle$$

Ясно теперь, что ST^r и ST^a представляют собой одну и ту же аналитическую функцию $S\widetilde{T}$ (см. (7)), регулярную в области $\mathrm{Im}\,E \neq 0$ с линиями разреза вдоль действительной оси при

$$-\infty < E < E_1 \quad \text{и} \quad E_1 < E < \infty \tag{I6}$$

и полюсами первого порядка в точках E_p и $-E_p$.

Мы можем сформулировать для $S\widetilde{T}$ интегральную теорему Коши. Обозначая степень роста функции ST на бесконечности через n, введем функцию

$$\frac{ST(E,\vec{e};\tau)}{(E-E_0)^{n+1}} \tag{I7}$$

где E_0 – некоторый вещественный параметр, лежащий в интервале $(-E_1,\ E_1)$ и не совпадающий с $\pm E_p$. Выбирая контур интегрирования, как изображено на рис. 5I.I, получим после выполнения предельных переходов $R\to\infty$, $\delta\to 0$ в результате элементарных преобразований

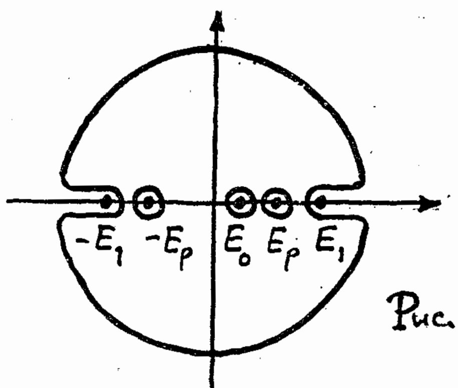


Рис. 51.1

9512

$$S\tilde{T}(E,\vec{e};\tau) = \frac{(E-E_0)^{n+1}}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{ST(E',\vec{e};\tau)\,dE'}{(E'-E_0)^{n+1}(E'-E)} + \sum_{0\le k\le n} C_k(\tau)E^k =$$

$$= \frac{(E-E_0)^{n+1}}{2\pi i}\int_{|E'|>E_1}\frac{ST(E',\vec{e};\tau)\,dE'}{(E'-E_0)^{n+1}(E'-E)} + \frac{(E_0-E)^{n+1}}{(E_0-E_p)^{n+1}}\,\frac{A_{\rho\rho'}(-\varkappa\vec{e},\tau)}{E-E_p}$$

$$-\left(\frac{E_0-E}{E_0+E_p}\right)^{n+1}\frac{A_{\rho'\rho}(\varkappa\vec{e},\tau)}{E+E_p} + \sum_{0\le k\le n} C_k(\tau)E^k \qquad (18)$$

где $C_k(\tau)$ – постоянные, зависящие от τ и

$$A_{\rho'\rho}(\varkappa\vec{e},\tau) = \frac{(2\pi)^5}{4}\,\frac{2M^2-\tau}{M^2+\vec{p}^2}\,S\sum_{s''}\langle\vec{p}',s'|j_{\rho'}(0)|\varkappa\vec{e},s''\rangle\langle\varkappa\vec{e},s'|j_\rho(0)|\vec{p}s\rangle \qquad (19)$$

Напомним, что дисперсионное соотношение (I8) получено нами пока лишь для фиктивной ненаблюдаемой области (3), где $\varkappa^2 > E^2$ и нам нужно еще провести его аналитическое продолжение в точку $\varkappa^2 = E^2-\vec{p}^2-\mu^2$.

Однако, прежде чем приступить к этому, мы рассмотрим более детально структуру коэффициентов (I9), представляющих собой вклад однонуклонного состояния в ST.

2. <u>Структура однонуклонного члена</u>. Для того, чтобы представить выражения (I9) в более простой и наглядной форме, рассмотрим входящий в него типичный матричный элемент тока между двумя однонуклонными состояниями $\langle\vec{p}''s''|j_\rho(0)|\vec{p}s\rangle_E$. Замечая, что в нашем фиктивном случае при любых действительных E

$$\varkappa^2 = E^2 + a \quad , \quad a = -\tau - \vec{p}^2 \qquad \text{и} \qquad \varkappa^2 > 0 ,$$

будем считать, что оба однонуклонных состояния $\langle\vec{p}''s''|$ и $|\vec{p}s\rangle$ обладают действительными импульсами.

В силу трансляционной инвариантности с учетом условий 47.2В и 47.2Е имеем

$$\langle\vec{p}''s''|j_\rho(0)|\vec{p}s\rangle = i\,e^{i(p-p'')x}\langle\vec{p}''s''\left|\frac{\delta S}{\delta\varphi_\rho(x)}\right|\vec{p}s\rangle. \qquad (20)$$

Переходя в правой части от варьирования по $\varphi_\rho(x)$ к варьированию по $\varphi_\rho(q)$, по формуле

$$\frac{\delta}{\delta\varphi_\rho(x)} = \frac{1}{(2\pi)^{5/2}}\int e^{iqx}\frac{\delta}{\delta\varphi_\rho(q)}\,dq ,$$

получаем

$$\delta(q+p-p'')\langle\vec{p}''s''|j_\rho(0)|\vec{p}s\rangle = \frac{i}{(2\pi)^{5/2}}\langle\vec{p}''s''\left|\frac{\delta S}{\delta\varphi_\rho(q)}\right|\vec{p}s\rangle . \qquad (21)$$

Стоящий здесь слева матричный элемент можно преобразовать с помощью условия (47.3В). Коммутируя операторы рождения и уничтожения нуклона не из амплитуд $\langle\vec{p}''s''|$ и $|\vec{p}s\rangle$ с $\dfrac{\delta S}{\delta\varphi(q)}$

§ 5 ?

(с должным учетом антикоммутативности вариационных производных по спинорным полям), получаем последовательно

$$i \langle \vec{p}\,''s'' | \frac{\delta S}{\delta \varphi_\rho(q)} | \vec{p}\,s \rangle =$$

$$= i \sum_{\alpha,\beta} \int dx\,dy \left[a^-_{s''}(\vec{p}\,''), \overline{\psi}_\alpha(y)\right]_+ \left[\psi_\beta(x), \overset{*}{a}{}^+_s(\vec{p})\right]_+ \left\langle \frac{\delta^3 S}{\delta\overline{\psi}_\alpha(y)\,\delta\varphi_\rho(q)\,\delta\psi_\beta(x)} \right\rangle_0 =$$

$$= i \left(\overline{v}^{\,s'',+}(\vec{p}\,'') \left\langle \frac{\delta^3 S}{\delta\overline{\psi}(p'')\,\delta\varphi_\rho(q)\,\delta\psi(p)} \right\rangle_0 v^{s,-}(\vec{p}) \right).$$

Исследуем теперь входящее сюда вакуумное ожидание третьей вариационной производной. Из соображений инвариантности относительно преобразований из расширенной группы Лоренца и преобразований вращения в изотопическом пространстве следует, что

$$\left\langle \frac{\delta^3 S}{\delta\overline{\psi}_\alpha(p'')\,\delta\varphi_\rho(q)\,\delta\psi_\beta(p)} \right\rangle_0 =$$

$$= \delta(p''-q-p) \sum_{\nu,\omega=0,1} \left\{ [\hat{p}'']^\omega \gamma^5 [\hat{p}]^\nu \right\}_{\alpha\beta} h_{\omega\nu}(p''^2, p^2, q^2), \qquad (22)$$

где $h_{\omega\nu}$ - скалярные функции трех скалярных аргументов.

Принимая теперь во внимание, что в (21) входят лишь такие p'' и p, для которых $p''^2 = p^2 = M^2$, и что спинорные функции $\overline{v}$ и v удовлетворяют уравнениям Дирака, получим

$$\langle \vec{p}\,''s'' | j_\rho(0) | \vec{p}\,s \rangle = -\frac{g(\kappa^2)}{(2\pi)^3} \left(\overline{v}^{\,s'',+}(\vec{p}\,'')\, \gamma^5 \tau_\rho\, v^{s,-}(\vec{p}) \right), \qquad (23)$$

где

$$g(\kappa^2) = -\sqrt{2\pi} \sum_{\omega,\nu} M^{\omega+\nu} h_{\omega\nu}(M^2, M^2; \kappa^2), \qquad (24)$$

причем

$$\vec{\kappa} = \vec{p}\,'' - \vec{p} \; ; \quad \kappa^0 = \sqrt{M^2 + \vec{p}\,''^2} - \sqrt{M^2 + \vec{p}^{\,2}}. \qquad (25)$$

Из (23) вытекает, что введенная в (24) функция $g(\kappa^2)$ является

§ 51.2

действительной

$$\overset{*}{g}(\kappa^2) = g(\kappa^2) \,. \tag{26}$$

Вернемся к интересующему нас выражению (20). Образуем входящее в него произведение матричных элементов токов с помощью (23)

$$\sum_{s''} \langle \vec{p}\,' s' \,|\, j_{\rho'}(0) \,|\, \varkappa\vec{e}, s'' \rangle \langle \varkappa\vec{e}, s'' \,|\, j_\rho(0) \,|\, \vec{p}\, s \rangle = \tag{27}$$

$$= \frac{g^2(\kappa^2)}{(2\pi)^6} \sum_{s''} \left(\overline{V}^{s',+}(\vec{p}\,')\gamma^5 \tau_{\rho'} V^{s'',-}(\varkappa\vec{e}) \right) \left(\overline{V}^{s'',+}(\varkappa\vec{e})\gamma^5 \tau_\rho V^{s,-}(\vec{p}) \right),$$

где, в соответствии с (25) и (50.25)

$$\kappa^2 = \left(\sqrt{M^2+\vec{p}\,'^2} - \sqrt{M^2+\varkappa^2}\right)^2 - (\vec{p}\,' - \varkappa\vec{e})^2 =$$

$$= \left(\sqrt{M^2+\varkappa^2} - \sqrt{M^2+\vec{p}^{\,2}}\right)^2 - (\varkappa\vec{e} - \vec{p})^2 = 2M^2 - 2\sqrt{M^2+\vec{p}^{\,2}}\sqrt{M^2+\varkappa^2} \,.$$

Подставляя сюда формулы (2) и (I2)

$$\varkappa^2 = E_p^2 - \vec{p}^{\,2} - \tau = \frac{(2\vec{p}^{\,2}+\tau)^2}{4(M^2+\vec{p}^{\,2})} - \vec{p}^{\,2} - \tau \,,$$

получаем после несложной выкладки

$$\kappa^2 = \tau \,. \tag{28}$$

Суммирование свелось здесь к суммированию по спиновому и изотопическому индексам нуклона. Используя формулу суммирования по спиновому индексу из § 7.2

$$\sum_\sigma V^{\sigma,-}_{t',\alpha}(\vec{k})\, \overline{V}^{\sigma,+}_{t,\beta}(\vec{k}) = \frac{(\hat{k}+M)_{\alpha\beta}}{2k^0}\, \delta_{t't} \tag{29}$$

(Здесь α, β - обычные четырехзначные дираковские индексы, а t', t - двузначные изотопические индексы)

получаем окончательно, подставляя (27) в (20) и свертывая матрицы γ^ν :

$$A_{p'p}(\varkappa\vec{e},\tau) = \frac{g^2(\tau)}{4\pi}\,\frac{2M^2-\tau}{2(M^2+\vec{p}^2)}\left(\bar{v}^{s',+}(\vec{p})\,\tau_{p'}\tau_p\, S\,\frac{\hat{\varkappa}-M}{2\varkappa^0}\, v^{s,-}(\vec{p})\right) =$$

$$= \frac{g^2(\tau)}{4\pi}\;\frac{\left(\bar{v}^{s',+}(\vec{p}')\,\tau_{p'}\tau_p\, S\,(\hat{\varkappa}-M)\, v^{s,-}(\vec{p})\right)}{2\sqrt{M^2+\vec{p}^2}} \tag{30}$$

причем

$$\varkappa^0 = \sqrt{\varkappa^2+M^2} = \frac{2M^2-\tau}{2\sqrt{M^2+\vec{p}^2}} \quad \text{и} \quad \vec{\varkappa} = \varkappa\vec{e}. \tag{31}$$

<u>3. Вспомогательная теорема</u>. Мы вывели выше (формула (20)) соотношение, из которого может быть получено дисперсионное соотношение. Однако оно было получено для фиктивного случая $\tau < -\vec{p}^{\,2}$ и нам нужно еще совершить переход к реальному случаю $\tau = \mu^2$, что мы выполним методом аналитического продолжения по вспомогательной переменной τ .

Заметим теперь, что выше в § 50.3 при выводе дисперсионных соотношений для рассеяния вперед фактически были использованы лишь общие свойства опережения, запаздывания и равенства друг другу в некоторой области импульсных представлений функции F^{ret} и F^{adv}

Рассуждения, которые будут проведены ниже, также будут заключаться в анализе общих свойств матричных элементов типа F^{ret} и F^{adv}, однако они будут существенно усложнены из-за необходимости учета лишней переменной $\vec{p} = -\vec{p}'$.

Чтобы осуществить аналитическое продолжение полученных соотношений вплоть до значения $\tau = \mu^2$, нам придется получить более детальную информацию о поведении функции ST , в частности, относительно характера ее зависимости от нуклонного импульса $\vec{p}$. С этой целью рассмотрим выражение

$$\langle p's' | j_{p'}(x)\, j_p(y) - j_p(y)\, j_{p'}(x) | \vec{p}\, s\rangle = \frac{1}{2\pi^2 i}\, e^{i\frac{p'-p}{2}(x+y)} F_{\alpha\omega}(x-y), \tag{32}$$

которое, в соответствии с (50.8-II) равно разности запаздывающего и опережающего матричных элементов.

Переходя в импульсное представление по формуле типа (50.I2), получаем

$$\delta(p'-p+p_3+p_4)\; T_{\alpha\omega}\left(\frac{p'-p}{2}+p_3\right) =$$

$$= \frac{\pi i}{(2\pi)^3}\int \langle \vec{p}'s' | j_{p'}(x)\, j_p(y) - j_p(y)\, j_{p'}(x) | \vec{p}s\rangle\, e^{i(p_3x+p_4y)}\, dx\, dy. \tag{33}$$

Выразим теперь входящий в правую часть матричный элемент между однонуклонными состояниями через вакуумные средние с помощью свойства 47.3В, т.е. выполняя коммутации операторов рождения и уничтожения нуклона из $\langle \vec{p}' s' |$ и $| \vec{p} s \rangle$ с $j(x)$ и $j(y)$ с помощью формул типа (47.I4), получаем этим путем

$$\delta(p'-p+p_3+p_4)\, T_{\alpha\omega}\left(\frac{p'-p}{2}+p_3\right)=$$

$$=\frac{\pi i}{(2\pi)^6}\, \overline{V}^{s',+}(\vec{p}')\int e^{i(p'x_1-px_2+p_3x_3+p_4x_4)}\cdot \tag{34}$$

$$\cdot\left\langle \frac{\delta^2}{\delta\overline{\psi}(x_1)\,\delta\psi(x_2)}\left[j_{\rho'}(x_3),\, j_{\rho}(x_4)\right]_- \right\rangle_0 V^{s,-}(\vec{p})\, dx_1\, dx_2\, dx_3\, dx_4 .$$

Воспользовавшись теперь свойством трансляционной инвариантности подинтегрального выражения, можем записать

$$T_{\alpha\omega}(q)=\frac{\pi i}{(2\pi)^6}\, \overline{V}^{s',+}(\vec{p}')\, \widetilde{D}(p',-p,p_3,p_4)\, V^{s,-}(\vec{p}) ; \tag{35}$$

$$\delta(p_1+p_2+p_3+p_4)\, \widetilde{D}(p_1,\dots,p_4)=\int D(x_1,x_2,x_3,x_4)\, e^{i(p_1x_1+\dots+p_4x_4)}\, dx_1\dots dx_4 \tag{36}$$

$$D(x_1,\dots,x_4)=\left\langle \frac{\delta^2}{\delta\overline{\psi}(x_1)\,\delta\psi(x_2)}\left[j_{\rho'}(x_3)\, j_{\rho}(x_4)\right]_- \right\rangle_0 \tag{37}$$

и

$$q=\frac{p'-p}{2}+p_3 \quad ; \quad p'-p+p_3+p_4=0 . \tag{38}$$

Ясно также, что в интересующем нас случае

$$T(E,\vec{e};\tau)=\frac{\pi i}{(2\pi)^6}\, \overline{V}^{s',+}(\vec{p}')\, \widetilde{D}(p',-p,p_3,p_4)\, V^{s,-}(\vec{p}) \tag{39}$$

где в соответствии с (50.22)

$$\vec{p}+\vec{p}'=0 \quad ; \quad p'^0=p^0=\sqrt{M^2+\vec{p}^2} \quad ; \quad p_3^0+p_4^0=0 ; \tag{40}$$

$$\vec{p}_3=\vec{p}+\varkappa\vec{e} \quad ; \quad \vec{p}_4=\vec{p}-\varkappa\vec{e} \quad ; \quad \varkappa^2=E^2-\vec{p}^2-\tau . \tag{41}$$

§31, 3

Воспользуемся теперь следующей теоремой[ж]:

Пусть будут даны четыре группы трансляционно-инвариантных обобщенных функций

$$D_{ij}^{(\alpha)}(x_1,\dots,x_4) \qquad (\alpha=1,2,3,4;\ i,j=a,r), \tag{42}$$

преобразующихся по линейным конечномерным представлениям группы Лоренца и обладающих свойствами

$$\begin{aligned}
&D_{rr}^{(\alpha)}(x_1,\dots,x_4)=0 \quad \text{при} \quad x_1 \lesssim x_3 \quad \text{или} \quad x_2 \lesssim x_4;\\
&D_{ra}^{(\alpha)}(x_1,\dots,x_4)=0 \quad \text{при} \quad x_1 \lesssim x_3 \quad \text{или} \quad x_2 \gtrsim x_4;\\
&D_{ar}^{(\alpha)}(x_1,\dots,x_4)=0 \quad \text{при} \quad x_1 \gtrsim x_3 \quad \text{или} \quad x_2 \lesssim x_4;\\
&D_{aa}^{(\alpha)}(x_1,\dots,x_4)=0 \quad \text{при} \quad x_1 \gtrsim x_3 \quad \text{или} \quad x_2 \gtrsim x_4;
\end{aligned} \tag{43}$$

Пусть кроме того, эти функции удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned}
&\widetilde{D}_{rj}^{(\alpha)}(p_1,\dots,p_4)-\widetilde{D}_{aj}^{(\alpha)}(p_1,\dots,p_4)=0\\
&\qquad \text{при} \quad p_1^2<(M+\mu)^2 \qquad p_3^2<(3\mu)^2;\\
&\widetilde{D}_{ir}^{(\alpha)}(p_1,\dots,p_4)-\widetilde{D}_{ia}^{(\alpha)}(p_1,\dots,p_4)=0\\
&\qquad \text{при} \quad p_2^2<(M+\mu)^2 \qquad p_4^2<(3\mu)^2;
\end{aligned} \tag{44}$$

и
$$\left[(p_1+p_3)^2-M^2\right]\widetilde{D}_{ij}^{(\alpha)}(p_1,\dots,p_4)=0, \tag{45}$$
если $\quad (p_1+p_3)^2<(M+\mu)^2 \quad$ или $\quad p_1^0+p_3^0<0.$

Тогда можно построить обобщенные функции $\Phi_\omega(z_1,\dots,z_5;z_6)$ вещественной переменной z_6, являющиеся аналитическими функциями комплексных переменных $z_1,\dots,z_5$, со свойствами:

I. Функции Φ_ω регулярны в области

$$\begin{aligned}
&|z_1-M^2|<\rho\mu^2;\ |z_2-M^2|<\rho\mu^2;\ |z_3-\tau^*|<\rho\mu^2;\\
&|z_4-\tau^*|<\rho\mu^2;\ -4\frac{M}{M+\mu}\mu^2<\mathrm{Re}\, z_5\le 0;\ |\mathrm{Im}\, z_5|\le\rho\mu^2\frac{M^2}{|z_6|}
\end{aligned} \tag{46}$$

где ρ - достаточно малое положительное число, а вещественное τ^* удовлетворяет неравенствам:

$$-V\le\tau^*\le\mu^2 \tag{47}$$

[ж] Доказательство теоремы содержится в Математическом Дополнении.

$\mathcal{S}^5$ 51.3

где V - некоторое положительное произвольное, но фиксированное число.

2. Функции

$$\Phi_\omega\ (z_1,\ldots,z_5;\ z_6)=0\ ,\qquad\qquad \text{если } z_6<(M+\mu)^2;\tag{48}$$

3. Для вещественных $p_1,\ldots,p_4$, таких что

$$p_1+p_2+p_3+p_4=0\ ,$$

а величины

$$\left.\begin{aligned} &z_1=p_1^2\ ;\quad z_2=p_2^2\ ;\quad z_3=p_3^2\ ;\quad z_4=p_4^2\ ;\\ &z_5=(p_1+p_2)^2\ ;\quad z_6=(p_1+p_3)^2 \end{aligned}\right.\tag{49}$$

удовлетворяют неравенствам (46), функции $\widetilde{F}_{ij}^{(\nu)}$ можно представить в виде суммы

$$\left.\begin{aligned} &\widetilde{F}_{ij}^{(\nu)}(p_1,\ldots,p_4)=\sum_\omega p_{i_1}^{\alpha_1}\ldots p_{i_s}^{\alpha_s}\ \Phi\,(z_1,\ldots,z_5;\ z_6)\ ,\\ &\text{если}\\ &p_2^0+p_3^0>0 \end{aligned}\right\}\tag{49a}$$

с конечным числом членов.

Для применения теоремы убедимся предварительно, что рассматриваемые нами функции (37) и (39) могут быть представлены в виде линейной комбинации функций, удовлетворяющих условиям теоремы (43)-(45).

Выполняя в (39) функциональное дифференцирование по спинорным полям, найдем

$$\mathcal{D}(x_1,x_2,x_3,x_4)=(1-P_{\rho\rho'}P_{34})\,d(x_1,x_2,x_3,x_4)\ ,\tag{50}$$

где

$$d(x_1,x_2,x_3,x_4)=\left\langle\frac{\delta^2}{\delta\bar\psi(x_1)\delta\psi(x_2)}\ j_{\rho'}(x_3)j_\rho(x_4)\right\rangle_0=$$

$$=\sum_{1\le i\le 4} d^i(x_1,x_2,x_3,x_4)\ ,$$

причем

$$\begin{aligned} &d^1(x_1,x_2,x_3,x_4)=\left\langle\frac{\delta j_{\rho'}(x_3)}{\delta\bar\psi(x_1)}\ \frac{\delta j_\rho(x_4)}{\delta\psi(x_2)}\right\rangle_0;\\ &d^2(x_1,x_2,x_3,x_4)=-\left\langle\frac{\delta j_{\rho'}(x_3)}{\delta\psi(x_2)}\ \frac{\delta j_\rho(x_4)}{\delta\bar\psi(x_1)}\right\rangle_0;\\ &d^3(x_1,x_2,x_3,x_4)=\left\langle\left\{\frac{\delta^2}{\delta\bar\psi(x_1)\delta\psi(x_2)}\ j_{\rho'}(x_3)\right\}j_\rho(x_4)\right\rangle_0;\\ &d^4(x_1,x_2,x_3,x_4)=\left\langle j_{\rho'}(x_3)\left\{\frac{\delta^2}{\delta\bar\psi(x_1)\delta\psi(x_2)}\ j_\rho(x_4)\right\}\right\rangle_0. \end{aligned}\tag{51}$$

Рассмотрим выражение d^3. Применяя к нему условие полноты (47.2Г), имеем

$$d^3(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left\langle \frac{\delta^2 j_{\rho'}(x_3)}{\delta\bar\psi(x_1)\delta\psi(x_2)} \right\rangle_0 \langle j_\rho(x_4)\rangle_0 +$$

$$+ \sum_n \int d\vec{k} \left\langle 0 \left| \frac{\delta^2 j_{\rho'}(x_3)}{\delta\bar\psi(x_1)\delta\psi(x_2)} \right| n,\vec{k} \right\rangle \langle n,\vec{k} | j_\rho(x_4) | 0 \rangle . \qquad (52)$$

Как уже отмечалось ранее (§ 48.3), вакуумное ожидание тока и матричный элемент тока между вакуумом и одномезонными и двухмезонными состояниями равен нулю,

$$\langle j_\rho(x)\rangle_0 = \langle n,\vec{k} | j_\rho(x) | 0\rangle = 0 ,$$

тогда как для

$$E_n^2(\vec{k}) - \vec{k}^2 \geqslant (3\mu)^2 .$$

на основании 47.2В и 47.2Е имеем

$$\langle n,\vec{k} | j_\rho(x_4) | 0 \rangle = \langle n,k | j_\rho(0) | 0 \rangle e^{i(E_n(\vec{k})x_4^0 - \vec{k}\vec{x}_4)} \qquad (53)$$

Таким образом, функция d^3, рассматриваемая как функция от x_4, представляется суперпозицией экспонент $exp\,(ip_4x_4)$ с p_4 ограниченными условиями

$$p_4^2 \geqslant (3\mu)^2 \qquad и \qquad p_4^0 > 0$$

Поэтому

$$\tilde{d}^3(p_1, p_2, p_3, p_4) = 0 \qquad если \qquad p_4^2 < (3\mu)^2 \qquad (54)$$

Совершенно аналогично найдем, что

$$\tilde{d}_4(p_1, p_2, p_3, p_4) = 0 , \qquad если \qquad p_3^2 < (3\mu)^2 . \qquad (55)$$

Замечая еще, что на основании условия причинности

$$d^1(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0 , \qquad если \quad x_1 \lesssim x_3 \quad или \quad x_2 \lesssim x_4 , \qquad (56)$$

а также $0 = d^2(x_1, x_2, x_3, x_4)$, если $x_2 \lesssim x_3$ или $x_1 \lesssim x_4$, (57)

убеждаемся с учетом (49), (50), (54) и (55), что функция $\tilde{\mathcal{D}}$ удовлетворяет условию (42).

Перейдем теперь к построению функций (43) и условиям (44), (45).

Ясно, во-первых, что на основании (56) функция d^1, определенная в (51), может быть обозначена через d^1_{22} в смысле (43).

§51.3

Введем затем выражения

$$d^1_{a2}(x_1,x_2,x_3,x_4) = \left\langle \frac{\delta\eta(x_1)}{\delta\varphi_{\rho'}(x_3)}\ \frac{\delta j_\rho(x_4)}{\delta\psi(x_2)} \right\rangle_0 ;$$

$$d^1_{2a}(x_1,x_2,x_3,x_4) = \left\langle \frac{\delta j_{\rho'}(x_3)}{\delta\bar\psi(x_1)}\ \frac{\delta\bar\eta(x_2)}{\delta\varphi_\rho(x_4)} \right\rangle_0 ; \qquad (58)$$

$$d^1_{aa}(x_1,x_2,x_3,x_4) = \left\langle \frac{\delta\eta(x_1)}{\delta\varphi_{\rho'}(x_3)}\ \frac{\delta\bar\eta(x_2)}{\varphi_\rho(x_4)} \right\rangle_0 ;$$

где

$$\eta(x_1) = i\,\frac{\delta S}{\delta\bar\psi(x_1)}\,S^+ \quad ; \quad \bar\eta(x_2) = i\,\frac{\delta S}{\delta\psi(x_2)}\,S^+ ,$$

обладающие свойством трансляционной инвариантности и преобразующиеся по спинорным представлениям группы Лоренца. В соответствии с требованиями причинности (47.2Б) эти выражения будут также удовлетворять условиям (43). Покажем, что эти функции будут также удовлетворять условиям (44). В качестве исходного пункта доказательства возьмем тождества

$$\frac{\delta j(x_3)}{\delta\bar\psi(x_1)} - \frac{\delta\eta(x_1)}{\delta\varphi(x_3)} \equiv i\left[j(x_3),\eta(x_1)\right] ; \qquad (59)$$

$$\frac{\delta j(x_4)}{\delta\psi(x_2)} - \frac{\delta\bar\eta(x_2)}{\delta\varphi(x_4)} \equiv i\left[j(x_4),\eta(x_2)\right] \qquad (60)$$

Образуя разность $d^{(1)}_{22} - d^{(1)}_{a2}$ с учетом (59), получим

$$d^1_{22}(x_1,x_2,x_3,x_4) - d^1_{a2}(x_1,x_2,x_3,x_4) =$$

$$= i\left\langle j(x_3)\eta(x_1)\,\frac{\delta j_\rho(x_4)}{\delta\psi(x_2)}\right\rangle_0 - i\left\langle \eta(x_1)j(x_3)\,\frac{\delta j_\rho(x_4)}{\delta\psi(x_2)}\right\rangle_0$$

Воспользовавшись здесь для первого члена условием полноты (47.2Г), найдем, что его Фурье-образ обращается в нуль при

$$p_3^2 < (3\mu)^2 .$$

Аналогичным путем убеждаемся, что Фурье-образ второго члена равен нулю при

$$p_1^2 < (M+\mu)^2 .$$

Тем самым мы получили первое из условий (44). Таким же путем не составляет труда проверить остальные условия (44) для функций d^1_{ij}.

§ 51. 3

Перейдем, наконец, к последнему условию (45). Имеем для d^{1}_{ij} :

$$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial x_3}\right)^2+M^2\right\} d^{1}_{22}(x_1,x_2,x_3,x_4)=$$

$$=\sum_n \int d\vec{k}\, \langle 0|A(x_1,x_3)|n,\vec{k}\rangle\langle n,\vec{k}\,|B(x_2,x_4)|0\rangle\ , \qquad (6I)$$

где

$$A(x_1,x_3)=\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial x_3}\right)^2+M^2\right\}C(x_1,x_3)\ ;$$

$$B(x_2,x_4)=\frac{\delta j(x_4)}{\delta\psi(x_2)}\quad ;\quad C(x_1,x_3)=\frac{\delta j(x_3)}{\delta\bar{\psi}(x_1)}$$

Но, в соответствии со свойством трансляционной инвариантности

$$\langle n,\vec{k}\,|B(x_2,x_4)|0\rangle=\langle n,\vec{k}\,|B(0,x_4-x_2)|0\rangle\, e^{i\{E_n(\vec{k})x_2^0-\vec{k}\vec{x}_2\}}\ ; \qquad (62)$$

$$\langle 0|C(x_1,x_3)|n,\vec{k}\rangle=\langle 0|C(x_1-x_3,0)|n,\vec{k}\rangle\, e^{-i\{E_n(\vec{k})x_3^0-\vec{k}\vec{x}_3\}} \qquad (63)$$

С другой стороны, выражение

$$\langle n,\vec{k}\,|B(x_2,x_4)|0\rangle=\langle n,\vec{k}\,|\frac{\delta j(x_4)}{\delta\psi(x_2)}|0\rangle$$

равно нулю для безнуклонных состояний из-за закона сохранения нуклонного заряда. Что же касается состояния с одним нуклоном, для которого

$$E_n^2(\vec{k})-\vec{k}^2=M^2,$$

то его вклад аннулируется дифференциальным оператором, входящим в $A(x_1,x_3)$ вследствие чего

$$\langle 0|A(x_1,x_3)|n,\vec{k}\rangle=0$$

для безнуклонных и однонуклонного состояний.

Вследствие этого сумма в правой части (6I) распространена по состояниям, для которых

$$E_n^2(\vec{k})-\vec{k}^2\geqslant(M+\mu)^2 \qquad (64)$$

Из (62) и (63) и (64) вытекает, что функция, стоящая в левой части (6I) представляется суперпозицией экспонент

$$e^{i\{q_1(x_1-x_3)+q_2(x_4-x_2)+\kappa(x_2-x_3)\}}$$

таких, что

$$\kappa^2\geqslant(M+\mu)^2\ ,\quad \kappa^0>0\ .$$

Вводя в соответствии с (38) обозначения $\S 51.4$

$$p_1 = -q_1 \; ; \; p_2 = q_2 - k \; ; \; p_3 = q_1 + k \; ; \; p_4 = -q_2 \; ,$$

убеждаемся, что

$$(p_1+p_3)^2 = k^2 \geq (M+\mu)^2 \quad \text{и} \quad p_1^0 + p_3^0 > 0 .$$

Отсюда вытекает, что Фурье-образ левой части (6I) обращается в нуль, когда

$$(p_1+p_3)^2 < (M+\mu)^2 \quad \text{или} \quad p_1^0 + p_3^0 < 0 \, ,$$

вследствие чего функция d^1_{22} удовлетворяет условию (45). Совершенно таким же путем проверяются условия (45) для функций d^1_{2a}, d^1_{a2}, d^1_{aa}.

Ясно также, что условия (43)-(45) без труда переносятся и на функции d^2_{ij}, отличающиеся от d^1_{ij} перестановкой операторов $\frac{\delta}{\delta\bar{\varphi}(x_1)}$ и $\frac{\delta}{\delta\varphi(x_2)}$.

4. Специальное представление функции ST. Покажем теперь, что, установив соответствие между формулами (49) и (40), (4I), на основании теоремы можно получить для функции ST специальное представление в области

$$|E| < E_1 \tag{64a}$$

(С помощью этого представления мы выполним затем аналитическое продолжение дисперсионного соотношения (I8) в точку $\tau = \mu^2$).

С этой целью подставим для переменных $p_1, \dots, p_4$ интересующие нас значения (40), (4I). Получим тогда:

$$p_1^2 = p'^2 = M^2 \, ; \; p_2^2 = p^2 = M^2 \, ; \; p_3^2 = q'^2 = \tau = \tau^* ; \; p_4^2 = q^2 = \tau = \tau^* ;$$

$$(p_1+p_2)^2 = (p'-p)^2 = -4\vec{p}^2 \, ; \; (p_2+p_3)^2 = (p'+q')^2 = \tau + 2E\sqrt{M^2+\vec{p}^2} + M^2 + 2\vec{p}^2 ; \tag{65}$$

$$(p_1^0 + p_3^0) = \sqrt{M^2+\vec{p}^2} + E \, ;$$

$$(p_1+p_4)^2 = (p'-q)^2 = \tau - 2E\sqrt{M^2+\vec{p}^2} + M^2 + 2\vec{p}^2 \, ;$$

$$(p_1^0 + p_4^0) = p'^0 - q^0 = \sqrt{M^2+\vec{p}^2} - E .$$

Остановимся сперва на фигурирующих в (45) неравенствах. Подставляя в них значения (65), получаем с учетом (I4)

$$E < E_1(\tau) \quad \text{вместо} \quad (p_1+p_3)^2 < (M+\mu)^2 ; \tag{66}$$

$$E < -\sqrt{M^2+\vec{p}^2} \quad \text{вместо} \quad p_1^0 + p_3^0 < 0 .$$

§ 51. 4

и

$$E > -E_1(\tau) \quad \text{вместо} \quad (p_1+p_4)^2 < (M+\mu)^2;$$
$$E > \sqrt{M^2+\vec{p}^2} \quad \text{вместо} \quad p_1^0+p_4^0 < 0. \qquad (67)$$

Учитывая это обстоятельство и используя (65), приходим к следующему представлению для Фурье-образа $\tilde{\mathfrak{I}}(p_1,\dots,p_4)$ функции $D(x_1,\dots,x_4)$:

$$\tilde{D}(p_1,\dots,p_4) =$$
$$=\sum_\omega P_\omega \Phi_\omega\left(M^2,M^2,\tau,\tau,-4\vec{p}^2;\tau+2E\sqrt{M^2+\vec{p}^2}+M^2+2\vec{p}^2\right)+ \qquad (68)$$
$$+\sum_\omega P'_\omega \Phi'_\omega\left(M^2,M^2,\tau,\tau,-4\vec{p}^2;\tau-2E\sqrt{M^2+\vec{p}^2}+M^2+2\vec{p}^2\right),$$

причем

$$\Phi_\omega(\dots)=0 \quad \text{для} \quad E<E_1(\tau);$$
$$\Phi'_\omega(\dots)=0 \quad \text{для} \quad E>E_1(\tau), \qquad (69)$$

а P_ω и P'_ω – полиномы относительно компонент импульсов. Представление (68) в соответствии с (46) и (47) справедливо, если

$$-V \leq \tau \leq (1+\rho)\mu^2\ ;\ (Im\,\tau=0) \quad \text{и} \quad \vec{p}^2 < \frac{M}{M+\mu}\mu^2. \qquad (70)$$

Входящие в (68) Φ_ω и Φ'_ω суть аналитические функции первых пяти аргументов, регулярные в области

$$\vec{p}^2 < \frac{M}{M+\mu}\mu^2\ ;\ -V \leq Re\,\tau \leq (1+\rho)\mu^2;\ |Im\,\tau| < \rho\mu^2 \qquad (71)$$

и обобщенные функции шестого аргумента.

Заметим теперь, что совокупность условий (69) приводит к тому, что функция $D(p_1,\dots,p_4)$ обращается в нуль в области (64а). Ввиду этого функция ST, получаемая операцией S[ж] из выражения (39), при выполнении условий (70) в области (64а) обладает специальным представлением

$$ST(E,\tau) = F_1\left(2E\sqrt{M^2+\vec{p}^2}+\tau;\tau\right)+F_2\left(-2E\sqrt{M^2+\vec{p}^2}+\tau;\tau\right), \qquad (72)$$

где $F_i(\xi,\tau)$ – аналитические функции переменной τ в области (71) и обобщенные функции вещественной переменной ξ, обладающие свойством

$$F_i(\xi,\tau)=0 \quad \text{для} \quad \xi < 2M\mu+\mu^2-2\vec{p}^2 \qquad (73)$$

ж Операция S понадобилась здесь потому, что полиномы P_ω и P'_ω могут содержать первую степень ξ, не аналитически зависящую от τ.

и отличающиеся от слагаемых формулы (68) спинорными обкладками и множителем $\frac{\pi i}{(2\pi)^6}\int$.

5. Аналитическое продолжение к $\tau=\mu^2$. Таким образом, проверка условий теоремы закончена и мы можем перейти к доказательству того, что из представления (72) следует справедливость соотношения (I8) для интересующего нас значения

$$\tau=\mu^2 ,$$

если только $\vec{p}^2$ достаточно мало и удовлетворяет условию (7I).

Чтобы доказать последнее утверждение, выберем сперва отрицательное τ , удовлетворяющее условию (3). Для таких τ справедливо и установленное соотношение (I8) и (согласно теореме) представление (72).

Подставляя (72) в (I8), имеем:

$$S\tilde{T}(E,\vec{e};\tau)=\Phi_1(E,\tau)+\Phi_2(E,\tau)+$$
$$+\left(\frac{E_0-E}{E_0-E_p}\right)^{n+1}\frac{A_{pp'}(-\varkappa\vec{e},\tau)}{E-E_p}-\left(\frac{E_0-E}{E_0+E_p}\right)^{n+1}\frac{A_{p'p}(\varkappa\vec{e},\tau)}{E+E_p}+ \qquad (73)$$
$$+\sum_{0\le k\le n}c_k(\tau)\,E^k ,$$

где

$$\Phi_{1,2}(E,\tau)=$$
$$=\frac{(E-E_0)^{n+1}}{2\pi i}\int\frac{F_{1,2}\left(2E'\sqrt{M^2+\vec{p}^2};\tau\right)dE'}{\left(\pm E'\mp\frac{\tau}{2\sqrt{M^2+\vec{p}^2}}-E_0\right)^{n+1}\left(\pm E'\mp\frac{\tau}{2\sqrt{M^2+\vec{p}^2}}-E\right)} . \qquad (74)$$

Возьмем произвольное E_0 из интервала

$$|E_0|<\frac{M\mu-(\rho+2\sigma)\mu^2}{\sqrt{M^2+\vec{p}^2}} \qquad (75)$$

Тогда, в соответствии со свойствами (73) функций F_1 и F_2 и условиями (7I), видим, что формулы (74) будут определять аналитические функции переменных E , τ в области, ограниченной условиями (7I) и неравенством

$$|Im\,\tau|<2\sqrt{M^2+\vec{p}^2}\,|Im\,E| .$$

С другой стороны, как было установлено ранее, функция $S\tilde{T}(E,\tau)$ аналитична в области (6). Поэтому аналитическая функция

$$\left\{S\tilde{T}(E,\tau)-\Phi_1(E,\tau)-\Phi_2(E,\tau)\right\}\left\{E^2-E_p^2(\tau)\right\} \qquad (76)$$

3510

будет аналитична в области аргументов, определенной совокупностью условий

$$\mathrm{Re}\,\tau < (1+\rho)\mu^2 \quad , \; |\mathrm{Im}\,\tau| < \rho\mu^2$$

$$\mathrm{Im}\,\tau < 2\sqrt{M^2+\vec{p}^{\,2}}\;|\mathrm{Im}\,E| \; , \; |\mathrm{Im}\,E| > \left|\mathrm{Im}\sqrt{E^2-\vec{p}^{\,2}-\tau}\right| \tag{77}$$

Однако в силу (73) функция (76) должна совпадать с полиномом по E

$$\left(\frac{E_0-E}{E_0-E_p}\right)^{n+1}(E+E_p)\,A_{pp'}(\tau,-\vec{e}) - \left(\frac{E_0-E}{E_0+E_p}\right)^{n+1}(E-E_p)\,A_{p'p}(\tau,e) +$$

$$+\,(E^2-E_p^2(\tau))\sum_{0\le k\le n} C_k(\tau)E^k \tag{78}$$

в области отрицательных τ , ограниченных условием (3). Поэтому ее (n+3)-ая производная по E , являющаяся аналитической функцией в области (77), равна нулю в области (3). По теореме об единственности аналитических функций заключаем, что (n +3)-я производная по E от функции (76) равна нулю во всей области (77). Отсюда следует, что сама функция (76) является полиномом по E степени n +I в области (77). Принимая во внимание, что функция $E_p(\tau)$ согласно своему определению (I2) является аналитической функцией в рассматриваемой области, получаем отсюда, что функции $C_k(\tau)$ и $A_{pp'}(\tau)$ должны допускать аналитическое расширение на область (77).

Докажем сейчас, что $C_k(\tau)$ и $A_{pp'}(\tau)$ являются аналитическими функциями в более широкой области (7I). Возьмем для этого какое-либо значение $\tau=\tau^*$ из области (7I), не лежащее на вещественной оси $(\mathrm{Im}\,\tau^*=0)$, и построим соответствующее E^*, положив

$$E^* = E_r + iE_i \; ,$$

где

$$2E_rE_i = \mathrm{Im}\,\tau^* \; , \; E_r < M \; , \; E_r^2 - E_i^2 - \mathrm{Re}\,\tau^* - \vec{p}^{\,2} > 0$$

Ясно, что "точка" (E^*,τ^*) принадлежит к области (77), ввиду чего τ^* должна входить в область аналитичности функций $C_k(\tau)$ и $A(\tau)$. Отсюда следует, что эти функции аналитичны в области (48) с возможной линией разреза, лежащей на вещественной оси (при $\mathrm{Im}\,\tau$=0).

Покажем теперь, что такой линии разреза на самом деле нет и что указанные функции регулярны во всей области (7I). Рассмотрим для этой цели вещественное

$$\tau_r < (1+\rho)\mu^2$$

и построим точки (E_+,τ_+) и (E_-,τ_-) :

$$\tau_\pm = \tau_r \pm ih \qquad (h>0),$$
$$E_\pm = E_r \pm \frac{ih}{2E_r} \qquad (E_r>0),$$
$$\rho^2 + (1+\rho)\mu^2 < E_r^2 < M^2$$

При достаточно малых $h<\rho\mu^2$ точки (E_+,τ_+) и (E_-,τ_-) будут удовлетворять условиям (77).

Заметим теперь, что на основании (74) имеют место предельные соотношения

$$\lim_{h\to 0} \Phi_i(E_\pm,\tau_\pm) = \lim_{\varepsilon\to 0} \Phi_i(E_r \pm i\varepsilon, \tau_r) \tag{79}$$

так как точки $(E_r \pm i\varepsilon, \tau_r)$ наравне с точками $(E_\pm,\tau_\pm)$ удовлетворяют условиям

$$Re\,\tau < (1+\rho)\mu^2, \quad |Im\,\tau| < \rho\mu^2$$
$$Im\,\tau < 2\sqrt{M^2+\vec{p}^{\,2}}\;|Im\,E| \tag{80}$$

ограничивающим область, в которой формулы (74) определяют аналитические функции Φ_1 и Φ_2.

Совершая затем в (74) переход к действительным E с помощью формулы (46.3), получаем*

$$\Phi_1(E_+,\tau_+) - \Phi_1(E_-,\tau_-) \to F_1(\tau + 2E\sqrt{M^2+\vec{p}^{\,2}}),$$
$$\Phi_2(E_+,\tau_+) - \Phi_2(E_-,\tau_-) \to F_2(\tau - 2E\sqrt{M^2+\vec{p}^{\,2}}).$$

С учетом (72) это дает

$$\Phi_1(E_+,\tau_+) + \Phi_2(E_+,\tau_+) - \Phi_1(E_-,\tau_-) - \Phi_2(E_-,\tau_-) \to$$
$$\to ST(E_r,\vec{e},\tau^r) \tag{81}$$

С другой стороны на основании (4) и (7)

$$S\widetilde{T}(E_+,\tau_+) =$$
$$= \int e^{-\frac{hx^0}{2E_r}} F^{ret}(x)\, S \exp i\left[E_r x^0 - \vec{e}\vec{x}\sqrt{E_r^2 - \tau_r - \vec{p}^{\,2} - (h/2E_r)^2}\right] dx$$

* При прямом использовании формулы (46.3) под интегралом в (74) возникает произведение двух обобщенных функций. Однако более детальное рассмотрение показывает, что введя "свертку" этих обобщенных функций, можно обосновать законность этой выкладки.

и потому

$$S\widetilde{T}(E_+,\tau_+) \to ST^{r}(E_r,\tau_r) \tag{82}$$

Совершенно аналогично устанавливаем, что

$$S\widetilde{T}(E_-,\tau_-) \to ST^{a}(E_r,\tau_r) \tag{83}$$

Комбинируя (73), (74) и (75), находим

$$\begin{aligned} &\lim\left\{\overset{\circ}{S}\widetilde{T}(E_+,\tau_+) - \Phi_1(E_+,\tau_+) - \Phi_2(E_+,\tau_+)\right\} = \\ &= \lim\left\{S\widetilde{T}(E_-,\tau_-) - \Phi_1(E_-,\tau_-) - \Phi_2(E_-,\tau_-)\right\} \end{aligned} \tag{84}$$

Но так как для точек $(E_\pm,\tau_\pm)$ функция (76) равна полиному (78), то предельное соотношение типа (84) будет иметь место и для полинома (78). Отсюда вытекает, что выражения $A(\tau_r+i\eta)$, $C_\kappa(\tau_r+i\eta)$ стремятся к тем же пределам, что и $A(\tau_r-i\eta)$, $C_\kappa(\tau_r-i\eta)$, ввиду чего $A(\tau)$ и $C_\kappa(\tau)$ не обладают линиями разреза и регулярны во всей области (7I)*.

Установив это, возвратимся к соотношению (73), которое, как мы теперь видим, имеет место для точек (E,τ) области (77). Но аналитическая функци переменных E и τ, стоящая в правой части (73), регулярна в более широкой области (80). Ввиду этого мы получаем возможность аналитически продолжить функцию $S\widetilde{T}(E,\tau)$, так чтобы она равнялась правой части (73) во всей области (80).

Подчеркнем, что для расширенной указанным образом аналитической функции $S\widetilde{T}$ имеют место обычные соотношения с несобственными пределами

$$S\widetilde{T}(E+i\varepsilon,\tau) \to ST^{r}(E,\tau) \tag{85}$$

$$S\widetilde{T}(E-i\varepsilon,\tau) \to ST^{a}(E,\tau) \tag{86}$$

если только E, τ и $\lambda=\sqrt{E^2-\vec{p}^2-\tau}$ вещественны и

$$\tau < (1+\rho)\mu^2$$

---

* Отсюда в частности вытекает, что функция $g^2(\tau)$ может быть аналитически продолжена до $\tau=\mu^2$. Основываясь на определениях (22) и (24) и теореме IУ из математического дополнения, нетрудно установить, что и $g(\tau)$ может быть аналитически продолжено до $\tau=\mu^2$. Так как $g(\tau)$ вещественно при $\tau<-\vec{p}^2$, имеем

$$\operatorname{Im} g(\tau) = 0 \qquad \text{при} \qquad \tau < -\vec{p}^2$$

откуда вытекает, что это соотношение будет выполнено при $\tau=\mu^2$. Значит $g(\mu^2)$ вещественно и $g(\mu^2)>0$.

Действительно, на основании (73) видим, что

$$\lim_{\delta\to+0} S\widetilde{T}(E+i\delta,\vec{e},\tau) = \lim S\widetilde{T}(E+i\delta,\vec{e},\tau+2i\alpha E\delta)$$

$$|\alpha| < \frac{\sqrt{M^2+\vec{p}^2}}{E}$$

Но, с другой стороны, при достаточно малых δ мнимой добавкой $2i\alpha E\delta$ к τ можно распорядиться так, что точка

$$E_+ = E+i\delta \quad , \tau_+ = \tau + 2i\alpha E\delta$$

попадет в область (73), (5а), в которой мы имеем право воспользоваться формулами (4) и (5) и написать

$$S\widetilde{T}(E+i\delta,\vec{e},\tau+i\alpha E\delta) = \tag{87}$$

$$= S\int \exp\left[-\delta x^0 + \vec{e}\vec{x}\,\mathrm{Im}\sqrt{E_+^2-\tau_+-\vec{p}^2}\right]\exp i\left[Ex^0-\vec{e}\vec{x}\,\mathrm{Re}\sqrt{E_+^2-\tau_+-\vec{p}^2}\right]F^{ret}(x)dx$$

причем

$$\left|\mathrm{Im}\sqrt{E_+^2-\tau_+-\vec{p}^2}\right| < \delta|$$

ввиду чего

$$\lim_{\delta\to+0} S\widetilde{T}(E+i\delta,\vec{e},\tau+i\alpha E\delta) = ST^{ret}(E,\tau)$$

Аналогично проверяется и свойство (82).

Мы установили таким образом соотношение (73) во всей области (70). Но $\tau=\mu^2$ вместе с любым E , не лежащим на вещественной оси, принадлежит к этой области. Поэтому (73) верно всегда, когда

$$\mathrm{Im}\,E \neq 0 \quad , \tau = \mu^2$$

Совершая теперь замену переменных интегрирования, обратную проведенной при переходе от (18) к (73), преобразуем (73) к виду (18), в котором на месте $ST(E',\vec{e},\mu^2)$ будет стоять выражение

$$F_1\left(\mu^2+2E'\sqrt{M^2+\vec{p}^2},\mu^2\right) + F_2\left(\mu^2-2E\sqrt{M^2+\vec{p}^2},\mu^2\right) \tag{88}$$

совпадающее с предыдущей функцией в наблюдаемой области, когда

$$E'^2 > \mu^2+\vec{p}^2$$

Выражение (88), так же как и функция $ST(E',\mu^2)$, обращается в нуль при

$$|E'| < \frac{M\mu-\vec{p}^2}{\sqrt{M^2+\vec{p}^2}}$$

в то время как в интервале

$$\frac{M\mu - \vec{p}^{\,2}}{\sqrt{M^2+\vec{p}^{\,2}}} < |E'| < \sqrt{\mu^2+\vec{p}^{\,2}} \tag{89}$$

непосредственное определение функции ST через интегралы (4) смысла не имеет, и выражение (88) можно рассматривать, как надлежащее аналитическое расширение этой функции на интервал (89).

Итак мы доказали выполнение соотношения (I8) для нужного нам значения $\tau = \mu^2$ с расширенной функцией (87). Для перехода к вещественным значениям мы имеем формулы (85)-(87). Этот переход, так же как получение собственно дисперсионных соотношений между действительной и мнимой частями амплитуды рассеяния мы проведем в следующем параграфе.

§ 52. Дисперсионные соотношения для рассеяния пионов на нуклонах

I. Переход к действительным величинам. В предыдущем параграфе было установлено, что для любого E, не лежащего на действительной оси, $(\mathrm{Im}\, E \neq 0)$ имеет место соотношение*

$$S\tilde{T}(E) = \frac{(E-E_0)^{n+1}}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ST(E')\,dE'}{(E'-E_0)^{n+1}(E'-E)} + P_n(E) \tag{I}$$

причем

$$ST(E') = ST^{ret}(E') - ST^{adv}(E') \qquad (\mathrm{Im}\, E' = 0) \tag{2}$$

а функция $S\tilde{T}$ в соответствии с (5I.85) и (5I.86) обладает свойствами

$$\lim_{\varepsilon \to +0} S\tilde{T}(E+i\varepsilon) = ST^{ret}(E) \qquad \mathrm{Im}\, E = 0 \tag{3}$$

$$\lim S\tilde{T}(E-i\varepsilon) = ST^{adv}(E) \qquad \mathrm{Im}\, E = 0 \tag{4}$$

Выберем теперь какое-либо действительное значение E^* из наблюдаемой области

$$E^* > \sqrt{\vec{p}^{\,2}+\mu^2}$$

положим в (I)

$$E = E^* + i\varepsilon$$

---

* Здесь мы опускаем аргумент $\tau = \mu^2$.

§ 52.1

и проведем предельный переход, устремив ε к нулю. Пользуясь в левой части уравнения (I) формулой (3), а в правой части формулой (46.3), получаем в результате этого перехода

$$ST^{ret}(E) + ST^{adv}(E) = \tag{5}$$
$$= \frac{(E-E_0)^{n+1}}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ST^{ret}(E') - ST^{adv}(E')}{(E'-E_0)^{n+1}} \mathcal{P} \frac{dE'}{E'-E} + 2P_n(E)$$

Примем теперь во внимание, что, согласно результатам §§ 51.1 и 51.2, разность $ST^{ret}(E') - ST^{adv}(E')$ в интервале значений $|E'| < E_1$ представляется в виде суммы двух δ -образных членов

$$ST(E) = iSf(E) = \frac{ig^2}{2}\delta(E+E_p)\mathcal{B}_{p'p}(\vec{e}) - \frac{ig^2}{2}\delta(E-E_p)\mathcal{B}_{pp'}(-\vec{e}) \quad \text{при } |E| < E_1 \tag{6}$$

что позволяет явно выполнить интегрирование к интервале $(-E_1, E_1)$. Здесь

$$\mathcal{B}_{p'p}(\vec{e}) = \frac{4\pi}{g^2(\mu^2)} A_{p'p}(\vec{e}, \mu^2) = \frac{\bar{v}^{s',+}(\vec{p}')\tau_{p'}\tau_p S(\hat{\lambda} - M) v^{s,-}(\vec{p})}{2\sqrt{M^2 + \vec{p}^{\,2}}} \tag{7}$$

и

$$g = g(\mu^2) \tag{8}$$

Постоянную g, определенную отношением (8) мы назовем мезонным зарядом.

Здесь следует заметить, что, как хорошо известно, процедура введения мезонного заряда и в обычной теории не является однозначной *. Дело заключается в том, что из-за отличия массы мезона μ от нуля радиус действия ядерных сил является конечным. Это приводит к невозможности (в противоположность электродинамике) построить классическую микроскопическую мезодинамику и связать процедуру определения мезонного заряда с макроскопическими экспериментами вроде опыта Миллекена и опыта с отклонением бузинных шариков.

Ввиду этого мезонный заряд g приходится вводить тем или иным образом в терминах исходных величин теории и определять затем его численное значение путем сравнения результатов теории с данными микроскопических экспериментов. Ясно поэтому, что способ введения мезонного заряда сам по себе не является существенным, однако при определении численного значения g какой-либо конкретный способ необходимо фиксировать.

---

* Смотри, например, работу Челлена (1954).

В соответствии с (5I.22) и (5I.24) формула (8) с точки зрения обычной теории соответствует определению

$$g\gamma^5\tau_\rho = g_0\Gamma^5_\rho(M^2, M^2; \mu^2) \tag{9}$$

где g_0 -затравочный заряд, входящий в лагранжиан взаимодействия (33.7), а Γ^5_ρ -вершинный оператор. Фиксируя процедуру до определения хронологических произведений так, чтобы

$$\Gamma^5_\rho(M^2, M^2; \mu^2) = \gamma^5\tau_\rho \tag{I0}$$

получаем возможность отождествить g_0 с g.

Заметим еще, что функция $\Gamma^5_\rho(M^2, M^2; \mu^2)$ не имеет прямого отношения к реальным процессам, ввиду того, что испускание (или поглощение) реального мезона ($q^2=\mu^2$) реальным нуклоном ($p^2=M^2, (p\pm q)^2=M^2$ запрещено законом сохранения) энергии-импульса.

Следующий шаг по преобразованию уравнения (6) связан с отделением эрмитовой и антиэрмитовой частей амплитуды рассеяния. Рассмотрим с этой целью свойства эрмитовости функций ST^{ret} и ST^{adv}. Заметим прежде всего, что из определения (50.4) непосредственно следует, что

$$\overset{*}{F}{}^{ret}_{\alpha\omega}(x) = P_{\rho\rho'} F^{ret}_{\omega\alpha}(x) \tag{II}$$

Отсюда в свою очередь вытекает соотношение эрмитовости в импульсном представлении

$$\overset{*}{T}{}^{ret}_{\alpha\omega}(K) = P_{\rho\rho'} T^{ret}_{\omega\alpha}(-K) \tag{I2}$$

С другой стороны, на основании (50.I3) имеем

$$T^{adv}_{\alpha\omega}(K) = P_{\rho\rho'} T^{ret}_{\alpha\omega}(-K) \tag{I3}$$

Комбинируя (I2) и (I3), получаем

$$\overset{+}{T}{}^{adv}_{\alpha\omega}(K) = T^{ret}_{\alpha\omega}(K) \tag{I4}$$

Здесь введено обозначение

$$\overset{+}{T}_{\alpha\omega}(K) \equiv \overset{*}{T}_{\omega\alpha}(K) \tag{I5}$$

Переходя в (I4) к аргументам E и $\vec{e}$ получаем также

$$S\overset{+}{T}{}^{adv}_{\alpha\omega}(E) = ST^{ret}_{\alpha\omega}(E) \tag{I6}$$

§ 52.1

Соотношение (16) является очень важным, так как из него непосредственно вытекает, что линейные комбинации

$$\frac{ST^{ret}_{\alpha\omega}(E) + ST^{adv}_{\alpha\omega}(E)}{2} = D_{\alpha\omega}(E) \tag{17}$$

и

$$\frac{ST^{ret}_{\alpha\omega}(E) - ST^{adv}_{\alpha\omega}(E)}{2i} = A_{\alpha\omega}(E) \tag{18}$$

являются эрмитовыми

$$\overset{+}{D}_{\alpha\omega}(E) = D_{\alpha\omega}(E) \quad , \quad \overset{+}{A}_{\alpha\omega}(E) = A_{\alpha\omega}(E) \tag{19}$$

и представляют собой эрмитову и антиэрмитову части функции ST^{ret}, то-есть

$$ST^{ret}(E) = D(E) + iA(E) \tag{20}$$

Сделаем теперь важное допущение о величине степени роста n. Мы положим, что n = 1, то-есть что амплитуда рассеяния при больших значениях E возрастает не быстрее чем линейно. (Такое предположение соответствует данным эксперимента). Интересно отметить, что как и ранее в §§ 48,49, вместо того, чтобы задать форму лагранжиана взаимодействия, нам оказывается достаточным фиксировать степень роста.

Подставляя в (5) формулы (17) и (18) и полагая n = 1, получаем

$$D_{\alpha\omega}(E) = \frac{(E-E_0)^2}{\pi} \int\limits_{|E'|>E_1} \frac{A_{\alpha\omega}(E')}{(E'-E_0)^2} \mathcal{P} \frac{dE'}{E'-E} + \frac{(E-E_0)^2}{2\pi} \int\limits_{|E'|<E_1} \frac{Sf(E')\,dE'}{(E'-E_0)^2(E'-E)} + P_1(E) \tag{21}$$

2. <u>Учет свойств симметрии по E</u>. Займемся теперь исключением интеграла по отрицательным энергиям (от $-\infty$ до $-E_1$). С этой целью произведем учет свойств симметрии по отношению к замене $E \to -E$ в отдельных членах формулы (21). Комбинируя (13), (14), (17) и (18), имеем

$$(1 \pm P_{\rho\rho'}) D_{\alpha\omega}(q) = (P_{\rho\rho'} \pm 1) D_{\alpha\omega}(-q)$$

$$(1 \pm P_{\rho\rho'}) A_{\alpha\omega}(q) = (P_{\rho\rho'} \mp 1) A_{\alpha\omega}(q)$$

§ 52, 2

Принимая во внимание, что согласно определения

$$S_+ f(E) = \frac{f(E,\bar{e}) + f(E,-\bar{e})}{2}$$

$$S_- f(E) = \frac{f(E,\bar{e}) - f(E,-\bar{e})}{2\lambda}$$

можем сделать заключения об определенных свойствах четности выражений типа $(1 \pm P_{pp'}) S_\pm A$ и $(1 \pm P_{pp'}) S_\pm D$. Получаем этим путем четные функции энергии

$$D_{чет}(E) = \{(1+P_{pp'}) S_+ D(E);\ (1-P_{pp'}) S_- D(E)\} \tag{22}$$

$$A_{чет}(E) = \{(1-P_{pp'}) S_+ A(E);\ (1+P_{pp'}) S_- A(E)\} \tag{23}$$

и нечетные функции энергии

$$D_{неч}(E) = \{(1-P_{pp'}) S_+ D(E);\ (1+P_{pp'}) S_- D(E)\} \tag{24}$$

$$A_{неч}(E) = \{(1+P_{pp'}) S_+ A(E);\ (1-P_{pp'}) S_- A(E)\} \tag{25}$$

Обращаясь к свойствам четности функции $Sf(E)$, без труда устанавливаем, исходя из (52.6) и (52.7), что операции $(1-P_{pp'}) S_+$ и $(1+P_{pp'}) S_-$ приводят к четным выражениям, а $(1-P_{pp'}) S_-$ и $(1+P_{pp'}) S_+$ – к нечетным. Имеем поэтому

$$f_{чет}(E) = \{(1-P_{pp'}) S_+ f(E);\ (1+P_{pp'}) S_- f(E)\} \tag{52.26}$$

$$f_{неч}(E) = \{(1+P_{pp'}) S_+ f(E);\ (1-P_{pp'}) S_- f(E)\} \tag{52.27}$$

Производя теперь учет свойств симметрии в (2I) и явно выполняя интегрирование в интервале $|E'| < E_1$, получаем

$$D_{чет}(E) - D_{чет}(E_0) = \frac{2(E^2-E_0^2)}{\pi} \mathcal{P}\int_{E_1}^{\infty} \frac{E' A_{неч}(E')\,dE'}{(E'^2-E_0^2)(E'^2-E^2)} - \frac{g^2}{2\pi}\left(\frac{E^2-E_0^2}{E_p^2-E_0^2}\right)\frac{E_p}{E_p^2-E^2} B_{неч}(\vec{e},\vec{p}) \tag{26}$$

и
$$D_{\text{неч}}(E)-\frac{E}{E_0}D_{\text{неч}}(E_0)=\frac{2E(E^2-E_0^2)}{\pi}\mathcal{P}\int\limits_{E_1}^{\infty}\frac{A_{\text{чет}}(E')dE'}{(E'^2-E_0^2)(E'^2-E^2)}-$$
$$-\frac{g^2}{4\pi}\frac{E^2-E_0^2}{E_p^2-E_0^2}\frac{E}{E_p^2-E^2}B_{\text{чет}}(\vec{e},\vec{p}) \qquad (27)$$

Здесь
$$B_{\text{чет}}(\vec{e},\vec{p})=\{-(1-P_{pp'})S_+B_{p'p}(-\vec{e});\ (1+P_{pp'})S_-B_{p'p}(-\vec{e})\} \qquad (28)$$

и

$$B_{\text{неч}}(\vec{e},\vec{p})=\{(1+P_{pp'})S_+B_{p'p}(-\vec{e}),\ -(1-P_{pp'})S_-B_{p'p}(-\vec{e})\} \qquad (29)$$

3. Изотопическая и спиновая структура. Полученные выше дисперсионные соотношения не относятся еще по существу к определённым физическим процессам, поскольку мезонное поле φ описывает пионы трех зарядов (I, 0, -I), а нуклонное поле ψ – четыре сорта частиц (протон, нейтрон, антипротон и антинейтрон) с различными значениями проекции спинов. Чтобы получить из (26), (27) дисперсионные соотношения для конкретных процессов рассеяния, следует учесть еще изотопическую и спиновую структуру амплитуды рассеяния.

Рассмотрим сперва изотопическое строение амплитуды $T^{zet}_{\alpha\omega}$. Из соображений инвариантности в изотопическом пространстве вытекает, что T^{zet} должна иметь вид

$$T^{zet}_{\alpha\omega}=\delta_{t't}\,\delta_{p'p}T^{(1)}+\frac{[\tau_{p'},\tau_p]_{t't}}{2}T^{(2)} \qquad (30)$$

Эту формулу можно записать в виде

$$T^{zet}_{\alpha\omega}=\delta_{t't}\,\delta_{p'p}\,T^{(1)}-\vec{\omega}_{p'p}\,\vec{\tau}_{t't}\,T^{(2)} \qquad (31)$$

где
$$\omega^{\alpha}_{p'p}=-ie_{p'p\alpha} \qquad (32)$$

а $e_{\alpha\beta\gamma}$–совершенно антисимметричный единичный тензор третьего ранга ($e_{\alpha\beta\gamma}=-e_{\alpha\gamma\beta}=-e_{\beta\alpha\gamma}$ и e_{123} = I). Введенный в (32) матричный вектор $\vec{\omega}$ представляет собой не что иное, как оператор изотопического спина для пионов. В самом деле, из (32) непосредственно вытекает, что

$$[\omega^{\alpha},\omega^{\beta}]_-=ie_{\alpha\beta\gamma}\omega^{\gamma} \qquad \text{и} \qquad \omega^2=1(1+1)=2$$

§52 б

то-есть $\vec{\omega}$ является оператором момента с собственными значениями I,0-I.

Обозначая оператор полного изотопического момента системы нуклон-пион через $\vec{\Omega}$:

$$\vec{\Omega} = \vec{\omega} + \frac{\vec{\tau}}{2} \quad ; \quad \vec{\Omega} = \quad \vec{\Omega}^2 = T(T+1) ,$$

получаем

$$\vec{\omega}\vec{\tau} = \vec{\Omega}^2 - \vec{\omega}^2 - \left(\frac{\vec{\tau}}{2}\right)^2 = T(T+1) - 2 - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = T(T+1) - \frac{11}{4} .$$

Отсюда следует, что собственное значение оператора $\vec{\omega}\vec{\tau}$ в состоянии с полным изотопическим спином T= 3/2 равно

$$\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}+1\right) - \frac{11}{4} = 1 ,$$

а в состоянии с полным изотопическим спином T= I/2 будет

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right) - \frac{11}{4} = -2 .$$

Поэтому, если ввести амплитуды $T_{3/2}$ и $T_{1/2}$, относящиеся к состояниям с определенными значениями полного изотопического спина, равными 3/2 и I/2, соответственно, то из (3I) будет следовать, что

$$T_{3/2} = T^{(1)} - T^{(2)} \qquad \text{и} \qquad T_{1/2} = T^{(1)} + 2T^{(2)} ,$$

то-есть

$$T^{(1)} = \frac{T_{1/2} + 2T_{3/2}}{3} \quad , \quad T^{(2)} = \frac{T_{1/2} - T_{3/2}}{3} . \qquad (33)$$

Переходя далее к рассмотрению конкретных физических процессов рассеяния (то-есть фиксируя не только полный изотопический спин T , но также и его компоненту T_3 , можно выразить величины $T^{(1)}$ и $T^{(2)}$ через амплитуды конкретных физических процессов. Мы, однако, не будем этим заниматься, отослав читателя к имеющейся литературе*, и перейдем к рассмотрению спиновой структуры T^{ret} .

Из соображений инвариантности в обычном трехмерном пространстве вытекает, что, подобно формуле (3I) $T^{ret}_{\sigma\sigma'}$ может быть представлена в виде суммы члена, не зависящего от $\vec{\sigma}$ и члена линейного по $\vec{\sigma}$. Линейный член должен содержать скалярное произведение $\vec{\sigma}$ на какой-либо аксиальный вектор. Но из имеющихся векторов $\vec{p}$ и $\vec{e}$ можно образовать только один аксиальный вектор $[\vec{p} \times \varkappa\vec{e}] = [\vec{q}\,' \times \vec{q}]$. Имеем таким образом

$$T^{ret}_{\alpha\omega} = \delta_{\sigma\sigma'} T_{(1)} + i\varkappa(\vec{\sigma}\vec{p}\vec{e})_{\sigma\sigma'} T_{(2)} \qquad (34)$$

* См. например, Гольдбергер, Миязава, Оэме (I955), Ферми (1956).

Объединяя теперь результаты анализа в спиновом и изотопическом пространствах (формулы (30) и (34)), получим

$$T^{st}_{\alpha\omega} = \delta_{\sigma\sigma'}\,\delta_{\rho\rho'}\,\delta_{tt'}\,T^{(1)}_{(1)} + i\,\varkappa(\vec{\sigma}\vec{p}\vec{e})_{\sigma\sigma'}\,\delta_{\rho\rho'}\,\delta_{tt'}\,T^{(1)}_{(2)} +$$

$$+\frac{1}{2}\left[\tau_{\rho'},\tau_{\rho}\right]_{t't}\delta_{\sigma\sigma'}\,T^{(2)}_{(1)} + \frac{i}{2}\left[\tau_{\rho'},\tau_{\rho}\right]_{t't}\varkappa(\vec{\sigma}\vec{p}\vec{e})_{\sigma\sigma'}\,T^{(2)}_{(2)}\,. \qquad (35)$$

Выражение (35) несколько громоздко. Однако в дисперсионные соотношения входит не сама T^{st}, а четные и нечетные составляющие ее эрмитовой и антиэрмитовой частей. Замечая, что, согласно (I5), операция эрмитового сопряжения состоит у нас в выполнении комплексного сопряжения и замене α на ω, то-есть

$$\vec{p} \rightleftarrows \vec{p}\,' = -\vec{p} \quad ; \quad \rho' \rightleftarrows \rho \quad ; \quad \sigma' \rightleftarrows \sigma \quad ; \quad t' \rightleftarrows t\,,$$

находим, что операции симметризации по ρ,ρ' и $\vec{e}$ коммутируют с операцией эрмитового сопряжения и что все матричные множители в (35) при эрмитовом сопряжении переходят сами в себя. Поэтому, разделяя в (35) функции $T^{(i)}_{(k)}$ на действительную и мнимую части

$$T^{(i)}_{(k)} = D^{(i)}_{(k)} + i\,A^{(i)}_{(k)} \qquad\qquad (i,k = 1,2)$$

после выполнения операций $(1 \pm P_{\rho\rho'})\,S_{\pm}$, получаем вместо (22)-(25):

$$D_{\text{четн}}(E) = \left\{2\,\delta_{\sigma\sigma'}\,\delta_{\rho\rho'}\,\delta_{tt'}\,D^{(1)}_{(1)}(E);\; i\left[\tau_{\rho'},\tau_{\rho}\right]_{t't}(\vec{\sigma}\vec{p}\vec{e})_{\sigma'\sigma}\,D^{(2)}_{(2)}(E)\right\}; \qquad (36)$$

$$A_{\text{четн}}(E) = \left\{\left[\tau_{\rho'},\tau_{\rho}\right]_{t't}\delta_{\sigma\sigma'}\,A^{(2)}_{(1)}(E);\; 2i\,\delta_{\rho'\rho}\,\delta_{t't}(\vec{\sigma}\vec{p}\vec{e})_{\sigma'\sigma}\,A^{(1)}_{(2)}(E)\right\}; \qquad (37)$$

и

$$D_{\text{нч}}(E) = \left\{\left[\tau_{\rho'},\tau_{\rho}\right]_{t't}\delta_{\sigma\sigma'}\,D^{(2)}_{(1)}(E);\; 2i\,\delta_{\rho'\rho}\,\delta_{t't}(\vec{\sigma}\vec{p}\vec{e})_{\sigma'\sigma}\,D^{(1)}_{(2)}(E)\right\}; \qquad (38)$$

$$A_{\text{нч}}(E) = \left\{2\,\delta_{\sigma\sigma'}\,\delta_{\rho'\rho}\,\delta_{t't}\,A^{(1)}_{(1)}(E);\; i\left[\tau_{\rho'},\tau_{\rho}\right]_{t't}(\vec{\sigma}\vec{p}\vec{e})_{\sigma'\sigma}\,A^{(2)}_{(2)}(E)\right\} \qquad (39)$$

Аналогичному анализу следует подвергнуть функцию $B_{\rho'\rho}(\vec{e})$, входящую в формулы (28) и (29). Для этого следует записать в явном виде спиновую и изотопическую структуру $B_{\rho'\rho}(\vec{e})$, перейдя от 8-компонентных спиноров $\bar{V}$ и V к четырехкомпонентным спинорам протона и нейтрона по формулам типа

$$V^{s} \equiv V^{\sigma}_{t} = \delta^{P}_{t}\,\delta^{\sigma}_{P} + \delta^{N}_{t}\,\delta^{\sigma}_{N}\,.$$

Таким путем получаем вместо (28) и (29)

$$B_{\text{чет}}(\vec{p}) = \left\{ 2\delta_{t't}\delta_{\rho'\rho}\delta_{\sigma\sigma'} f^{(1)}_{(1)}(\vec{p})\,;\; i\,[\tau_{\rho'},\tau_{\rho}]_{t't}\,(\vec{\sigma}(\vec{p}\times\vec{e}))_{s's}\, f^{(2)}_{(2)}(\vec{p}) \right\} \qquad (40)$$

$$B_{\text{неч}}(\vec{p}) = \left\{ [\tau_{\rho'},\tau_{\rho}]_{t't}\,\delta_{ss'}\, f^{(2)}_{(1)}(\vec{p})\,;\; 2i\,\delta_{t't}\,\delta_{\rho'\rho}(\vec{\sigma}(\vec{p}\times\vec{e}))\, f^{(1)}_{(2)}(\vec{p}) \right\} \qquad (41)$$

причем

$$f^{(1)}_{(1)}(\vec{p}) = f^{(2)}_{(1)}(\vec{p}) = \frac{\sqrt{M^2+\vec{p}^2}-E_p}{\sqrt{M^2+\vec{p}^2}}\left(\overline{v}^{\sigma,+}(-\vec{p})\,\frac{\gamma^0\lambda^0-M}{\lambda^0}\,v^{\sigma,-}(\vec{p})\right) \qquad (42)$$

$$-i(\vec{\sigma}(\vec{p}\times\vec{e}))\,f^{(1)}_{(2)}(\vec{p}) = -i\,(\vec{\sigma}(\vec{p}\times\vec{e}))\,f^{(2)}_{(2)}(\vec{p}) = \frac{\sqrt{M^2+\vec{p}^2}-E_p}{\sqrt{M^2+\vec{p}^2}}\left(\overline{v}^{\sigma',+}(-\vec{p})\,\frac{\vec{e}\vec{\gamma}}{\lambda^0}\,v^{\sigma,-}(\vec{p})\right) \qquad (43)$$

В формулах (42) и (43) опущены изотопические индексы (N,P) у четырех компонентных спиноров, так как по условиям изотопической симметрии спиноры нейтрона и протона должны быть выбраны в одном и том же представлении.

Выражения (42) и (43) могут быть вычислены до конца в явном виде. Для этого можно воспользоваться явным видом спиноров $\overline{v}$ и v (например, формулой (7.41), с последующим обобщением результата на случай $p_2\neq 0, p_1\neq 0$ из соо(б)ражений инвариантности относительно вращений в 3-мерном пространстве). Получаем этим путем

$$f^{(1)}_{(1)}(\vec{p}) = f^{(2)}_{(1)}(\vec{p}) = +\frac{M(M^2+2\vec{p}^2)}{2(M^2+\vec{p}^2)^{3/2}} \qquad (44)$$

$$f^{(1)}_{(2)}(\vec{p}) = f^{(2)}_{(2)}(\vec{p}) = -\frac{1}{2(M^2+\vec{p}^2)} \qquad (45)$$

Собирая результаты формул (36)-(41), запишем дисперсионные соотношения (28), (29) в виде

$$D^{(i)}_{(i)}(E) - D^{(i)}_{(i)}(E_0) = \frac{2(E^2-E_0^2)}{\pi}\,\mathcal{P}\!\int_{E_1}^{\infty}\frac{E'\,A^{(i)}_{(i)}(E')\,dE'}{(E'^2-E_0^2)(E'^2-E^2)} + g^2\frac{(E^2-E_0^2)E_p}{(E_0^2-E_p^2)(E^2-E_p^2)}\,f^{(i)}_{(i)}(\vec{p}) \qquad (i=1,2) \qquad (46)$$

$$D^{(i)}_{(k)}(E) - \frac{E}{E_0}D^{(i)}_{(k)}(E_0) = \frac{2E(E^2-E_0^2)}{\pi}\,\mathcal{P}\!\int_{E_1}^{\infty}\frac{A^{(i)}_{(k)}(E')\,dE'}{(E'^2-E_0^2)(E'^2-E^2)} + g^2\frac{(E^2-E_0^2)E}{(E_0^2-E_p^2)(E^2-E_p^2)}\,f^{(i)}_{(k)}(\vec{p}) \qquad (i,k=1,2,\ i\neq k) \qquad (47)$$

99

4. <u>Ненаблюдаемая область и переход к случаю рассеяния вперед.</u> Для того, чтобы в формулах (46) и (47) перейти к наблюдаемым величинам, необходимо воспользоваться связью (46.20) между мнимой частью амплитуды рассеяния и полным эффективным сечением. Однако полные эффективные сечения являются наблюдаемыми лишь в области действительных значений импульсов, когда $E > \sqrt{\mu^2 + \vec{p}^2}$ (сравни (50.24), (50.25)). Поэтому интегралы в правых частях (46) и (47) содержат ненаблюдаемую область:

$$E_1 = \frac{M\mu - \vec{p}^2}{\sqrt{M^2 + \vec{p}^2}} < E' < \sqrt{\mu^2 + \vec{p}^2} \tag{48}$$

Мы видим отсюда, что соотношения (46) и (47) содержат в себе, вообще говоря, ненаблюдаемые величины.

Исключением является случай рассеяния вперед, когда $\vec{p}^2 = 0$ и область (48) стягивается в точку. Полагая в (46) и (47) $\vec{p}^2 = 0$ и используя формулу (46.20) получаем с учетом (44) и (45)

$$D^{(1)}_{(1)}(k) - D^{(1)}_{(1)}(k_0) = \frac{k^2 - k_0^2}{2\pi^2} \mathcal{P}\int_0^\infty \frac{k' \sigma_1^1(k') dk'}{(k'^2 - k_0^2)(k'^2 - k^2)} +$$

$$+ f^2 \frac{\mu^2}{M} \frac{k^2 - k_0^2}{\left[E^2 - (\mu^2/2M)^2\right]\left[E_0^2 - (\mu^2/2M)^2\right]} \tag{49}$$

$$D^{(2)}_{(2)}(k) - D^{(2)}_{(2)}(k_0) = \frac{k^2 - k_0^2}{2\pi^2} \mathcal{P}\int_0^\infty \frac{k' \sigma_2^2(k') dk'}{(k'^2 - k_0^2)(k'^2 - k^2)} -$$

$$- f^2 \frac{1}{M} \frac{k^2 - k_0^2}{\left[E^2 - (\mu^2/2M)^2\right]\left[E_0^2 - (\mu^2/2M)^2\right]} \tag{50}$$

$$D^{(2)}_{(1)}(k)-\frac{E}{E_0}D^{(2)}_{(1)}(k_0)=\frac{E(k^2-k_0^2)}{2\pi^2}\mathcal{P}\int\limits_0^\infty\frac{k'}{E'}\frac{\sigma_1^2(k')dk'}{(k'^2-k_0^2)(k'^2-k^2)}+$$

$$+2f^2\frac{E(k^2-k_0^2)}{\left[E^2-(\mu^2/2M)^2\right]\left[E_0^2-(\mu^2/2M)^2\right]}\qquad(51)$$

$$D^{(1)}_{(2)}(k)-\frac{E}{E_0}D^{(1)}_{(2)}(k_0)=\frac{E(k^2-k_0^2)}{2\pi^2}\mathcal{P}\int\limits_0^\infty\frac{k'}{E'}\frac{\sigma_2'(k')dk'}{(k^2-k_0^2)(k'^2-k^2)}-$$

$$-f^2\frac{2}{\mu^2}\frac{E(k^2-k_0^2)}{\left[E^2-(\mu^2/2M)^2\right]\left[E_0^2-(\mu^2/2M)^2\right]}\qquad(52)$$

Здесь введено обозначение для модуля импульса мезона

$$k=\sqrt{E^2-\mu^2}=\sqrt{\vec{q}^{\,2}}$$

а также

$$f=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{g\mu}{2M}\right)^2$$

Формулы (49)-(52), рассматриваемые в области $0<k<\infty$, представляют собой дисперсионные соотношения для рассеяния вперед в окончательной форме и не содержат ненаблюдаемых величин. При этом формулы (49) и (51) соответствуют рассеянию без изменения направления спина, а формулы (49) и (52) соответствуют рассеянию без перезарядки нуклона.

МД 1

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ДОПОЛНЕНИЕ

Н.Н. Боголюбов

Введем ряд определений. Будем говорить, что некоторая функция $h(x_1,\dots x_n;\theta_1,\dots\theta_q)=h(x;\theta_1,\dots\theta_q)$, непрерывная в $E_n\times\Omega_q$, где E_n – вещественное эвклидово пространство точек $x=(x_1,\dots x_n)$, а Ω_q — q- мерный тор, точки которого характеризуются угловыми переменными $\theta_1,\dots,\theta_q$, принадлежит классу $C(\tau,s;n\,|\,\nu;\Omega_q)$, если все выражения вида

$$x_{\gamma_1}\dots x_{\gamma_\ell}\frac{\partial^{p+\mu}h(x;\theta_1,\dots\theta_q)}{\partial x_{\alpha_1}\dots\partial x_{\alpha_p}\partial\theta_{\beta_1}\dots\partial\theta_{\beta_\mu}},\quad \begin{array}{l}0\leqq\ell\leqq\tau,\ 0\leqq p\leqq s,\ 0\leqq\mu\leqq\nu,\\ 1\leqq(\alpha_i,\gamma_i)\leqq n,\ 1\leqq\beta_i\leqq q\end{array}$$

существуют и ограничены при всех $(x_1,x_2,\dots x_n;\theta_1,\theta_2,\dots\theta_q)\in E_n\times\Omega_q$. Если для такой функции h некоторые из показателей τ,s,ν могут принимать сколь угодно большие значения, условимся в обозначении класса C ставить ∞ на соответствующих местах. В случае, когда рассматриваемые функции не зависят от $x_1,\dots x_n$, или соответственно от $\theta_1,\dots\theta_q$, будем говорить о классе $C(\nu;\Omega_q)$ или $C(\tau,s;n)$.

В классе $C(\tau,s;n)$ введем норму по формуле

$$\|h\|=\sup_{\substack{x\\0\leqq\ell\leqq\tau,\,0\leqq p\leqq s}}\left|x_{\gamma_1}\dots x_{\gamma_\ell}\frac{\partial^p h(x)}{\partial x_{\alpha_1}\dots\partial x_{\alpha_p}}\right|$$

Этим самым $C(\tau,s;n)$ превращается в линейное нормированное пространство.

Линейные (ограниченные) функционалы $f(h)$ на пространствах $C(\tau,s;n)$, где τ,s – любые не отрицательные числа, будем называть обобщенными функциями, интегрируемыми на классе $C(\tau,s;n)$, употребляя при этом обозначения

$$f(x),\quad \int f(x)h(x)dx$$

Таким образом, если f обобщенная функция, то всегда найдутся такие числа τ и s, что f будет интегрируемой на классе $C(\tau,s;n)$. Обобщенные функции f_1 и f_2 будем называть равными, если найдутся такие достаточно большие τ и s, что функционал f_1-f_2 равен нулю на $C(\tau,s;n)$.

Будем говорить, что последовательность обобщенных функций $f_n(x)$ слабо (в несобственном смысле) сходится к обобщенной функции $f(x)$ на классе $C(\tau,s;n)$, если $f_n(x)$ и $f(x)$ интегрируемы на классе $C(\tau,s;n)$

и для любого $h(x) \in C(r,s;n)$ имеет место:

$$\int f_n(x) h(x) dx \to \int f(x) h(x) dx \,, \quad n \to \infty$$

Будем говорить, что последовательность обобщенных функций $f_n(x)$ слабо (в несобственном смысле) сходится к обобщенной функции $f(x)$, если найдутся такие достаточно большие числа r и s, что последовательность $f_n(x)$ будет слабо сходиться к $f(x)$ на классе $C(r,s;n)$.

Пусть G - открытое множество n - мерного эвклидова пространства E_n и Γ - его граница. Назовем границу Γ регулярной, если для любой точки $x \in \Gamma$ любая сфера с центром в точке x содержит другую сферу, не имеющую с G общих точек.

Будем говорить, что обобщенная функция $f(x)$ равна нулю в открытом множестве G с регулярной границей Γ, если существуют такие достаточно большие числа r и s, что

$$\int f(x) h(x) dx = 0$$

при всех $h(x)$ из $C(r,s;n)$, обращающихся в нуль в $E_n - G$.

Условимся говорить, что некоторое выражение

$$f(k,t) \,, \quad k = (k_1, \dots k_m) \,, \quad t = (t_1, \dots t_n)$$

является обобщенной функцией (вещественных) переменных t, интегрируемой на классе $C(r,s;n)$, и аналитической функцией комплексных переменных k, регулярной в области D, если для любой функции $h(t)$ из класса $C(r,s;n)$ интеграл

$$\int f(k,t) h(t) dt$$

будет аналитической функцией k, регулярной в области D.

Если в подобной формулировке мы не будем специально упоминать об интегрируемости на некотором конкретном классе $C(r,s;n)$ и будем говорить просто об обобщенной функции, то мы тем самым условимся подразумевать, что такой класс имеется при соответствующих достаточно больших r и s.

Условимся об обозначениях при $n=4$. Преобразование Фурье $\tilde{f}(p)$ обобщенной функции $f(x)$ мы определим по формуле

$$\tilde{f}(p_0, \vec{p}) = \int f(x_0, \vec{x}) \exp i (x_0 p_0 - \bar{x}\bar{p}) dx$$

где, как и в дальнейшем, приняты обозначения: $x = (x_0, \bar{x}) = (x_0, x_1, x_2, x_3)$,

$p = (p_0, \vec{p}) = (p_0, p_1, p_2, p_3)$; $xp = x_0 p_0 - \bar{x}\bar{p}$; $\bar{x}\bar{p} = \sum_{1 \le \alpha \le 3} x_\alpha p_\alpha$

§ I

Лемма I. Рассмотрим аналитическую функцию $\Phi(\kappa_0, \ldots \kappa_\alpha, \ldots)$ четырех комплексных переменных κ_0, κ_α ($\alpha = 1,2,3$), регулярную в области:

$$|\kappa_0| < \omega \tag{I.I}$$

Пусть r_0, R будут положительными числами, удовлетворяющими неравенству:

$$r_0 < R < \omega \tag{I.2}$$

Пусть, далее, r_α будут положительными числами и N - целым, положительным.

Тогда в области:

$$|\kappa_0| < r_0 \quad , \quad |\kappa_\alpha| < r_\alpha \tag{I.3}$$

имеет место интегральное представление:

$$\Phi(\kappa_0, \ldots \kappa_3) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 \int_0^{2\pi} \!\!\ldots\! \int \frac{\Phi(r_0 e^{i\theta_0}, \ldots r_3 e^{i\theta_3})\, d\theta_0 \ldots d\theta_3}{\left(1 - \frac{\kappa_0}{r_0} e^{-i\theta_0}\right) \prod_\alpha \left(1 - \frac{\kappa_\alpha}{r_\alpha} e^{-i\theta_\alpha}\right)} \tag{I.4}$$

Кроме того, здесь:

$$\Phi(r_0 e^{i\theta_0}, \ldots r_3 e^{i\theta_3}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\Phi(R e^{i\theta}, \ldots u_\alpha(\theta, \theta_0, \ldots \theta_3) \ldots)}{1 - \frac{r_0}{R} e^{i(\theta_0 - \theta_0)}} \frac{\left(1 - e^{2i\theta}\right)^N}{\left(1 - \frac{r_0^2}{R^2} e^{2i\theta_0}\right)^N} d\theta \tag{I.5}$$

где

$$u_\alpha(\theta, \theta_0, \ldots \theta_3) = \frac{i a_\alpha}{2} R\left(1 - e^{2i\theta}\right) + b_\alpha$$

$$a_\alpha = a_\alpha(\theta_0, \ldots \theta_3) = \frac{2 r_\alpha \sin\theta_\alpha}{R\left(1 - \frac{r_0^2}{R^2} \cos 2\theta_0\right)} \tag{I.6}$$

$$b_\alpha = b_\alpha(\theta_0, \ldots \theta_3) = r_\alpha \cos\theta_\alpha - \frac{a_\alpha}{2} \frac{r_0^2}{R} \sin 2\theta_0$$

Доказательство. Заметим прежде всего, что благодаря неравенству (I.2) круги:

$$|z_\alpha| \leqq r_0, \ldots \; |z_\alpha| \leqq r_\alpha$$

лежат целиком в области регулярности функции $\Phi(\kappa_0, \ldots \kappa_3)$.

Мы можем, поэтому, применить в данном случае теорему Коши к каждой из четырех комплексных переменных $\kappa_0, \ldots \kappa_3$, и тем самым установить справедливость соотношений (I.4).

Чтобы перейти к доказательству представления (I.5), рассмотрим аналитическую функцию одной комплексной переменной:

Так как функция эта регулярна в области

$$|z| \leqq R < \omega$$

мы можем воспользоваться теоремой Коши и написать:

$$f(r_0 e^{i\theta_0}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{f(Re^{i\theta})}{1-\frac{r_0}{R}e^{i(\theta_0-\theta)}}\,d\theta \tag{I.7}$$

С другой стороны, на основании (I.6) имеем:

$$f(r_0 e^{i\theta_0}) = \Phi(r_0 e^{i\theta_0}, \dots r_\alpha e^{i\theta_\alpha} \dots)\left(1-\frac{r_0^2}{R^2}e^{2i\theta_0}\right)^{N} R^{2N}$$

$$f(Re^{i\theta}) = \Phi(Re^{i\theta}, \dots u_\alpha(\theta, \theta_0, \dots \theta_3)\dots)\left(1-e^{2i\theta}\right)^{N} R^{2N}$$

Подставив эти выражения в обе части равенства (I.7), мы и приходим к доказываемому представлению (I.5).

§ 2.

Лемма П. Предположим, что функции $a_\alpha(\theta_0, \dots \theta_3)$, введенные в предыдущем параграфе, удовлетворяют неравенству:

$$|\vec{a}| \leq 1 - \sigma \tag{2.I}$$

где σ – некоторое положительное число.

Тогда, если $\varphi(t), g(t)$ будут функциями из класса $C(0,\infty;1)$ такими, что

$$\begin{aligned} &\varphi(t) = 0 \quad, t \leq -\delta \quad; \quad g(t) = 0 \quad, t \leq -\delta \\ &\varphi(t) = 1 \quad, t \geq 0 \quad; \quad g(t) = 1 \quad, t \geq 0 \end{aligned} \tag{2.2}$$

то выражение

$$\varphi(x_0) g(x_0^2 - \bar{x}^2)\int_0^{\pi} d\theta \frac{\left(1-e^{2i\theta}\right)^{N}}{\left(1-\frac{r_0^2}{R^2}e^{2i\theta_0}\right)^{N}\left(1-\frac{r_0}{R}e^{i(\theta_0-\theta)}\right)} \exp i\left\{x_0 R e^{i\theta} - \bar{x}\bar{u}(\theta, \theta_0, \dots \theta_3)\right\}, \tag{2.3}$$

рассматриваемое как функция $f(x_0, \dots x_3; \theta_0, \dots \theta_3)$

принадлежит к любому классу $C(r, s; 4 \mid \nu; \Omega_4)$, для которого

$$r + s + \nu \leq N + 1 \tag{2.4}$$

Доказательство. Заметим прежде всего, что

$$i\{x_0 R e^{i\theta} - \vec{x}\,\vec{u}(\theta,\theta_0,\dots\theta_3)\} =$$

$$= -x_0 R\sin\theta + \vec{x}\vec{a}\,R\sin^2\theta + i x_0 R\cos\theta - i\vec{x}\left(\frac{\vec{a}}{2}R\sin 2\theta + \vec{b}\right)$$

Заметим, далее, что функции $\qquad \dfrac{1-e^{2i\theta}}{2} = \sin\theta(\sin\theta - i\cos\theta)$

$$\frac{(\sin\theta - i\cos\theta)^N}{\left(1-\frac{x_0^2}{R^2}e^{2i\theta_0}\right)^N\left(1-\frac{x_0}{R}e^{i(\theta_0-\theta)}\right)} \quad ; \quad \frac{\vec{a}}{2}R\sin 2\theta + \vec{b}$$

принадлежат соответственно к классам $C(\infty,\Omega_3)$ и $C(\infty,\Omega_5)$. Поэтому только что сформулированная лемма будет доказана, если мы сможем установить следующее, более общее утверждение.

Если

$$f(\theta,\theta_0,\dots\theta_3) \in C(\infty;\Omega_5)$$

$$\vec{A}(\theta,\theta_0,\dots\theta_3) \in C(\infty;\Omega_5)$$

и если значения A_α вещественны, то функция

$$\mathcal{F} = \varphi(x_0)\,g(x_0^2-\vec{x}^2)\int_0^\pi d\theta\,\sin^N\theta\, f(\theta,\theta_0,\dots\theta_3)\times$$

$$\times\exp\left\{-x_0 R\sin\theta + \vec{x}\vec{a}\,R\sin^2\theta + i x_0 R\cos\theta - i\vec{x}\vec{A}\right\} \qquad (2.5)$$

принадлежит к классу $C(\tau, s; 4|\nu; \Omega_4)$

где $\tau + s + \nu \leqq N+1$

Это утверждение мы и будем сейчас доказывать. Ясно, прежде всего, что выражение (2.5), благодаря условию (2.2), может быть отлично от нуля лишь в области, в которой:

$$x_0 > -\delta \quad , \quad \vec{x}^2 < x_0^2 + \delta \qquad (2.6)$$

Заметим далее, что

$$\frac{\partial^{\tau+\mu}F}{\partial x_{\alpha_1}\dots\partial x_{\alpha_\tau}\,\partial\theta_{\beta_1}\dots\partial\theta_{\beta_\mu}}$$

может быть представлена в виде конечной суммы выражений типа

$$\varphi_\lambda(x_0,\dots x_3)\,P_\lambda(x_0,\dots x_3)\int_0^\pi d\theta\,\sin^N\theta\, f_\lambda(\theta,\dots\theta_3)\times$$

$$\times\exp\left\{-x_0 R\sin\theta + \vec{x}\vec{a}\,R\sin^2\theta + i x_0 R\cos\theta - i\vec{x}\vec{A}\right\}$$

в которых

$$\begin{matrix} \varphi_\lambda \in C(0,0;4) \\ f_\lambda \in C(\infty;\Omega_s) \end{matrix} ; \quad \varphi_\lambda = 0 \quad \text{вне области} \tag{2.6}$$

и $\mathcal{P}_\lambda(x_0,\dots x_3)$ - полиномы степени не большей, чем $\tau+\mu$.

Имеем, наконец:

$$\left| \int_0^\pi d\theta \sin^N\theta \, f_\lambda \exp\{-x_0 R \sin\theta + \vec{x}\vec{a} R \sin^2\theta + i x_0 R \cos\theta - i\vec{x}\vec{A}\} \right| \leqq$$

$$\leqq \max_{(0\leqq\theta\leqq\pi)} |f_\lambda(\overset{0}{\theta},\theta_0,\dots\theta_3)| \int_0^\pi d\theta \sin^N\theta \exp\{-x_0 R\sin\theta + \vec{x}\vec{a} R \sin^2\theta\}$$

Ввиду всего сказанного убеждаемся, что наше доказательство будет закончено как только мы покажем, что в области (2.6) для достаточно больших x_0 , имеет место неравенство:

$$\int_0^\pi e^{-R(x_0\sin\theta - \vec{x}\vec{a}\sin^2\theta)} \sin^N\theta \, d\theta \leqq \frac{const.}{|x_0|^{N+1}}$$

К установлению этого неравенства мы сейчас и перейдем. Примем во внимание, что в рассматриваемой области:

$$x_0 \sin\theta - \vec{a}\vec{x}\sin^2\theta \geqslant x_0\sin\theta - |\vec{a}|\sqrt{x_0^2+\delta}\,\sin^2\theta$$

и потому, на основании (2.I)

$$x_0\sin\theta - \vec{a}\vec{x}\sin^2\theta \geqslant x_0\sin\theta - (1-\sigma)\sqrt{x_0^2+\delta}\,\sin^2\theta$$

Возьмем положительное X так, чтобы

$$(1-\sigma)\sqrt{X^2+\delta} = \left(1-\frac{\sigma}{2}\right)X$$

и будем рассматривать $x_0 \geqslant X$. Тогда

$$x_0\sin\theta - \vec{a}\vec{x}\sin^2\theta \geqslant \frac{\sigma}{2}x_0\sin\theta \, ;$$

откуда

$$\int_0^\pi e^{-R(x_0\sin\theta - \vec{x}\vec{a}\sin^2\theta)}\sin^N\theta\, d\theta \leqq \int_0^\pi e^{-R\frac{\sigma}{2}x_0\sin\theta}\sin^N\theta\, d\theta <$$

$$< \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-R\frac{\sigma}{2}x_0 t}\sin^N\theta\cos\theta\, d\theta + \frac{\pi}{2}e^{-R\frac{\sigma x_0}{2\sqrt{2}}} + \sqrt{2}\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi} e^{-R\frac{\sigma}{2}x_0\sin\theta}\sin^N\theta(-\cos\theta)\,d\theta =$$

$$= 2\sqrt{2}\int_0^{1/\sqrt{2}} e^{-R\frac{\sigma}{2}x_0 t}\, t^N dt + \frac{\pi}{2}e^{-R\frac{\sigma x_0}{2\sqrt{2}}} < 2\sqrt{2}\left(\frac{2}{R\sigma x_0}\right)^{N+1}\int_0^\infty e^{-t}t^N dt + \frac{\pi}{2}e^{-R\frac{\sigma x_0}{2\sqrt{2}}}$$

и наше доказательство закончено.

МЭ.3

§ 3.

Мы перейдем теперь к приложению лемм I,II.

Рассмотрим две обобщенные функции $F_r(x)$, $F_a(x)$ $(x=(x_0,\vec{x}))$, из которых одна будет запаздывающей, а другая опережающей:

$$F_r(x)=0 \quad , \quad x \lesssim 0$$
$$F_a(x)=0 \quad , \quad x \gtrsim 0 \tag{3.1}$$

Построим их "сглаженные Фурье образы":

$$\tilde{F}_r(k,\varepsilon)=\int F_r(x)\exp\{-\varepsilon(x_0^2+\vec{x}^2)+i(k_0x_0-\vec{k}\vec{x})\}dx,$$
$$\varepsilon>0 \tag{3.2}$$
$$\tilde{F}_a(k,\varepsilon)=\int F_a(x)\exp\{-\varepsilon(x_0^2+\vec{x}^2)+i(k_0x_0-\vec{k}\vec{x})\}dx,$$

и заметим, что они являются аналитическими функциями комплексных переменных $k\,(k_0,k_1,\dots k_3)$, не имеющими особенностей на конечном расстоянии.

Введем в рассмотрение функцию $\tilde{F}(k,\varepsilon)$ тех же комплексных переменных, положив:

$$\tilde{F}(k,\varepsilon)=\tilde{F}_r(k,\varepsilon)-T(k,\varepsilon) \quad , \quad \operatorname{Im} k_0>0 \;;$$
$$\tilde{F}(k,\varepsilon)=\tilde{F}_a(k,\varepsilon)-T(k,\varepsilon) \quad , \quad \operatorname{Im} k_0<0 \;, \tag{3.3}$$

где

$$T(k,\varepsilon)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\omega}^{\omega}\frac{\tilde{F}_r(t,\vec{k},\varepsilon)-\tilde{F}_a(t,\vec{k},\varepsilon)}{t-k_0}\,dt \tag{3.4}$$

где ω - некоторое положительное число.

Видим отсюда, что $\tilde{F}(k,\varepsilon)$, $T(k,\varepsilon)$ не имеют на конечном расстоянии других особенностей, кроме "линии разреза":

$$\operatorname{Im} k_0=0.$$

Возьмем k_0 на этой линии. Получим:

$$\tilde{F}(k_0+i0,\bar{k},\varepsilon)-\tilde{F}(k_0-i0,\bar{k},\varepsilon)=$$
$$=\tilde{F}_r(k_0,\bar{k},\varepsilon)-\tilde{F}_a(k_0,\bar{k},\varepsilon)-\{T(k_0+i0,\bar{k},\varepsilon)-T(k_0-i0,\bar{k},\varepsilon)\}$$

Но в случае, когда $-\omega < k_0 < \omega$ можем написать:

$$T(k_0+i0,\bar{k},\varepsilon) - T(k_0-i0,\bar{k},\varepsilon) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_{-\omega}^{\omega}\left\{\tilde{F}_r(t,\bar{k},\varepsilon) - \tilde{F}_a(t,\bar{k},\varepsilon)\right\}\left\{\frac{1}{t-k_0-i0} - \frac{1}{t-k_0+i0}\right\}dt =$$

$$= \tilde{F}_r(k_0,\bar{k},\varepsilon) - \tilde{F}_a(k_0,\bar{k},\varepsilon)$$

Следовательно,

$$\tilde{F}(k_0+i0,\bar{k},\varepsilon) - \tilde{F}(k_0-i0,\bar{k},\varepsilon) = 0 \qquad -\omega < k_0 < \omega \tag{3.5}$$

Видим отсюда, что аналитическая функция $\tilde{F}(k,\varepsilon)$ является регулярной в области

$$|k_0| < \omega \tag{3.6}$$

(не имеет в ней особенностей на конечном расстоянии) и потому мы можем применить к ней лемму I.

Таким образом приходим к интегральному представлению:

$$\tilde{F}(k,\varepsilon) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int_0^{2\pi}\!\!\dots\!\int \Phi_1(\theta_0,\dots\theta_3,\varepsilon) - \Phi_2(\theta_0,\dots\theta_3,\varepsilon) \tag{3.7}$$

в котором

$$\Phi_1(\theta_0,\dots\theta_3;\varepsilon) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{\tilde{F}_r\{Re^{i\theta},\dots u_\alpha(\theta,\theta_0,\dots\theta_3)\dots;\varepsilon\}}{1-\frac{r_0}{R}e^{i(\theta_0-\theta)}}\frac{(1-e^{2i\theta})^N}{(1-\frac{r_0^2}{R^2}e^{2i\theta_0})^N}d\theta +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi}\frac{\tilde{F}_a\{Re^{i\theta},\dots u_\alpha(\theta,\theta_0,\dots\theta_3)\dots;\varepsilon\}}{1-\frac{r_0}{R}e^{i(\theta_0-\theta)}}\left(\frac{1-e^{2i\theta}}{1-\frac{r_0^2}{R^2}e^{2i\theta_0}}\right)^N d\theta \tag{3.8}$$

$$\Phi_2(\theta_0,\dots\theta_3;\varepsilon) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{T\{Re^{i\theta},\dots u_\alpha(\theta,\theta_0,\dots\theta_3)\dots;\varepsilon\}}{1-\frac{r_0}{R}e^{i(\theta_0-\theta)}}\left(\frac{1-e^{2i\theta}}{1-\frac{r_0^2}{R^2}e^{2i\theta_0}}\right)^N d\theta \tag{3.9}$$

Чтобы воспользоваться леммой II, необходимо обеспечить выполнение неравенства (2.I). Потребуем для этого, чтобы входящие здесь τ_α удовлетворяли неравенству:

$$\frac{2|\vec{\tau}|}{R\left(1-\frac{\tau_0^2}{R^2}\right)} < 1 \qquad (3.10)$$

Тогда, действительно, как можно усмотреть из (I.6), требование (2.I) выполняется, например, при

$$\sigma = 1 - \frac{2|\vec{\tau}|}{R\left(1-\frac{\tau_0^2}{R^2}\right)}$$

Займемся прежде всего первым слагаемым в правой части (3.8). Подставив в него (3.2), найдем:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^\pi \frac{\tilde{F}_r\left(Re^{i\theta}, \ldots u_\alpha(\theta,\theta_0,\ldots\theta_3)\ldots;\varepsilon\right\}}{1-\frac{r_0}{R}e^{i(\theta_0-\theta)}}\left(\frac{1-e^{2i\theta}}{1-\frac{\tau_0^2}{R^2}e^{2i\theta_0}}\right)^{\nu} d\theta = \qquad (3.11)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int F_r(x)\, e^{-\varepsilon(x_0^2+\vec{x}^2)}\, I(x;\theta_0,\ldots\theta_3)\,dx$$

$$I(x;\theta_0,\ldots\theta_3) = \int_0^\pi d\theta\, \frac{(1-e^{2i\theta})^{\nu}\exp i\left\{x_0 R e^{i\theta} - \vec{x}\vec{u}\right\}}{\left(1-\frac{\tau_0^2}{R^2}e^{2i\theta_0}\right)^{\nu}\left(1-\frac{\tau_0}{R}e^{i(\theta_0-\theta)}\right)}$$

Заметим теперь, что функция

$$e^{-\varepsilon(x_0^2+\vec{x}^2)} I(x;\theta_0,\ldots\theta_3)\,, \quad \varphi(x_0)\, g(x_0^2-\vec{x}^2)\, I(x;\theta_0,\ldots\theta_3)\, e^{-\varepsilon(x_0^2+\vec{x}^2)}$$

благодаря наличию режущего экспоненциального фактора принадлежат к классу $C(\infty,\infty;4\,|\,\infty;\Omega_\nu)$. С другой стороны, их разность равна нулю, если

$$x_0 \geq 0\,, \quad x_0^2 - \vec{x}^2 \geq 0$$

Но в области, где $x_0 < 0$, или $x_0^2-\vec{x}^2 < 0$, обращается в нуль сама функция $F_r(x)$ (см. (3.1)).

Имеем, таким образом:

$$\int F_r(x)e^{-\varepsilon(x_0^2+\bar{x}^2)} I(x, \theta_0, \quad \theta_3)\,dx =$$

$$= \int F_r(x)e^{-\varepsilon(x_0^2+\bar{x}^2)} \varphi(x_0) g(x_0^2-\bar{x}^2) I(x, \theta_0, \quad \theta_3)$$

Следовательно, выражение (3.II) равно:

$$\frac{1}{2\pi}\int F_r(x)e^{-\varepsilon(x_0^2+\bar{x}^2)} h_+(x, \theta_0, \quad \theta_3)\,dx$$

где

$$h_+(x, \theta_0, \dots \theta) =$$

$$= \varphi(x_0) g(x_0^2-\bar{x}^2) \int\limits_0 d\theta \, \frac{(1-e^{2i\theta})^N \exp i\{x_0 R e^{i\theta} - \bar{x}\,\bar{u}\}}{(1-\frac{r_0^2}{R^2} e^{2i\theta_0})^N (1-\frac{r_0}{R} e^{i(\theta_0-\theta)})} \tag{3.12}$$

Совершенно аналогично убеждаемся, что второе слагаемое в правой части соотношения (3.8) равно:

$$\frac{1}{2\pi}\int F_a(x)e^{-\varepsilon(x_0^2+\bar{x}^2)} h_-(x; \theta_0, \dots \theta_3)\,dx$$

причем

$$h_-(x, \theta_0, \dots \theta) =$$

$$= \varphi(-x_0) g(x_0^2-\bar{x}^2) \int\limits_{\pi}^{2\pi} d\theta \, \frac{(1-e^{2i\theta})^N \exp i\{x_0 R e^{i\theta} \; \bar{x}\,\bar{u}\}}{(1-\frac{r_0^2}{R^2} e^{2i\theta_0})^N (1-\frac{r_0}{R} e^{i(\theta_0-\theta)})} \tag{3.13}$$

Фиксируем теперь сколь угодно высокие показатели r, s, ν и возьмем здесь $N = r + s + \nu - 1$. Тогда, в соответствии с леммой П мы можем утверждать, что обе функции h_+ и h_- -принадлежат к классу $C(r, s; 4/\nu; \Omega_4)$.

Итак, указанным способом мы можем построить в классе $C(r, s; 4/\nu, \Omega_4)$ с любыми сколь угодно высокими показателями такие две функции h_+ и h_- что

$$\Phi_1(\theta_0, \dots \theta_3, \varepsilon) = \frac{1}{2\pi}\int F_r(x)e^{-\varepsilon(x_0^2+\bar{x}^2)} h_+(x, \theta_0, \dots \theta_3)\,dx +$$

$$+ \frac{1}{2\pi}\int F_a(x)e^{-\varepsilon(x_0^2+\bar{x}^2)} h_-(x, \theta_0, \dots \theta_3)\,dx \tag{3.14}$$

Функции h_1, h_2 мы будем называть универсальными в том смысле, что они зависят лишь от показателей ℓ, s, ν, а не от вида функций $F_s(x), F_\alpha(x)$.

§ 4.

Для того, чтобы провести предельный переход при $\varepsilon \to +0$ в соотношениях (3.8), (3.14), сформулируем и докажем следующую лемму.

<u>Лемма II.</u> Рассмотрим некоторую обобщенную функцию $f(x)$ и предположим, что существует такое положительное η, что

$$\int f(x) e^{ipx} dx = 0 \tag{4.1}$$

в области

$$p_0^2 + \vec{p}^{\,2} < \eta^2 \tag{4.2}$$

Фиксируем положительные R, ω, δ, удовлетворяющие неравенствам

$$R^2 + \delta^2 < \omega^2 + \delta^2 < \frac{\eta^2}{2} \tag{4.3}$$

и построим функцию комплексных переменных $k = (k_0, \vec{k}) = (k_0, k_1, \ldots, k_3)$:

$$T(k, \varepsilon) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\omega}^{\omega} \frac{\tilde{f}(t, \vec{k}; \varepsilon)}{t - k_0} dt \tag{4.4}$$

где

$$\tilde{f}(k; \varepsilon) = \int f(x) \exp\{-\varepsilon(x_0^2 + \vec{x}^{\,2}) + ikx\} dx \tag{4.5}$$

Тогда можем утверждать, что

$$T(k; \varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to +0]{} 0 \tag{4.6}$$

равномерно в замкнутой области комплексных переменных:

$$|k_0| \le R, \qquad |\vec{k}| \le \delta \tag{4.7}$$

ЛИТ.4

Доказательство. Рассмотрим выражение (4.5) и подставим в него Фурье-представление:

$$f(x) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 \int \tilde{f}(p)\, e^{-ipx}\, dp$$

Получим:

$$f(k,\varepsilon) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \tilde{f}(p) \left\{ \int \exp\left[-\varepsilon(x_0^2+\vec{x}^2) + i(k-p)x\right] dx \right\} dp =$$

$$= \frac{1}{2^4\pi^2\varepsilon^2} \int \tilde{f}(p) \exp\left\{-\frac{(k_0-p_0)^2+(\vec{k}-\vec{p})^2}{4\varepsilon}\right\} dp \qquad (4.8)$$

Фиксируем теперь положительное $\bar{\eta}$ так, чтобы:

$$\omega^2+\delta^2 < \frac{\bar{\eta}^2}{2} < \frac{\eta^2}{2}. \qquad (4.9)$$

и построим в классе $C(0,\infty;1)$ функцию $v(t)$, для которой

$$v(t) = 1, \quad t \geq \eta^2$$
$$v(t) = 0 \quad t < \bar{\eta}^2$$

Заметим, что функции (k фиксировано):

$$\exp\left\{-\frac{(k_0-p_0)^2+(\vec{k}-\vec{p})^2}{4\varepsilon}\right\}, \quad U(p_0^2+\vec{p}^2)\exp\left\{-\frac{(k_0-p_0)^2+(\vec{k}-\vec{p})^2}{4\varepsilon}\right\}$$

принадлежат в классу $C(\infty,\infty;4)$. Разность их равна нулю при

$$p_0^2+\vec{p}^2 \geq \eta^2$$

с другой стороны, по условию леммы, $\tilde{f}(p)$ равна нулю, когда

$$p_0^2+\vec{p}^2 < \eta^2$$

Видим, следовательно, что соотношение (4.8) может быть представлено в форме:

$$f(k,\varepsilon) = \int \tilde{f}(p)\, H_k(p,\varepsilon)\, dp \qquad (4.10)$$

$$H_k(p,\varepsilon) = \frac{1}{2^4\pi^2\varepsilon^2} U(p_0^2+\vec{p}^2) \exp\left\{-\frac{(k_0-p_0)^2+(\vec{k}-\vec{p})^2}{4\varepsilon}\right\} \qquad (4.11)$$

Будем проводить дальнейшие рассуждения, фиксировав k произвольны образом в замкнутой области:

$$|k_0| \leq \omega \quad , \quad |\vec{k}| \leq \delta \tag{4.I2}$$

Проанализируем теперь характер стремления к нулю последовательности $H_k(p,\varepsilon)$ при $\varepsilon \to +0$.

Так как по определению U :

$$U(p_0^2+\vec{p}^2) = 0 \qquad \text{при} \quad p_0^2+\vec{p}^2 \leq \eta^2 \tag{4.I3}$$

то мы можем ограничиться областью:

$$p_0^2+\vec{p}^2 > \eta^2 \tag{4.I4}$$

Имеем здесь:

$$Re\{(p_0-k_0)^2+(\vec{p}-\vec{k})^2\} = \{p_0 - Re\,k_0)^2 + (\vec{p}-Re\,\vec{k})^2 - (Jm\,k_0)^2 -$$

$$-(Jm\,\vec{k})^2 = p_0^2+\vec{p}^2+(Re\,k_0)^2+(Re\,\vec{k})^2 - 2p_0\,Re\,k_0 -$$

$$-2\vec{p}\,Re\,\vec{k} - (Jm\,k_0)^2 - (Jm\,\vec{k})^2$$

Но

$$p_0\,Re\,k_0 + \vec{p}\,Re\,\vec{k} \leq \sqrt{p_0^2+\vec{p}^2}\sqrt{(Re\,k_0)^2+(Re\,\vec{k})^2}$$

и потому:

$$Re\{(p_0-k_0)^2+(\vec{p}-\vec{k})^2\} \geq$$

$$\geq 2\left\{\frac{\sqrt{p_0^2+\vec{p}^2}}{2} - \sqrt{(Re\,k_0)^2+(Re\,\vec{k})^2}\right\}^2 - (Jm\,k_0)^2 - (Jm\,\vec{k})^2 -$$

$$-(Re\,k_0)^2 - (Re\,\vec{k})^2 + \frac{p_0^2+\vec{p}^2}{2} \geq \frac{p_0^2+\vec{p}^2}{2} - (|k_0|^2+|\vec{k}|^2)$$

Поэтому, ввиду (4.9), (4.I2), (4.I4)

$$Re\{(p^0-k^0)^2-(\vec{p}-\vec{k})^2\} > \zeta^2 + \frac{p_0^2+\vec{p}^2}{2} - \frac{\eta^2}{2}$$

где

$$\zeta^2 = \frac{\eta^2}{2} - (\omega^2+\delta^2)$$

Таким образом,

$$\left|\exp\left\{-\frac{(k_0-p_0)^2+(\vec{k}-\vec{p})^2}{4\varepsilon}\right\}\right| < e^{-\frac{3^2}{4\varepsilon}-\frac{1}{8\varepsilon}(p_0^2+\vec{p}^2-\bar{\eta}^2)} \tag{4.15}$$

Отсюда следует, благодаря (4.11), что

$$(p_0^2+\vec{p}^2)^s H_k(p,\varepsilon) \underset{\varepsilon\to+0}{\longrightarrow} 0 \tag{4.16}$$

равномерно для всех p и всех k из (4.12), при любом сколь угодно большом значении s.

Более того, поскольку при дифференцировании режущая экспонента остается неизменной и может лишь умножаться на полиномиальные выражения, имеем также равномерно для всех частных производных:

$$(p_0^2+\bar{p}^2)\frac{\partial^{\nu+\mu} H_k(p,\varepsilon)}{\partial k_{\alpha_1}\ldots\partial k_{\alpha_\nu}\partial p_{\beta_1}\ldots\partial p_{\beta_\mu}} \underset{\varepsilon\to+0}{\longrightarrow} 0 \tag{4.17}$$

Приняв во внимание (4.10), видим отсюда, что при $\varepsilon\to+0$, $\tilde{f}(k,\varepsilon)$ стремится к нулю со всеми своими частными производными по $k_0,\ldots k_3$ равномерно в области (4.12).

Воспользуемся теперь этим результатом для исследования выражения (4.4). Имеем:

$$T(k,\varepsilon) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\omega}^{\omega}\frac{\tilde{f}(t,\bar{k},\varepsilon)-\tilde{f}(k_0,\bar{k},\varepsilon)}{t-k_0}\,dt +$$

$$+\tilde{f}(k_0,\vec{k};\varepsilon)\frac{1}{2\pi i}\int_{-\omega}^{\omega}\frac{dt}{t-k_0}$$

откуда

$$|T(k,\varepsilon)| < \frac{\omega}{\pi}\max_{|t|\le\omega}\left|\frac{\tilde{f}(t,\bar{k},\varepsilon)-\tilde{f}(k_0,\bar{k},\varepsilon)}{t-k_0}\right| +$$

$$+|\tilde{f}(k_0,\vec{k};\varepsilon)|\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{-\omega}^{\omega}\frac{dt}{t-k_0}\right|$$

Но, на основании только что полученного результата

$$\max_{|t|\le\omega}\left|\frac{\tilde{f}(t,\bar{k},\varepsilon)-\tilde{f}(k_0,\bar{k},\varepsilon)}{t-k_0}\right| \underset{\varepsilon\to+0}{\longrightarrow} 0, \quad |\tilde{f}(k_0,\bar{k};\varepsilon)| \underset{\varepsilon\to+0}{\longrightarrow} 0$$

равномерно в области (4.12). С другой стороны, если

$$|k_0| \le R < \omega$$

то интеграл

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{-\omega}^{\omega}\frac{dt}{t-k_0}\right| < \frac{1}{2\pi}\ln\left|\frac{\omega+R}{\omega-R}\right| + \frac{1}{2}$$

является ограниченным.

Таким образом, в области (4.7) имеем, в смысле равномерной сходимости:

$$T(k,\varepsilon) \underset{\varepsilon\to+0}{\longrightarrow} 0$$

и наша лемма доказана.

§ 5.

Рассмотрим теперь вопрос о предельном переходе: $\varepsilon \to 0$ в интегральном представлении (3.7) - (3.9), (3.14).

Сделаем сейчас основное допущение о том, что

$$\tilde{F}_r(p) - \tilde{F}_a(p) = 0 \qquad (5.1)$$

для

$$p_0^2 + \bar{p}^2 < \eta^2 \qquad (5.2)$$

Тогда, чтобы воспользоваться леммой III, нам надо обеспечить выполнение неравенств (4.3) и (4.7) аргументами k , входящими в выражение T , фигурирующее в правой части интегрального представления (3.9).

Иначе говоря, мы должны гарантировать, что:

$$R^2 + \bar{r}^2 < \frac{\eta^2}{2}, \qquad R^2 + \bar{u}^2 < \frac{\eta^2}{2} \qquad (5.3)$$

Кроме того, для применимости леммы II нам следует также принять во внимание еще неравенство

$$\frac{2|\bar{r}|}{1-\frac{r_0^2}{R^2}} < R. \qquad (5.4)$$

Но, как это следует из (1.6):

$$|u_\alpha| < |a_\alpha| R + |b_\alpha| < |a_\alpha| R\left(1+\frac{r_0^2}{2R^2}\right) + r_\alpha|\cos\theta_\alpha| <$$

$$< \frac{2r_\alpha}{1-\frac{r_0^2}{R^2}}|\sin\theta_\alpha|\left(1+\frac{r_0^2}{2R^2}\right) + r_\alpha|\cos\theta_\alpha|,$$

откуда

$$\bar{u}^2 < \bar{r}^2\left\{4\left(\frac{1+\frac{r_0^2}{2R^2}}{1-\frac{r_0^2}{R^2}}\right)^2 + 1\right\}$$

МД. 5

Видим, следовательно, что все требуемые условия (5.3), (5.4) будут удовлетворены, если выбрать r_0, r_α, R так, чтобы

$$2|\bar{F}| < R\left(1 - \frac{r_0^2}{R^2}\right), \quad R^2 + R^2\left(1 + \frac{r_0^2}{2R^2}\right)^2 + \bar{F}^2 < \frac{\eta^2}{2} \tag{5.5}$$

Этот выбор мы и примем для дальнейшего.

Возвратимся теперь к рассмотрению выражения (3.9) и заметим, что на основании леммы Ш имеем равномерно на торе Ω_s

$$T\left\{ Re^{i\overset{\circ}{\theta}}, \dots u_\alpha(\theta, \theta_0, \dots \theta_3), \dots ; \varepsilon \right\} \underset{\varepsilon \to +0}{\longrightarrow} 0$$

Поэтому, также в смысле равномерной сходимости

$$\Phi_2(\theta_0, \dots \theta_3, \varepsilon) \underset{\varepsilon \to +0}{\longrightarrow} 0 \tag{5.6}$$

Обратимся теперь к формуле (3.I4). Пусть обобщенные функции $F_r(x)$ и $F_a(x)$ интегрируемы на классе $C(r, s; 4)$. Возьмем $N \geq r + s + \nu - 1$ По лемме h_+ и h_- принадлежат классу $C(r, s; 4)$.

Тогда, переходя к пределу, полу4им, в смысле равномерной сходимости:

$$\Phi_1(\theta_0, \dots \theta_3, \varepsilon) \to \frac{1}{2\pi} \int F_r(x) h_+(x, \theta_0, \dots \theta_3) dx + \frac{1}{2\pi} \int F_a(x) h_-(x, \theta_0, \dots \theta_3) dx \tag{5.7}$$

Приняв во внимание интегральное представление (3.7) и полученные предельные соотношения (5.6), (5.7), убеждаемся, что в любой замкнутой области, содержащейся в рассматриваемой области (I.3) комплексных переменных, функции $\tilde{F}(k, \varepsilon)$ равномерно сходятся к пределу:

$$\tilde{F}(k) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 \int_0^{2\pi} \dots \int \frac{\phi(\theta_0, \dots \theta_3)\, d\theta_0 \dots d\theta_3}{\left(1 - \frac{k_0}{r_0} e^{-i\theta_0}\right) \prod_\alpha \left(1 - \frac{k_\alpha}{r_\alpha} e^{-i\theta_\alpha}\right)} \tag{5.8}$$

$$\phi(\theta_0, \dots \theta_3) = \frac{1}{2\pi} \int F_r(x) h_+(x, \theta_0, \dots \theta_3) dx + \frac{1}{2\pi} \int F_a(x) h_-(x, \theta_0, \dots \theta_3) dx$$

являющемуся аналитической функцией k, регулярной в области (I.3).

Преобразуем сейчас полученное интегральное представление к импульсным переменным. Обозначим, как всегда, фурье-образы функций h_+, h_- через $\tilde{h}_+, \tilde{h}_-$ и заметим, что, каковы бы ни были показатели r_1, s_1 мы всегда можем подобрать для них такие r, s, при которых из включений:

$$h_+ \in C(r, s, 4 | \nu; \Omega_4); \quad h_- \in C(r, s; 4 | \nu; \Omega_4)$$

будут следовать включения:

$$\tilde{h}_+ \in C(r_1, s_1; 4 | \nu; \Omega_4) \ , \ \tilde{h}_- \in C(r_1, s_1; 4 | \nu; \Omega_4)$$

Возьмем r_1, s_1 так, чтобы $\tilde{F}_r(p), \tilde{F}_a(p)$ были интегрируем на классе $C(r_1, s_1; \nu)$. Тогда:

$$\phi(\theta_0, \dots \theta_3) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^5 \int \tilde{F}_r(p) \tilde{h}_+(-p, \theta_0, \dots \theta_3) dp +$$

$$+ \frac{1}{(2\pi)^5} \int \tilde{F}_a(p) \tilde{h}_-(-p, \theta_0, \dots \theta_3) dp$$

Положим: $H_\pm(p,k) =$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^9 \int_0^{2\pi} \dots \int \frac{\tilde{h}_\pm(-p, \theta_0, \dots \theta_3) d\theta_0 \dots d\theta_3}{\left(1 - \frac{k_0}{r_0} e^{-i\theta_0}\right) \prod_\alpha \left(1 - \frac{k_\alpha}{r_\alpha} e^{-i\theta_\alpha}\right)} \tag{5.9}$$

Введя такие функции, мы сможем представить соотношение (5.8) в виде:

$$\tilde{F}(k) = \int \tilde{F}_r(p) H_+(p,k) dp + \int \tilde{F}_a(p) H_-(p,k) dp \tag{5.10}$$

Функции $H_\pm$, определенные формулой (5.9), очевидно, обладают тем общим свойством, что, какова бы ни была обобщенная функция $f(p)$ интегрируемая на классе $C(r_1, s_1; 4)$, выражения

$$\int f(p) H_\pm(p,k) dp$$

являются аналитическими функциями k , регулярными в области (I.3).

Условимся, для сокращения, иметь в виду именно это свойство, говоря, что $H_\pm(p,k)$ как функция p принадлежит к классу $C(r_1, s_1; 4)$ а как функция k является аналитической, регулярной в области (I.3). Функции эти мы будем называть универсальными, поскольку их вид зависит лишь от показателей класса C , числа η и т.п., а не от специального выбора F_r, F_a в данном классе.

Рассмотрим теперь вещественные[x)] $k = p$, лежащие в области (I.3). На основании леммы Ш имеем равномерно

$$T(p_0 \pm i0, \vec{p}, \varepsilon) \to 0 \quad , \quad \varepsilon \to +0$$

---

x) Вообще мы условимся вещественные импульсы обозначать буквами p , а комплексные - буквами k .

и потому заключаем из (3.3), что в рассматриваемой области имеем, также в смысле равномерной сходимости:

$$\tilde{F}_r(p,\varepsilon) \to \tilde{F}(p), \quad \tilde{F}_a(p,\varepsilon) \to \tilde{F}(p), \quad \varepsilon \to +0$$

С другой стороны, во всем пространстве вещественных p справедливо несобственное (обобщенное) предельное соотношение

$$\tilde{F}_r(p,\varepsilon) \to \tilde{F}_r(p), \quad \tilde{F}_a(p,\varepsilon) \to \tilde{F}_a(p), \quad \varepsilon \to +0$$

Следовательно,

$$\tilde{F}_r(p) = \tilde{F}_a(p) = \tilde{F}(p)$$

в области

$$|p_\alpha| < r_\alpha, \qquad \alpha = 0,1,2,3$$

Полученные здесь результаты можно резюмировать в виде следующей теоремы:

Теорема I. I^0) Пусть будут даны обобщенные функции $F_r(x)$, $F_a(x)$ из которых первая будет запаздывающей, а вторая - опережающей.

2^0) Пусть существует такое положительное η, что

$$\tilde{F}_r(p) = \tilde{F}_a(p)$$

в области

$$p_0^2 + \vec{p}^{\,2} < \eta^2$$

3^0) Возьмем положительные числа r_0, r_α, R удовлетворяющие неравенствам:

$$2|F| < R\left(1 - \frac{r_0^2}{R^2}\right), \quad R^2 + R^2\left(1 + \frac{r_0^2}{2R^2}\right) + F^2 < \frac{\eta^2}{2} \qquad (5.II)$$

Тогда можно построить аналитическую функцию $\tilde{F}(k)$ комплексных переменных $k\,(k_0, k_1, \ldots k_3)$ регулярную в области

$$|k_\alpha| < r_\alpha, \qquad \alpha = 0,1,\ldots 3 \qquad (5.I2)$$

таким образом, что

$$\tilde{F}(p) = \tilde{F}_a(p) = \tilde{F}_r(p)$$

в области вещественных переменных $p\,(p_0, \ldots p_3)$, определенной неравенствами (5.I2).

Кроме того, взяв достаточно большие показатели r, s мы можем построить "универсальные" функции $H_{\pm}(p,k)$ со свойствами:

а) $H_{\pm}(p,k)$ как функция p принадлежит к классу $C(r;s;4)$ а как функция k является аналитической, регулярной в области (5.I2);

б) в области (5.I2) имеет место интегральное представление:

$$\tilde{F}(k) = \int \tilde{F}_r(p) H_+(p,k)\,dp + \int \tilde{F}_a(p) H_-(p,k)\,dp$$

§ 6.

Перейдем теперь к обобщению теоремы I.

Рассмотрим обобщенные функции:

$$F_{r,r}(x_1,x_2), \qquad F_{r,a}(x_1,x_2)$$

$$F_{a,r}(x_1,x_2), \qquad F_{a,a}(x_1,x_2)$$

для которых

$$\begin{aligned} F_{r,r}(x_1,x_2) &= 0 \quad \text{если} \quad x_1 \lesssim 0 \quad \text{или} \quad x_2 \lesssim 0 \\ F_{r,a}(x_1,x_2) &= 0 \quad \text{если} \quad x_1 \lesssim 0 \quad \text{или} \quad x_2 \gtrsim 0 \\ F_{a,r}(x_1,x_2) &= 0 \quad \text{если} \quad x_1 \gtrsim 0 \quad \text{или} \quad x_2 \lesssim 0 \\ F_{a,a}(x_1,x_2) &= 0 \quad \text{если} \quad x_1 \gtrsim 0 \quad \text{или} \quad x_2 \gtrsim 0 \end{aligned} \tag{6.I}$$

Предположим, что при некотором положительном η :

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{r,j}(p_1,p_2) - \tilde{F}_{a,j}(p_1,p_2) &= 0 \qquad \text{если} \quad p_1^{0\,2} + \bar{p}_1^{\,2} < \eta^2 \quad j = r,a \\ \tilde{F}_{j,r}(p_1,p_2) - \tilde{F}_{j,a}(p_1,p_2) &= 0 \qquad \text{если} \quad p_2^{0\,2} + \bar{p}_2^{\,2} < \eta^2 \end{aligned} \tag{6.2}$$

Применим теорему I к выражениям:

$$\tilde{F}_{r,j}(p_1,p_2), \qquad \tilde{F}_{a,j}(p_1,p_2)$$

рассматривая их как функции p_1 . Придем к функциям

$$\tilde{F}_j(k_1,p_2)$$

к которым опять применим теорему I, но уже по переменным p_2

Таким образом, убеждаемся в справедливости следующего утверждения.

Пусть $r_0, \dots r_3$ любые положительные числа, удовлетворяющие неравенствам (5.II).

Тогда существует аналитическая функция $\tilde{F}(k_1, k_2)$ комплексных $k_1(k_{10},\dots,k_{13})$, $k_2(k_{20},\dots,k_{23})$ регулярная в области:

$$|k_{1\alpha}| < r_\alpha \,, \quad |k_{2\alpha}| < r_\alpha \,, \quad \alpha = 0,\dots,3 \tag{6.3}$$

Для вещественных $p_1(p_{10},\dots p_{13})$, $p_2(p_{20},\dots,p_{23})$ из этой области:

$$\tilde{F}(p_1, p_2) = \tilde{F}_{ij}(p_1, p_2); \qquad i = r, a; \quad j = r, a.$$

Кроме того, в рассматриваемой области (6.3) имеет место интегральное представление:

$$\tilde{F}(k_1, k_2) = \sum_{(i,j=r,a)} \int \tilde{F}_{i,j}(p_1, p_2)\, H_{i,j}(p_1, p_2; k_1, k_2)\, dp_1\, dp_2 \tag{6.4}$$

$$H_{ij}(p_1, p_2; k_1, k_2) = H_i(p_1, k_1)\, H_j(p_2, k_2)\,; \quad H_r = H_+\,,\ H_a = H_-\,;$$

если только показатели класса $C(r,s;4)$, к которому должны принадлежать $H_\pm$ (как функции p), взяты достаточно высокими.

Рассмотрим обобщенные функции

$$F_{i,j}(x_1, x_2, t)\,; \qquad i,j = r,a \qquad t \text{ - вещ. число.}$$

обладающие свойствами (6.I), (6.2) независимо от t.

Заметим, что по самому определению обобщенных функций существует такой класс $C(r,s;9)$, на котором $F_{i,j}$ будут интегрируемыми.

Возьмем произвольную функцию $h(t)$ из класса $C(r,s;1)$ и рассмотрим интеграл

$$F_{ij}(x_1, x_2) = \int F_{ij}(x_1, x_2, t)\, h(t)\, dt$$

Нетрудно видеть, что эти $F_{i,j}(x_1, x_2)$ будут обобщенными функциями, интегрируемыми на классе $C(r,s;8)$ и что они удовлетворяют условиям (6.I), (6.2). Мы можем, поэтому, воспользоваться ранее сформулированным утверждением и придти, таким образом, к следующей лемме.

Лемма IУ. Пусть будут даны обобщенные функции

$$F_{i,j}(x_1, x_2, t)\,, \qquad i,j = r, a.$$

удовлетворяющие условиям:

$$\begin{aligned}
&F_{rr}(x_1, x_2, t) = 0 &&\text{если } x_1 \lesssim 0 &&\text{или } x_2 \lesssim 0 \\
&F_{ra}(x_1, x_2, t) = 0 &&\text{если } x_1 \lesssim 0 &&\text{или } x_2 \gtrsim 0 \\
&F_{ar}(x_1, x_2, t) = 0 &&\text{если } x_1 \gtrsim 0 &&\text{или } x_2 \lesssim 0 \\
&F_{aa}(x_1, x_2, t) = 0 &&\text{если } x_1 \gtrsim 0 &&\text{или } x_2 \gtrsim 0
\end{aligned} \tag{6.5}$$

MD 6

$$\tilde{F}_{\tau,\gamma}(P_1 P_2, t)-\tilde{F}_{a,\gamma}(P_1,P_2,t)=0, \text{ если } P_{10}^2+\vec{P}_1^2<\eta^2, \ \gamma=\tau,a$$
$$\tilde{F}_{i\tau}(P_1,P_2,t)-\tilde{F}_{ia}(P_1,P_2,t)=0, \text{ если } P_{20}^2+\vec{P}_2^2<\eta^2, \ i=\tau,a. \qquad (6.6)$$

Пусть $\tau_0, \ \tau_3$ – любые положительные числа, удовлетворяющие неравенствам (5.II)

Тогда существует обобщенная функция t, являющаяся аналитической функцией $\tilde{F}(K_1,K_2,t)$ комплексных переменных K_1, K_2, регулярной в области:

$$|K_{1\alpha}|<\tau_\alpha, \ |K_{2\alpha}|<\tau_\alpha, \ \alpha=0,1,2,3 \qquad (6.7)$$

причем $\tilde{F}(P_1 P_2 t)=\tilde{F}_{i\gamma}(P_1 P_2 t)$

в области вещественных P_1, P_2, удовлетворяющих неравенствам (6.7).

Рассмотрим теперь обобщенные функции

$$f_{i\gamma}(x_1 x_2 t), \quad i\gamma-\tau, a$$

удовлетворяющие условиям (6.5). Предположим, что вместо условий (6.6) выполняются следующие условия:

$$\tilde{f}_{\tau,\gamma}(P_1 P_2 t)-\tilde{f}_{a,\gamma}(P_1 P_2 t)=0,$$
$$\text{если } |P_{10}-\lambda_{10}(t)|^2+|\vec{P}_1-\vec{\lambda}_1(t)|^2<\eta^2\varepsilon_1^2(t) \qquad (6.8)$$

$$\tilde{f}_{i,\tau}(P_1 P_2 t)-\tilde{f}_{i,a}(P_1 P_2 t)=0, \qquad (6.9)$$
$$\text{если } |P_{20}-\lambda_{20}(t)|^2+|\vec{P}_2-\vec{\lambda}_2(t)^2<\eta^2\varepsilon_2^2(t)$$
$$\tilde{f}_{i\gamma}(P_1 P_2 t)=0, \text{ если } t<N$$

Предположим, далее, что фигурирующие здесь функции $\lambda(t)$, $\varepsilon(t)$ обладают нижеуказанными общими свойствами:

I°) $\lambda_{\gamma a}(t), \varepsilon_\gamma(t)$ непрерывны и неограниченно дифференцируемы в интервале $N\leq t<\infty$;

MD 61

2°) $\lambda_j(t), \varepsilon_j(t)$ полиномиально ограничены;

3°) $\varepsilon_j(t)$ существенно положительны и удовлетворяют неравенству

$$\varepsilon_j(t) > \gamma\,|t|^m, \quad \gamma > 0, \quad m > 0.$$

4°) любая производная (какого угодно порядка) функций $\lambda_j(t), \varepsilon_j(t)$ равномерно ограничена в интервале $N \leq t \leq \infty$. Продолжим теперь каким-либо образом эти функции $\lambda(t)$, $\varepsilon(t)$ на всю вещественную ось с сохранением всех перечисленных свойств.

Тогда нетрудно убедиться, что, каковы бы ни были показатели r, s класса C всегда можно найти показатели r_1, s_1 таким образом, что из

$$h(x_1 x_2 t) \in C(r_1; s_1, 9)$$

вытекает:

$$e^{i\{\lambda_1(t)x_1+\lambda_2(t)x_2\}}\, h\{\varepsilon_1(t)x_1, \varepsilon_2(t)x_2, t\} \in C(r, s; 9)$$

Следовательно, для любой обобщенной функции $f(x_1 x_2 t)$ мы можем подобрать такие r_1, s_1, что интеграл

$$\int f(x_1 x_2 t)\, e^{i\{\lambda_1(t)x_1+\lambda_2(t)x_2\}}\, h\{\varepsilon_1(t)x_1, \varepsilon_2(t)x_2, t\}\, dx_1 dx_2 dt$$

будет определен как линейный функционал от $h\{\varepsilon_1(t)x_1, \varepsilon_2(t)x_2, t\} \in C(r, s; 9)$
Но этот линейный функционал может быть преобразован к виду:

$$\int f\left(\frac{x_1}{\varepsilon_1(t)}, \frac{x_2}{\varepsilon_2(t)}, t\right) e^{i\left\{\frac{\lambda_1(t)}{\varepsilon_1(t)}x_1+\frac{\lambda_2(t)}{\varepsilon_2(t)}x_2\right\}} \frac{1}{(\varepsilon_1 \varepsilon_2)^4}\, h(x_1 x_2 t)\, dx_1 dx_2 dt$$

определяющему обобщенную функцию

$$\frac{1}{(\varepsilon_1 \varepsilon_2)^4}\, f\left(\frac{x_1}{\varepsilon_1(t)}, \frac{x_2}{\varepsilon_2(t)}, t\right) e^{i\left\{\frac{\lambda_1(t)}{\varepsilon_1(t)}x_1+\frac{\lambda_2(t)}{\varepsilon_2(t)}x_2\right\}}$$

Таким образом, раз $f_{ij}(x_1 x_2 t)$ являются обобщенными функциями, выражения

$$F_{ij}(x_1 x_2 t) = \frac{1}{(\varepsilon_1 \varepsilon_2)^4}\, f_{ij}\left(\frac{x_1}{\varepsilon_1(t)}, \frac{x_2}{\varepsilon_2(t)}, t\right) e^{i\left\{\frac{\lambda_1(t)}{\varepsilon_1(t)}x_1+\frac{\lambda_2(t)}{\varepsilon_2(t)}x_2\right\}} \qquad (6.10)$$

также будут обобщенными функциями.

Далее, ввиду того, что f_{ij} удовлетворяют условиям (6.5), введенные функции F_{ij} также им удовлетворяют.

Заметим еще, что

$$\widetilde{F}_{i\gamma}(p_1 p_2 t)=\widetilde{f}_{i\gamma}(\lambda_1(t)+\varepsilon_1(t)p_1,\ \lambda_2(t)+\varepsilon_2(t)p_2,\ t\}$$

Поэтому из (6.8) вытекает, что $\widetilde{F}_{i\gamma}$ удовлетворяют условиям (6.6).

Итак, мы можем применить к функциям $\widetilde{F}_{i\gamma}(x_1 x_2 t)$ лемму IУ, в результате чего убеждаемся в справедливочти следующего утверждения:

Лемма У. Пусть будут даны обощенные функции

$$f_{i\gamma}(x_1\ x_2\ t), \qquad i,\gamma=r, a$$

удовлетворяющие условиям (6.5), (6.8), (6.9). Предполагается, что функции $\lambda_{\gamma\alpha}(t)$, $\varepsilon_\gamma(t)$ обладают свойствами (I^0), (2^0), (3^0), (4^0). Возьмем числа r_α, $\alpha=0,1,2,3$ так же как и в теореме I. Тогда существует обощенная функция

$$\widetilde{f}(\lambda_1(t)+\varepsilon_1(t)K_1,\quad \lambda_2(t)+\varepsilon_2(t)K_2,\ t\}$$

являющаяся аналитической функцией комплексных переменных K_1, K_2 регулярной в области

$$|K_{1\alpha}|<r_\alpha,\ |K_{2\alpha}|<r_\alpha;\ \alpha=0,\dots 3 \tag{6.II}$$

такая, что в области вещественных p_1, p_2, удовлетворяющих неравенствам (6.II):

$$f(\lambda_1(t)+\varepsilon_1(t)p_1,\ \lambda_2(t)+\varepsilon_2(t)p_2,\ t)=$$

$$=\widetilde{f}_{i\gamma}(\lambda_1(t)+\varepsilon_1(t)p_1,\ \lambda_2(t)+\varepsilon_2(t)p_2,\ t).$$

Кроме того,

$$\widetilde{f}\{\lambda_1(t)+\varepsilon_1(t)K_1,\ \lambda_2(t)+\varepsilon_2(t)K_2,\ t\}=0. \qquad \text{при } t<N$$

§ 7.

Теорема II. При данных постоянных

$$M\geq\mu>0,\ \delta\geq 0,\ 1\geq\omega\geq 0,\ V\geq 0$$

можно найти такое $\rho>0$, чтобы имело место следующее утверждение:

Пусть

$$f_{i\gamma}(x_1\ x_2\ t), \qquad i\gamma=r, a$$

являются обобщенными функциями, инвариантными по отношению к пространственным вращениям (векторов $\vec{x}$), удовлетворяющими условиям (6.5) и, кроме того, условиям[x]:

$$\tilde{f}_{rj}(p_1 p_2 t) - \tilde{f}_{aj}(p_1 p_2 t) = 0\,, \text{ если } \begin{array}{l}(p_{10}+t)^2 - \vec{p}_1^{\,2} < (M+\mu)^2 \\ (p_{10}-t)^2 - \vec{p}_1^{\,2} < 9\mu^2\end{array} \tag{7.1}$$

$$\tilde{f}_{ir}(p_1 p_2 t) - \tilde{f}_{ia}(p_1 p_2 t) = 0\,, \text{ если } \begin{array}{l}(p_{20}+t)^2 - \vec{p}_2^{\,2} < (M+\mu)^2 \\ (p_{20}-t)^2 - \vec{p}_2^{\,2} < 9\mu^2\end{array} \tag{7.2}$$

$$\tilde{f}_{ij}(p_1 p_2 t) = 0\,, \text{ если } t < \frac{1}{2}\left[M+\mu(1+\delta)\right] \tag{7.3}$$

Тогда существует обобщенная функция t, являющаяся аналитической функцией комплексных переменных $z_1, \dots z_5$

$$\Phi(z_1, \dots z_5, t)$$

регулярной в области

$$|z_1 - M^2| < \rho\mu^2\,, \quad |z_3 - \tau| < \rho\mu^2\,, \quad |z_4 - \tau| < \rho\mu^2$$

$$|z_5 + 4a^2| < \rho\mu^2\left(\frac{\mu}{t}\right)^2, \quad -\nu \leqq \tau < \mu^2(1-\omega), \quad 4a^2 \leqq u^2 \tag{7.4}$$

где

$$u^2 = \left[M+\mu(1+\delta) + \frac{M^2-\mu^2(1-\omega)}{M+\mu(1+\delta)}\right]^2 - 4M^2 \tag{7.5}$$

и обладающая свойствами:

1⁰) $\Phi(z_1, \dots z_5, t) = 0$ если $t < \frac{1}{2}\left[M+\mu(1+\delta)\right]$

2⁰) В области вещественных 4-векторов p_1, p_2, для которой величины:

$$z_1 = (p_{10}+t)^2 - \vec{p}_1^{\,2}\,, \quad z_2 = (p_{20}+t)^2 - \vec{p}_2^{\,2}\,; \quad z_3 = (p_{10}-t)^2 - \vec{p}_1^{\,2}$$

$$z_4 = (p_{20}-t)^2 - \vec{p}_2^{\,2}\,, \quad z_5 = (p_{10}-p_{20})^2 - (\vec{p}_1 - \vec{p}_2)^2 \tag{7.6}$$

---

x) Число 9 может быть заменено любым числом $\sigma > 1$

удовлетворяют неравенствам:

$$|z_1 - M^2| < \rho\mu^2, \quad |z_2 - M^2| < \rho\mu^2, \quad |z_3 - \tau| < \rho\mu^2, \quad |z_4 - \tau| < \rho\mu^2,$$

$$|z_5 + 4a^2| < \rho\mu^2 \left(\frac{M}{t}\right)^2, \quad -V \leqq \tau < \mu^2(1-\omega), \quad 4a^2 \leqq u^2 \tag{7.7}$$

имеем:

$$\tilde{f}_{ij}(p_1 p_2 t) = \Phi(z_1, \dots z_5, t) \tag{7.8}$$

Доказательство. Будем основываться на лемме У. Положим

$$\zeta_{10}(t) = \zeta_{20}(t) = \frac{M^2 - \tau}{4t}$$

$$\vec{\zeta}_1(t) = \vec{e}_1 \varphi_1(t) + \vec{e}_2 a, \quad \vec{\zeta}_2(t) = \vec{e}_1 \varphi(t) - \vec{e}_2 a \tag{7.9}$$

$$\varphi(t) = \sqrt{\left[t + \frac{M^2 - \tau}{4t}\right]^2 - M^2 - a^2}$$

Здесь $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ два произвольных, взаимно перпендикулярных орта; – произвольные вещественные числа, удовлетворяющие неравенствам:

$$-V \leqq \tau < \mu^2(1-\omega), \quad 4a^2 \leqq u^2 \tag{7.10}$$

Введем также

$$\varepsilon_1(t) = \varepsilon_2(t) = \frac{1}{t + \frac{M^2 - \tau}{4t}} \tag{7.11}$$

Заметим, что в интересующем нас интервале

$$t \geqq \frac{M + \mu(1+\delta)}{2}$$

будет

$$\left(t + \frac{M^2 - \tau}{4t}\right)^2 - M^2 - a^2 > 0$$

Поэтому функции $\varepsilon_j(t)$, $\zeta_j(t)$ удовлетворяют условиям (1^0) – (4^0) леммы У.

Возьмем, далее, число ζ так, чтобы

$$\sup_{2t \geq M+\mu(1+\delta)} \left\{ \zeta \frac{2\sqrt{-M^2+\left(t+\frac{M^2-\tau}{4t}\right)^2}}{t+\frac{M^2-\tau}{4t}} + \zeta^2 \frac{\mu^2}{\left(t+\frac{M^2-\tau}{4t}\right)^2} \right\} < \begin{cases} 2\frac{M}{\mu}+1 \\ 8 \end{cases} \tag{7.12}$$

Ясно тогда, что

$$2\sqrt{[\varsigma_{j0}(t)\pm t]^2 - \vec{\varsigma}_j^{\,2}(t)}\, \varepsilon_j(t)\zeta\mu + \varepsilon_j^2(t)\zeta^2\mu^2 < \begin{cases} 2M\mu+\mu^2 \\ 8\mu^2 \end{cases} \tag{7.13}$$

Пусть теперь

$$|p_{10} - \varsigma_{10}(t)|^2 + |\vec{p}_1 - \vec{\varsigma}_1(t)|^2 < \zeta^2\mu^2\varepsilon^2(t)$$

Имеем:

$$(p_{10}\pm t)^2 - \vec{p}_1^{\,2} = [\varsigma_{10}(t)\pm t]^2 - \vec{\varsigma}_1^{\,2}(t) + 2[\varsigma_{10}(t)\pm t]\cdot[p_{10}-\varsigma_{10}(t)] -$$
$$-2\vec{\varsigma}_1(t)[\vec{p}_1 - \vec{\varsigma}_1(t)] + [p_{10}-\varsigma_{10}(t)]^2 - [\vec{p}_1 - \vec{\varsigma}_1(t)]^2 <$$
$$< [\varsigma_{10}(t)\pm t]^2 - \vec{\varsigma}_1^{\,2}(t) + 2\sqrt{[\varsigma_{10}(t)\pm t]^2 + \vec{\varsigma}_1^{\,2}(t)}\,\varepsilon(t)\zeta\mu + \varepsilon^2(t)\zeta^2\mu^2 \tag{7.24}$$

Но, очевидно,

$$[\varsigma_{10}(t)+t]^2 - \vec{\varsigma}_1^{\,2}(t) = M^2, \quad [\varsigma_{10}(t)-t]^2 - \vec{\varsigma}_1^{\,2}(t) = \tau$$

и потому, на основании (7.13) и (7.14)

$$(p_{10}+t)^2 - \vec{p}_1^{\,2} < M^2 + 2M\mu + \mu^2 = (M+\mu)^2$$

$$(p_{10}-t)^2 - \vec{p}_1^{\,2} < \tau + 8\mu^2 \leq 9\mu^2$$

Совершенно аналогично, из неравенства

$$|p_{20} - \varsigma_{20}(t)|^2 + |\vec{p}_2 - \vec{\varsigma}_2(t)|^2 < \zeta^2\mu^2\varepsilon^2(t)$$

будет вытекать

$$(p_{20}+t)^2 - \vec{p}_2^{\,2} < (M+\mu)^2$$

$$(p_{20}-t)^2 - \vec{p}_2^{\,2} < 9\mu^2$$

Таким образом, из (7.1), (7.2) получим:

$$\tilde{f}_{r,j}(p_1 p_2 t) - \tilde{f}_{aj}(p_1 p_2 t) = 0\,,\ \text{если}\ |p_{10} - \varsigma_{10}(t)|^2 + |\vec{p}_1 - \vec{\varsigma}_1(t)|^2 < \zeta^2 \mu^2 \varepsilon^2(t)$$

и

$$f_{ir}(p_1 p_2 t) - \tilde{f}_{ia}(p_1 p_2 t) = 0\,,\ \text{если}\ |p_{20} - \varsigma_{20}(t)|^2 + |\vec{p}_2 - \vec{\varsigma}_2(t)|^2 < \zeta^2 \mu^2 \varepsilon^2(t)$$

Мы можем, следовательно, применить лемму У, взяв в ней

$$\eta = \zeta\mu \quad , \quad \mathcal{N} = \frac{M + \mu(1+\delta)}{2}\,.$$

Чтобы удовлетворить неравенствам (5.11) теоремы 1, примем

$$r_0 = \frac{1}{2\sqrt{6}}\zeta\mu \quad , \quad |\vec{r}| = \frac{3}{8\sqrt{6}}\zeta\mu\,.$$

Теперь в соответствии с упомянутой леммой, убеждаемся в справедливости следующего утверждения:

Существует обобщенная функция t

$$\tilde{f}(k_1 k_2 t) \tag{7.15}$$

являющаяся аналитической функцией комплексных 4-векторов k_1, k_2, регулярной в области:

$$|k_{10} - \varsigma_{10}(t)| < \frac{\zeta}{2\sqrt{6}}\mu\varepsilon(t)\,,\quad |\vec{k}_1 - \vec{\varsigma}_1(t)| < \frac{3}{8\sqrt{6}}\zeta\mu\varepsilon(t)$$
$$|k_{20} - \varsigma_{20}(t)| < \frac{\zeta}{2\sqrt{6}}\mu\varepsilon(t)\,,\quad |\vec{k}_2 - \vec{\varsigma}_2(t)| < \frac{3}{8\sqrt{6}}\zeta\mu\varepsilon(t) \tag{7.16}$$

и обладающая свойствами:

1^0) В области вещественных p_1, p_2, удовлетворяющих неравенствам (7.16):

$$\tilde{f}_{ij}(p_1 p_2 t) = \tilde{f}(p_1 p_2 t)$$

2^0) $\tilde{f}(p_1 p_2 t) = 0$ если $t < \dfrac{M + \mu(1+\delta)}{2}$

Воспользуемся сейчас условием инвариантности по отношению к пространственным вращениям. Ввиду этого условия функция (7.15) зависит от $k_1\, k_2$ лишь через посредство 5 переменных:

$$k_{10}\,,\ k_{20}\,,\ \vec{k}_1^{\,2}\,,\ \vec{k}_2^{\,2}\,,\ \vec{k}_1\vec{k}_2$$

Вместо них можем ввести совершенно эквивалентную систему переменных:

$$z_1 = (k_{10}+t)^2 - \vec{k}_1^2, \quad z_2 = (k_{20}+t)^2 - \vec{k}_2^2, \quad z_3 = (k_{10}-t)^2 - \vec{k}_1^2$$
$$z_4 = (k_{20}-t)^2 - \vec{k}_2^2, \quad z_5 = (k_{10}-k_{20})^2 - (\vec{k}_1 - \vec{k}_2)^2 \tag{7.17}$$

так что

$$\tilde{f}(k_1 k_2 t) = \phi(z_1 z_2 z_3 z_4 z_5 t) \tag{7.18}$$

Следовательно, для завершения доказательства нашей теоремы нам остается убедиться, что (при соответствующем подборе числа ρ), мы можем найти комплексные 4-вектора, удовлетворяющие неравенствам (7.16) для произвольных комплексных $z_1, \ldots z_5$, удовлетворяющих неравенствам:

$$|z_1 - M^2| < \rho\mu^2, \quad |z_2 - M^2| < \rho\mu^2, \quad |z_3 - \tau| < \rho\mu^2, \quad |z_4 - \tau| < \rho\mu^2$$
$$|z_5 + 4a^2| < \rho\mu^2 \left(\frac{M}{t}\right)^2, \tag{7.19}$$
$$4a^2 \leq \mu^2, \quad -V \leq \tau \leq \mu^2(1-\omega)$$

Перейдем поэтому к вопросу о построении $k_1\ k_2$ по данным $z_1, \ldots z_5, t$

Из (7.17) найдем:

$$k_{10} = \frac{z_1 - z_3}{4t}, \qquad k_{20} = \frac{z_2 - z_4}{4t} \tag{7.20}$$

а также

$$\vec{k}_1^2 = t^2 - \frac{z_1 + z_3}{2} + \left(\frac{z_1 - z_3}{4t}\right)^2,$$
$$\vec{k}_2^2 = t^2 - \frac{z_2 + z_4}{2} + \left(\frac{z_2 - z_4}{4t}\right)^2, \tag{7.21}$$
$$(\vec{k}_1 - \vec{k}_2)^2 = -z_5 + \left(\frac{z_1 - z_2 - z_3 + z_4}{4t}\right)^2.$$

Чтобы подобрать $\vec{k}_1$, $\vec{k}_2$, удовлетворяющие соотношениям (7.16), положим:

$$\vec{k}_1 = A\vec{e}_1 + C\vec{e}_2, \quad \vec{k}_2 = B\vec{e}_1 - C\vec{e}_2,$$

 МЭ. 7

где e_1, e_2 – два взаимно перпендикулярных орта. Тогда для определения A, B, C из (7.2I) получим уравнения:

$$A^2 + C^2 = t^2 - \frac{z_1+z_3}{2} + \left(\frac{z_1-z_3}{4t}\right)^2,$$

$$B^2 + C^2 = t^2 - \frac{z_2+z_4}{2} + \left(\frac{z_2-z_4}{4t}\right)^2,$$

$$(A-B)^2 + 4C^2 = -z_5 + \left(\frac{z_1-z_2-z_3+z_4}{4t}\right)^2,$$

откуда находим:

$$\left.\begin{aligned} A &= A(t, z_1, \ldots z_5) \\ B &= B(t, z_1, \ldots z_5) \end{aligned}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{4t^2 - (z_1+z_2+z_3+z_4-z_5) + 2\left(\frac{z_1-z_3}{4t}\right)^2 + 2\left(\frac{z_2-z_4}{4t}\right)^2 - \left(\frac{z_1-z_2-z_3+z_4}{4t}\right)^2} \pm$$

$$\pm \frac{1}{2}\,\frac{\frac{1}{2}(z_2+z_4-z_1-z_3) + \left(\frac{z_1-z_3}{4t}\right)^2 - \left(\frac{z_2-z_4}{4t}\right)^2}{\sqrt{4t^2 - (z_1+z_2+z_3+z_4-z_5) + 2\left(\frac{z_1-z_3}{4t}\right)^2 + 2\left(\frac{z_2-z_4}{4t}\right)^2 - \left(\frac{z_1-z_2-z_3+z_4}{4t}\right)^2}}; \quad (7.22)$$

$$C(t, z_1, \ldots z_5) = \frac{1}{2}\left\{-z_5 + \left(\frac{z_1-z_2-z_3+z_4}{4t}\right)^2 - \frac{\left[\frac{z_2+z_4-z_1-z_3}{2} + \left(\frac{z_1-z_3}{4t}\right)^2 - \left(\frac{z_2-z_4}{4t}\right)^2\right]^2}{4t^2 - (z_1+z_2+z_3+z_4-z_5) + 2\left(\frac{z_1-z_3}{4t}\right)^2 + 2\left(\frac{z_2-z_4}{4t}\right)^2 - \left(\frac{z_1-z_2-z_3+z_4}{4t}\right)^2}\right\}^{1/2}$$

Как видно,

$$A(t, M^2, M^2, \tau, \tau, -4a^2) = \varphi(t),$$

$$B(t, M^2, M^2, \tau, \tau, -4a^2) = \varphi(t),$$

$$C(t, M^2, M^2, \tau, \tau, -4a^2) = a$$

МД 7

Таким образом, наша теорема будет доказана как только мы покажем, что $\left|\frac{\xi_1-\xi_3}{4t}\right| < \frac{\zeta}{2\sqrt{6}}\,\frac{\mu}{t+\frac{M^2-\tau}{4t}}$, $\left|\frac{\xi_2-\xi_4}{4t}\right| < \frac{\zeta}{2\sqrt{5}}\,\frac{\mu}{t+\frac{M^2-\tau}{4t}}$

$$\begin{aligned}&\Big|A\big(t, M^2+\xi_1, M^2+\xi_2, \tau+\xi_3, \tau+\xi_4, -4a^2+\xi_5\tfrac{M^2}{t^2}\big) - \\ &- A(t, M^2, M^2, \tau, \tau, -4a^2)\Big| < \frac{3}{8\sqrt{12}}\,\frac{\mu}{t+\frac{M^2-\tau}{4t}} \\ &\Big|B\big(t, M^2+\xi_1, M^2+\xi_2, \tau+\xi_3, \tau+\xi_4, -4a^2+\xi_5\tfrac{M^2}{t^2}\big) - \\ &- B(t, M^2, M^2, \tau, \tau, -4a^2)\Big| < \frac{3}{8\sqrt{12}}\,\frac{\mu}{t+\frac{M^2-\tau}{4t}} \\ &\Big|C\big(t, M^2+\xi_1, M^2+\xi_2, \tau+\xi_3, \tau+\xi_4, -4a^2+\xi_5\tfrac{M^2}{t^2}\big) - \\ &- C(t, M^2, M^2, \tau, \tau, -4a^2)\Big| < \frac{3}{8\sqrt{12}}\,\frac{\mu}{t+\frac{M^2-\tau}{4t}}\end{aligned} \tag{7.23}$$

для

$$t \geq \frac{M+\mu(1+\delta)}{2}, \quad -V \leq \tau \leq \mu(1-\omega), \quad 4a^2 \leq u^2$$

$$|\xi_j| < \rho\mu^2 \qquad j = 1, \ldots 5$$

Но возможность такого подбора достаточно малого значения ρ непосредственно следует из рассмотрения[x)] выражений (7.22).

Примечание. Рассмотрим частный случай теоремы П, когда $\delta = \omega = 0$. В этом случае $u = 0$ и, следовательно, $a = 0$. Таким образом, область значений z_5, принадлежащих к области регулярности функции $\Phi(z_1, \ldots z_5, \tau)$ будет ограничена неравенством:

$$|z_5| < \rho\mu^2\left(\frac{M}{t}\right)^2$$

Нетрудно, однако, с помощью совершенно элементарных рассуждений расширить пределы возможного изменения $\operatorname{Re} z_5$.

---

x) Неравенства (7.23) с функциями A, B имели бы место и без умножения ξ_5 на M^2/t^2. Такое умножение необходимо лишь для обеспечения неравенства с функцией C, поскольку только с аргументом $\xi_5(M^2/t^2)$ левая часть его будет, при больших t пропорциональна $1/t$.

Действительно, возьмем в классе $C(0,\infty;1)$ функцию $h(t)$ так, чтобы

$$h(t)=0\,, \qquad t < M+\mu/2$$

$$h(t)=1\,, \qquad t > M+\mu$$

Положим

$$f_{ij}(x_1 x_2 t) = f_{ij}^{(1)}(x_1 x_2 t) + f_{ij}^{(2)}(x_1 x_2 t)\,,$$

$$f_{ij}^{(1)}(x_1 x_2 t) = [1-h(t)]\,f_{ij}(x_1 x_2 t); \; f_{ij}^{(2)}(x_1 x_2 t) = h(t) f_{ij}(x_1 x_2 t).$$

функции $f_{ij}^{(1)}$, $f_{ij}^{(2)}$ удовлетворяют условиям нашей теоремы. Первая из них при $\omega=0,\ \delta=0$ а вторая – при $\omega=0$, $\delta = M/\mu$.

Рассмотрим области регулярности функций $\Phi^{(1)}$, $\Phi^{(2)}$ выписывая соответствующие неравенства лишь для аргумента z_5.

Для первой из них

$$|z_5| < \rho\mu^2\left(\frac{M}{t}\right)^2.$$

Это неравенство будет выполнено, если

$$|\mathrm{Re}\, z_5| < \frac{\rho\mu^2}{\sqrt{2}}\left(\frac{M}{t}\right)^2, \quad |\mathrm{Im}\, z_5| < \frac{\rho\mu^2}{\sqrt{2}}\left(\frac{M}{t}\right)^2.$$

Но, очевидно,

$$\Phi^{(1)} = 0 \qquad \text{для} \qquad t > M+\mu$$

Поэтому $\Phi^{(2)}$ регулярна при

$$-u^2 \leqq \mathrm{Re}\, z_5 \leqq 0\,, \quad |\mathrm{Im}\, z_5| < \rho\mu^2\left(\frac{M}{t}\right)^2$$

Далее, для $\Phi^{(2)}$

$$u^2 = \left(2M+\mu+\frac{M^2-\mu^2}{2M+\mu}\right)^2 - 4M^2 > 0$$

Поэтому $\Phi^{(2)}$ будет регулярна при

$$-u^2 \leq \mathrm{Re}\, z_5 \leq 0$$

Пусть ρ_1 будет наименьшим из чисел

$$\frac{\rho}{\sqrt{2}}\left(\frac{M}{M+\mu}\right)^2, \quad \left(\frac{u}{\mu}\right)^2$$

М.Д. 8

Тогда видим, что обе функции $\Phi^{(1)}$, $\Phi^{(2)}$ а, следовательно, и их сумма $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$ будут регулярны при

$$-\rho_1\mu^2 \leq \operatorname{Re} z_5 \leq 0 \quad , \quad |\operatorname{Im} z_5| < \frac{\rho\mu^2}{\sqrt{2}} \left(\frac{M}{t}\right)^2 ,$$

Мы убедились, таким образом, в справедливости следующего утверждения:

Теорема III. Если условия теоремы II выполнены при $\omega = \delta = 0$, то можно подобрать достаточно малое $\rho > 0$ так, чтобы

$$\Phi(z_1, \ldots, z_5, t)$$

была регулярна в области:

$$|z_1 - M^2| < \rho\mu^2 , \quad |z_2 - M^2| < \rho\mu^2 , \quad |z_3 - \tau| < \rho\mu^2 , \quad |z_4 - \tau| < \rho\mu^2 ,$$

$$-\rho\mu^2 \leq \operatorname{Re} z_5 \leq 0 \quad , \quad |\operatorname{Im} z_5| < \rho\mu^2 \left(\frac{M}{t}\right)^2 ; \; -V \leq \tau \leq \mu^2$$

Заметим, что нижний предел изменения $\operatorname{Re} z_5$ может быть существенно раздвинут, но это уже потребует более глубоких соображений.

§ 8.

Теорема IV. Рассмотрим обобщенные функции $F_r(x)$ и $F_a(x)$ четырех - вектора x, из которых одна будет запаздывающей, а другая - опережающей.

Пусть Фурье-образ $\tilde{f}(p)$ их разности

$$f(x) = F_r(x) - F_a(x)$$

обращается в нуль:

$$\tilde{f}(p) = 0$$

для

$$|p_0| < m$$

Тогда существует аналитическая функция $\tilde{F}(k)$ комплексного четырех-вектора k, регулярная в области:

$$|\operatorname{Im} \vec{k}| < |\operatorname{Im} \sqrt{k_0^2 - m^2}| \tag{8.1}$$

такая, что для вещественных $k = p$ из этой области

$$\tilde{F}(p) = \tilde{F}_r(p) = \tilde{F}_a(p) .$$

Доказательство. Возьмем в классе $C(0,\infty,1)$ функцию такую, что

$$\varphi(t)=1, \quad x^\circ \geq 0$$

$$\varphi(t)=0, \quad x^\circ \leq -\delta$$

где δ - некоторое положительное число.

Фиксируем сколь угодно малое положительное ρ и заметим, что функция

$$\varphi(x_0)\, e^{-\rho \vec{x}^2 + ikx}$$

будет принадлежать к классу $C(\infty,\infty;4)$, если только $\operatorname{Im} k_0 > 0$ (k_0 может быть комплексно). Поэтому можем определить интеграл

$$\tilde{F}_r(k;\rho) \equiv \tilde{F}_r(k^\circ,\vec{k};\rho) = \int F_r(x)\,\varphi(x_0)\, e^{-\rho\vec{x}^2 + ikx}\, dx \tag{8.2}$$

представляющий аналитическую функцию k , регулярную в области, где $\operatorname{Im} k_0 > 0$.

Нетрудно видеть, что этот интеграл не зависит от специального выбора функции $\varphi(t)$. Действительно, если φ_1 и φ_2 представляют две возможные реализации функции φ , то имеем:

$$\varphi_1(x_0) - \varphi_2(x_0) = 0 \qquad \text{для} \qquad x_0 \geq 0$$

откуда видим, что в силу свойства запаздывания во всем 4-мерном пространстве

$$\int F_r(x)\left[\varphi_1(x_0) - \varphi_2(x_0)\right] dx = 0$$

Поэтому мы будем записывать (8.2) в форме:

$$\tilde{F}_r(k;\rho) = \int F_r(x)\, e^{-\rho\vec{x}^2 + ikx}\, dx, \tag{8.3}$$

принимая правую часть (8.2) за определение такого интеграла. Совершенно аналогично определяем функцию

$$\tilde{F}_a(k;\rho) = \int F_a(x)\, e^{-\rho\vec{x}^2 + ikx}\, dx \tag{8.4}$$

являющуюся аналитической, регулярной в области, где $\operatorname{Im} k^\circ < 0$.

Заметим, что выражения (8.3), (8.4) имеют смысл и для вещественных k_0. Действительно, их можно рассматривать тогда как Фурье-образы обобщенной функции одного переменного x_0:

$$\int F_j(x)\, e^{-\rho \vec{x}^2 - i\vec{k}\vec{x}}\, d\vec{x}, \qquad j = r, a$$

Таким образом, $\tilde{F}_r(k_0,\vec{k};\rho)$, $\tilde{F}_a(k_0,\vec{k},\rho)$ для вещественных k_0 будут обобщенными функциями k_0, являющимися аналитическими функциями $\vec{k}$.

Нетрудно убедиться также, что в обобщенном смысле (по отношению к вещественной переменной p_0):

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \tilde{F}_r(p_0+i\varepsilon,\vec{k};\rho) = \tilde{F}_r(p_0,\vec{k};\rho), \tag{8.5}$$

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \tilde{F}_a(p_0-i\varepsilon,\vec{k};\rho) = \tilde{F}_a(p_0,\vec{k};\rho)$$

Наконец, в обобщенном смысле, по отношению к вещественному четырех-вектору p

$$\lim_{\rho \to +0} \tilde{F}_r(p;\rho) = \tilde{F}_r(p), \tag{8.6}$$

$$\lim_{\rho \to +0} \tilde{F}_a(p;\rho) = \tilde{F}_a(p),$$

где $\tilde{F}_r$, $\tilde{F}_a$ обычные Фурье-образы функций $F_r(x)$, $F_a(x)$.

Рассмотрим разность:

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \left\{ \tilde{F}_r(p_0+i\varepsilon,\vec{k};\rho) - \tilde{F}_a(p_0-i\varepsilon,\vec{k};\rho) \right\} = \tilde{F}_r(p_0\vec{k};\rho) - \tilde{F}_a(p_0\vec{k};\rho)$$

$$= \int f(x)\, e^{ip_0x_0}\, e^{-\rho\vec{x}^2 - i\vec{k}\vec{x}}\, dx_0\, d\vec{x}$$

Но, по условию теоремы,

$$\int f(x)\, e^{ip_0x_0}\, dx_0 = 0 \qquad \text{для } |p_0| < m$$

Следовательно,

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \left\{ \tilde{F}_r(p_0+i\varepsilon,\vec{k};\rho) - \tilde{F}_a(p_0-i\varepsilon,\vec{k};\rho) \right\} = 0 \quad \text{для } |p_0| < m \tag{8.7}$$

и потому $\tilde{F}_a(k;\rho)$; $\tilde{F}_r(k;\rho)$ представляют одну и ту же аналитическую функцию $\tilde{F}(k;\rho)$ соответственно в областях: $\operatorname{Im} k_0 > 0$, $\operatorname{Im} k_0 < 0$

Область определения $\tilde{F}(k,\rho)$ распространяется на все положения комплексного вектора $\vec{k}$; по отношению к комплексной переменной k_0 эта функция имеет линии разреза

$$-\infty < k_0 \leq -m, \qquad m \leq k_0 < \infty \tag{8.8}$$

Заметив это, фиксируем числа λ, m_1,

$$0 \leq \lambda \leq 1 \quad , \quad 0 \leq m_1 < m \tag{8.9}$$

и построим выражение

$$\phi(k_0) = \tilde{F}(k_0, \lambda \vec{e}\sqrt{k_0^2 - m_1^2} + \vec{f}; \rho) \tag{8.10}$$

в котором $\vec{f}$ - вещественный вектор, $\vec{e}$ - вещественный орт.

Образуем "симметризованную" и "антисимметризованную" функции, инвариантные по отношению к перемене знака входящего квадратного корня:

$$\phi_a(k_0) = \frac{1}{2\sqrt{k_0^2 - m_1^2}}\left\{\tilde{F}(k_0, \lambda \bar{e}\sqrt{k_0^2 - m_1^2} + \vec{f}; \rho) - \tilde{F}(k_0, -\lambda \bar{e}\sqrt{k_0^2 - m_1^2} + \vec{f}; \rho)\right\}$$

$$\phi_s(k_0) = \frac{1}{2}\tilde{F}(k_0, \lambda \bar{e}\sqrt{k_0^2 - m_1^2} + \vec{f}; \rho) + \frac{1}{2}\tilde{F}(k_0, -\lambda \bar{e}\sqrt{k_0^2 - m_1^2} + \bar{f}; \rho) \tag{8.11}$$

Для них, ввиду (8.7) будем иметь:

$$\lim_{\varepsilon \to +0}\left\{\phi_s(p_0 + i\varepsilon) - \phi_s(p_0 - i\varepsilon)\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\tilde{F}_r(p_0, \lambda \bar{e}\sqrt{p_0^2 - m_1^2} + \vec{f}; \rho) - \frac{1}{2}\tilde{F}_a(p_0, \lambda \bar{e}\sqrt{p_0^2 - m_1^2} + \bar{f}; \rho) +$$

$$+ \frac{1}{2}\tilde{F}_r(p_0, -\lambda \bar{e}\sqrt{p_0^2 - m_1^2} + \bar{f}; \rho) - \frac{1}{2}\tilde{F}_a(p_0, -\lambda \bar{e}\sqrt{p_0^2 - m_1^2} + \bar{f}; \rho) = 0 \tag{8.12}$$

для $|p_0| < m$

Совершенно аналогично, найдем также:

$$\lim_{\varepsilon \to +0}\left\{\phi_a(p_0 + i\varepsilon) - \phi_a(p_0 - i\varepsilon)\right\} = 0 \qquad \text{для} \quad |p_0| < m \tag{8.13}$$

Итак, мы можем рассматривать $\phi_s(k_0)$, $\phi_a(k_0)$ как аналитические функции комплексного переменного k_0, регулярные во всей комплексной плоскости за исключением линий разреза (8.8).

Обсудим теперь вопрос о характере возможного роста этих функций на бесконечности.

Из рассмотрения режущего фактора:

$$\exp\left\{-\rho \bar{x}^2 - x_0 \operatorname{Im} k_0 \pm \lambda \bar{e}\bar{x} \operatorname{Im}\sqrt{k_0^2 - m_1^2}\right\}$$

можно установить следующее свойство:

Имеется такое целое положительное n_0, что при сколь угодно малой $\sigma>0$, выражения

$$|\Phi_s(k_0)|\,,\quad |\Phi_a(k_0)|$$

для

$$|\operatorname{Im} k_0|\geqslant\sigma$$

ограничены некоторым полиномом степени n_0. Чтобы воспользоваться теоремой Коши, подберем соответствующий множитель $h(x_0)$, который смог бы обеспечить достаточное убывание произведений

$$\Phi_s(k_0)h(k_0)\quad,\quad \Phi_a(k_0)h(k_0) \tag{8.14}$$

на бесконечности.

Возьмем для этого какую-либо функцию $g(\tau)$ вещественного переменного τ, обладающую непрерывными производными всех порядков в интервале

$$a\leq\tau\leq b\qquad(a>m^2),$$

такую, что она со всеми своими производными обращается в нуль, в граничных точках этого интервала.

Построим функцию комплексного переменного

$$h^{(n)}(k_0)=\int_a^b\frac{g(\tau)}{(k_0^2-\tau)^n}\,d\tau \tag{8.15}$$

и заметим, что она является аналитической функцией, регулярной во всей комплексной плоскости, за исключением линий разреза

$$\operatorname{Im} k_0=0\,,\qquad a\leq k_0^2\leq b\,.$$

На бесконечности $h^{(n)}(k_0)$ и ее производная любого порядка убывает не медленнее, чем

$$\frac{Const}{|k_0^2|^n}\,.$$

Кроме того, когда

$$\operatorname{Im} k_0\to+0\,,\qquad \operatorname{Re} k_0=p_0$$

имеем равномерно[x)] по отношению к $p_0\;(-\infty<p_0<\infty)$

$$h^{(n)}(k_0)\to h_+^{(n)}(p_0)\,,\quad \frac{d^q h^{(n)}(k_0)}{dk_0^q}\to\frac{d^q h_+^{(n)}(p_0)}{dp_0^q}\,,\quad q=1,2,\ldots\,.$$

x) Здесь имеется в виду обычная равномерная сходимость.

Если же

$$\operatorname{Im} k_0 \to -0 \quad , \operatorname{Re} k_0 = p_0$$

то имеем, также равномерно по отношению к p_0 $(-\infty < p_0 < \infty)$

$$h^{(n)}(k_0) \to h_-^{(n)}(p_0) \; ; \quad \frac{d^q h^{(n)}(k_0)}{dk_0^q} \to \frac{d^q h_-^{(n)}(p_0)}{dp_0^q} \; ; \; q = 1, 2, \ldots .$$

Предельные функции

$$h_+^{(n)}(p_0) \quad , \quad h_-^{(n)}(p_0)$$

вещественного переменного p_0 непрерывны со своими производными любого порядка на всей вещественной оси; при $p_0 \to \pm\infty$ функции эти и их производные стремятся к нулю не медленнее, чем $\frac{Const}{|p_0^2|^2}$.

Ясно, наконец, что $h_+^{(n)}(p_0) = h_-^{(n)}(p_0)$, если $p_0^2 < a$ или $p_0^2 < b$, т.е. во всяком случае, если $p_0^2 \le m^2$.

Поэтому $(j = s, a)$

$$\phi_j(p_0 + i0)\, h_+^{(n)}(p_0) - \phi_j(p_0 - i0)\, h_-^{(n)}(p_0) = 0, \text{ если } |p_0| \le m, \quad (8.16)$$

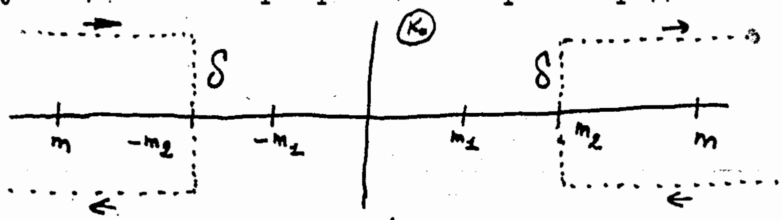
где

$$\phi_j(p_0 \pm i0) = \lim_{\epsilon \to +0} \phi_j(p_0 \pm i\epsilon).$$

Возьмем теперь $2n \geq n_0 + 1$. Тогда для сколь угодно малого $\sigma > 0$

$$\left| h(k_0)\, \phi_j(k_0) \right| < \frac{C_\sigma}{|k_0|} \quad ; \; |\operatorname{Im} k_0| \geq \sigma .$$

Далее, раз последовательности $\phi_j(p_0 \pm i\epsilon)$ сходятся в обобщенном смысле, мы можем по самому определению такой сходимости найти класс $C(r, s; 1)$, на котором она имеет место. Возьмем $2n \geq r - 1$. Тогда последовательности $h(p_0 \pm i\epsilon)\, \phi_j(p_0 \pm i\epsilon)$ окажутся сходящимися в обобщенном смысле на классе $C(1, s; 1)$. При сделанном выборе числа n мы можем применить теорему Коши, взяв за контур интеграции, контур фиг. I, окружающий линии разреза. Совершив предельный переход при $\delta \to 0$ получим



фиг. 1

$$h(k_0)\, \phi_j(k_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{m_2}^{\infty} \frac{\phi_j(\tau + i0)\, h_+(\tau) - \phi_j(\tau - i0)\, h_-(\tau)}{\tau - k_0}\, d\tau \; +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \int^{-m_2} \frac{\phi_j(\tau + i0)\, h_+(\tau) - \phi_j(\tau - i0)\, h_-(\tau)}{\tau - k_0}\, d\tau \; ; \; j = s, a,$$

для любого k_0 не лежащего на линии разреза (8.8).

Но, по самому определению ϕ_s, ϕ_a, имеем

$$\phi(k_0) = \phi_s(k_0) + \sqrt{k_0^2 - m_1^2}\,\phi_a(k_0).$$

Следовательно,

$$h(k_0)\,\phi(k_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{m_2}^{\infty}\frac{\phi_s(\tau+i0)\,h_+(\tau) - \phi_s(\tau-i0)\,h_-(\tau)}{-k_0+\tau}\,d\tau +$$

$$+\frac{\sqrt{k_0^2-m_1^2}}{2\pi i}\int_{m_2}^{\infty}\frac{\phi_a(\tau+i0)\,h_+(\tau) - \phi_a(\tau-i0)\,h_-(\tau)}{-k_0+\tau}\,d\tau + \tag{8.17}$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{-m_2}\frac{\phi_s(\tau+i0)h_+(\tau)-\phi_s(\tau-i0)h_-(\tau)}{-k_0+\tau}\,d\tau + \frac{\sqrt{k_0^2-m_1^2}}{2\pi i}\int_{-\infty}^{-m_2}\frac{\phi_a(\tau+i0)h_+(\tau)-\phi_a(\tau-i0)h_-(\tau)}{-k_0+\tau}\,d\tau.$$

Рассмотрим теперь произвольный комплексный четырехвектор k, для которого выполнено неравенство (8.1). Ясно, что для него можно указать такое $m_1^2 < m^2$, чтобы

$$\left|\operatorname{Im}\vec{k}\right| < \left|\operatorname{Im}\sqrt{k_0^2-m^2}\right|. \tag{8.18}$$

Эти значения m_1^2 мы и используем в наших рассуждениях. Далее, для данного k построим $\lambda(k)$, $\vec{e}(k)$, положив:

$$\lambda(k) = \frac{\left|\operatorname{Im}\vec{k}\right|}{\left|\operatorname{Im}\sqrt{k_0^2-m_1^2}\right|}, \quad \vec{e}(k) = \frac{\operatorname{Im}\vec{k}}{\left|\operatorname{Im}\vec{k}\right|}\cdot\frac{\operatorname{Im}\sqrt{k_0^2-m_1^2}}{\left|\operatorname{Im}\sqrt{k_0^2-m_1^2}\right|}. \tag{8.19}$$

Тогда

$$\operatorname{Im}\vec{k} = \lambda(k)\,\vec{e}(k)\,\operatorname{Im}\sqrt{k_0^2-m_1^2}. \tag{8.20}$$

Возьмем также

$$\vec{p} = \operatorname{Re}\vec{k} - \lambda(k)\,\vec{e}(k)\,\operatorname{Re}\sqrt{k_0^2-m_1^2} + \vec{q},$$

где $\vec{q}$ - произвольный вещественный вектор. Получим из (8.17)

$$h(k_0)\,\tilde{F}(k_0, \vec{k}+\vec{q}; p) = \frac{1}{2\pi i}\int_{m_2}^{\infty}\frac{A_s(\tau,\vec{q};k,p)}{-k_0+\tau}\,d\tau + \frac{\sqrt{k_0^2-m_1^2}}{2\pi i}\int_{m_2}^{\infty}\frac{A_a(\tau,\vec{q};k,p)}{-k_0+\tau}\,d\tau + \tag{8.21}$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{-m_2}\frac{A_s(\tau,\vec{q};k,p)}{-k_0+\tau}\,d\tau + \frac{\sqrt{k_0^2-m_1^2}}{2\pi i}\int_{-\infty}^{-m_2}\frac{A_a(\tau,\vec{q};k,p)}{-k_0+\tau}\,d\tau,$$

где $A_s(\tau,\vec{q};\kappa,\rho) = \frac{1}{2}\tilde{F}_2\left\{\tau, \lambda(\kappa)\vec{e}(\kappa)\left(\sqrt{\tau^2-m_1^2} - Re\sqrt{\kappa_0^2-m_1^2}\right) + Re\vec{\kappa}+\vec{q};\rho\right\} h_+(\tau) -$

$$- \frac{1}{2}\tilde{F}_a\left\{\tau, \lambda(\kappa)\vec{e}(\kappa)\left(\sqrt{\tau^2-m_1^2} - Re\sqrt{\kappa_0^2-m_1^2}\right) + Re\vec{\kappa}+\vec{q};\rho\right\} h_-(\tau) +$$

$$+ \frac{1}{2}\tilde{F}_2\left\{\tau, -\lambda(\kappa)\vec{e}(\kappa)\left(\sqrt{\tau^2-m_1^2} + Re\sqrt{\kappa_0^2-m_1^2}\right) + Re\vec{\kappa}+\vec{q};\rho\right\} h_+(\tau) -$$

$$- \frac{1}{2}\tilde{F}_a\left\{\tau, -\lambda(\kappa)\vec{e}(\vec{\kappa})\left(\sqrt{\tau^2-m_1^2} + Re\sqrt{\kappa_0^2-m_1^2}\right) + Re\vec{\kappa}+\vec{q};\rho\right\} h_-(\tau);$$

$$A_a(\tau,\vec{q};\kappa,\rho) = \left(2\sqrt{\tau^2-m_1^2}\right)^{-1}\tilde{F}_2\left\{\tau, \lambda(\kappa)\vec{e}(\kappa)\left(\sqrt{\tau^2-m_1^2} - Re\sqrt{\kappa_0^2-m_1^2}\right) + Re\vec{\kappa}+\vec{q};\rho\right\} h_+(\kappa) -$$

$$- \left(2\sqrt{\tau^2-m_1^2}\right)^{-1}\tilde{F}_a\left\{\tau, \lambda(\kappa)\vec{e}(\kappa)\left(\sqrt{\tau^2-m_1^2} - Re\sqrt{\kappa_0^2-m_1^2}\right) + Re\vec{\kappa}+\vec{q};\rho\right\} h_-(\tau) - \quad (8.22)$$

$$- \left(2\sqrt{\tau^2-m_1^2}\right)^{-1}\tilde{F}_2\left\{\tau, -\lambda(\kappa)\vec{e}(\kappa)\left(\sqrt{\tau^2-m_1^2} + Re\sqrt{\kappa_0^2-m_1^2}\right) + Re\vec{\kappa}+\vec{q};\rho\right\} h_+(\tau) +$$

$$+ \left(2\sqrt{\tau^2-m_1^2}\right)^{-1}\tilde{F}_a\left\{\tau, -\lambda(\kappa)\vec{e}(\kappa)\left(\sqrt{\tau^2-m_1^2} + Re\sqrt{\kappa_0^2-m_1^2}\right) + Re\vec{\kappa}+\vec{q};\rho\right\} h_-(\tau).$$

Подчеркнем здесь, что

$$\left.\begin{aligned} A_s(\tau,\vec{q};\kappa,\rho) &= 0 \\ A_a(\tau,\vec{q};\kappa,\rho) &= 0 \end{aligned}\right\}, \qquad \text{если } |\tau| < m \qquad (8.23)$$

Перейдем теперь к исследованию перехода $\rho \to 0$. Покажем, например, что для $\tau > m_2$ выражение

$$\tilde{F}_2\left\{\tau, \lambda(\kappa)\vec{e}(\kappa)\cdot\left(\sqrt{\tau^2-m_1^2} - Re\sqrt{\kappa_0^2-m_1^2}\right) + Re\vec{\kappa}+\vec{q};\rho\right\}$$

как функция переменных τ, ρ сходится в обобщенном смысле к

$$\tilde{F}_2\left\{\tau, \lambda(\kappa)\vec{e}(\kappa)\left(\sqrt{\tau^2-m_1^2} - Re\sqrt{\kappa_0^2-m_1^2}\right) + Re\vec{\kappa}+\vec{q}\right\}.$$

Рассмотрим, в самом деле, интеграл

$$\int \tilde{F}_2\left\{\tau, \lambda(\kappa)\vec{e}(\kappa)\left(\sqrt{\tau^2-m_1^2} - Re\sqrt{\kappa_0^2-m_1^2}\right) + Re\vec{\kappa}+\vec{q};\rho\right\} H(\tau,\vec{q})\,d\tau\,d\vec{q},$$

в котором функция $H(\tau,\vec{q})$ принадлежит к некоторому классу $C(z,s;4)$ с достаточно высокими показателями z, s и обращается в нуль для $\tau < m_2^2$.

Имеем: $\int \tilde{F}_2\left\{\tau, \lambda(\kappa)\vec{e}(\kappa)\left(\sqrt{\tau^2-m_1^2} - Re\sqrt{\kappa_0^2-m_1^2}\right) + Re\vec{\kappa}+\vec{q};\rho\right\} H(\tau,\vec{q})\,d\tau\,d\vec{q} =$

$$= \int \tilde{F}_2(p_0,\vec{p};\rho)\, H\left\{p_0, \vec{p}+\lambda(\kappa)\vec{e}(\kappa)\left(Re\sqrt{\kappa_0^2-m_1^2} - \sqrt{p_0^2-m_1^2}\right) - Re\vec{\kappa}\right\} dp_0\,d\vec{p}.$$

МД. 8

Приняв во внимание, что $m_2 > m_1$, мы можем заметить, что $\sqrt{p_0^2 - m_1^2}$ регулярен при $p_0 > m_2 > m_1$ и потому выражение

$$H\left\{p_0, \vec{p} + \lambda(\kappa)\vec{e}(\kappa)\left(Re\sqrt{\kappa_0^2 - m_1^2} - \sqrt{p_0^2 - m_1^2}\right) - Re\vec{\kappa}\right\},$$

как функция переменных $p_0, \vec{p}$ также принадлежит к $C(r,s;4)$

Но, благодаря (8.6),

$$\tilde{F}_2(p_0, \vec{p}; \rho) \to \tilde{F}_2(p_0, \vec{p}), \quad \rho \to +0$$

Имеем, следовательно,

$$\int \tilde{F}_2(p_0, \vec{p}; \rho) H\left\{p_0, \vec{p} + \lambda(\kappa)\vec{e}(\kappa)\left(Re\sqrt{\kappa_0^2 - m_1^2} - \sqrt{p_0^2 - m_1^2}\right) - Re\vec{\kappa}\right\} dp_0 d\vec{p} \to$$

$$\to \int \tilde{F}_2(p_0; \vec{p}) H\left\{p_0, \vec{p} + \lambda(\kappa)\vec{e}(\kappa)\left(Re\sqrt{\kappa_0^2 - m_1^2} - \sqrt{p_0^2 - m_1^2}\right) - Re\vec{\kappa}\right\} dp_0 d\vec{p},$$

т.е.

$$\left.\begin{aligned} &\int \tilde{F}_2\left\{\tau, \lambda(\kappa)\vec{e}(\kappa)\left(\sqrt{\tau^2 - m_1^2} - Re\sqrt{\kappa_0^2 - m_1^2}\right) + Re\vec{\kappa} + \vec{q}; \rho\right\} H(\tau, \vec{q})\, d\tau\, d\vec{q} \to \\ &\to \int \tilde{F}_2\left\{\tau, \lambda(\kappa)\vec{e}(\kappa)\left(\sqrt{\tau^2 - m_1^2} - Re\sqrt{\kappa_0^2 - m_1^2}\right) + Re\vec{\kappa} + \vec{q}\right\} H(\tau, \vec{q})\, d\tau\, d\vec{q}. \end{aligned}\right\} \quad (8.24)$$

Так как приближение к пределу в (8.24) является равномерным по κ (в каждой достаточно малой окрестности точки рассматриваемой области (8.I8)), то мы можем сказать, что соотношение:

$$\tilde{F}_2\left\{\tau, \lambda(\kappa)\vec{e}(\kappa)\left(\sqrt{\tau^2 - m_1^2} - Re\sqrt{\kappa_0^2 - m_1^2}\right) + Re\vec{\kappa} + \vec{q}; \rho\right\} \to$$

$$\to \tilde{F}_2\left\{\tau, \lambda(\kappa)\vec{e}(\kappa)\left(\sqrt{\tau^2 - m_1^2} - Re\sqrt{\kappa_0^2 - m_1^2}\right) + Re\vec{\kappa} + \vec{q}\right\} \qquad (8.25)$$

имеет место в обобщенном смысле по отношению к переменным $\tau, \vec{q}$ равномерно по отношению к κ. Совершенно такое же положение будет и с другими функциями $\tilde{F}_2, \tilde{F}_4$, входящими в выражения (8.22).

Построим неограниченно дифференцируемую функцию $u(\tau)$ таким образом, что

$$u(\tau) = 0, \quad \tau \leq m_2,$$

$$u(\tau) = 1, \quad \tau \geq m$$

Тогда, в силу (8.23) мы можем в формуле (8.2I) внести под знак интегралов правой части функции $u(\tau)$ и $u(-\tau)$.

Возьмем еще произвольную функцию $f(\vec{q})$ из класса $C(r,s;3)$ с достаточно высокими показателями r,s. Тогда в соотношениях типа (8.24) можем положить

$$H(\tau, \vec{q}) = h_+(\tau)\, u(\pm\tau)\, \frac{f(\vec{q})}{\kappa_0 - \tau}$$

 МВ. 8

или

$$H(\tau,\vec{q}) = h_-(\tau)\, u(\pm\tau)\, \frac{f(\vec{q})}{\kappa-\tau},$$

поскольку степень убывания функций $h_+(\tau)$, $h_-(\tau)$ может быть взята достаточно большой, а знаменатель $\kappa_0-\tau$ не обращается в нуль в фактической области интеграции.

Отсюда вытекает существование предела

$$\lim_{\rho\to+0} h(\kappa_0)\int \tilde{F}(\kappa_0, \vec{\kappa}+\vec{q}\,;\rho)\, f(\vec{q})\, d\vec{q}$$

и потому, ввиду произвольности $h(\kappa_0)$, существует предел

$$\lim_{\rho\to+0} \int \tilde{F}(\kappa_0, \vec{\kappa}+\vec{q}\,;\rho)\, f(\vec{q})\, d\vec{q}\,, \qquad (8.26)$$

нетрудно также заметить, что приближение к пределу является равномерным по отношению к κ в указанном выше смысле.

Мы установили здесь факт несобственной сходимости. Усилим этот результат и покажем, что равномерно:

$$\tilde{F}(\kappa_0,\vec{\kappa};\rho) \longrightarrow \tilde{F}(\kappa_0,\vec{\kappa}). \qquad (8.27)$$

Построим в комплексных плоскостях κ'_α, $\alpha = 1,2,3$ окружности C_α с центром в точках κ_α и радиусом δ.

Число δ возьмем столь малым, что все $\vec{\kappa}'$ с компонентами κ'_α, лежащими внутри, или на границе C_α, принадлежали бы к области (8.18).

Имеем тогда по теореме Коши:

$$\tilde{F}(\kappa_0, \vec{\kappa}+\vec{q}\,;\rho) = \frac{1}{(2\pi i)^3}\int\limits_{C_1\times C_2\times C_3} \frac{\tilde{F}(\kappa_0, \vec{\kappa}'+\vec{q}\,;\rho)}{\prod\limits_{(\alpha)}(\kappa'_\alpha-\kappa_\alpha)} \prod_{(\alpha)} d\kappa'_\alpha$$

Заменив здесь

$$\vec{\kappa} \to \vec{\kappa}-\vec{q}\,,$$

найдем:

$$\tilde{F}(\kappa_0,\vec{\kappa};\rho) = \frac{1}{(2\pi i)^3}\int\limits_{C_1\times C_2\times C_3} \frac{\tilde{F}(\kappa_0, \vec{\kappa}'+\vec{q}\,;\rho)}{\prod\limits_{(\alpha)}(\kappa'_\alpha-\kappa_\alpha+q_\alpha)} \prod_{(\alpha)} d\kappa'_\alpha \qquad (8.28)$$

Так как в этом интеграле

$$|\kappa'_\alpha-\kappa_\alpha| = \delta\,,$$

то при

знаменатель не обращается в нуль и остается по модулю большим

$$\left(\frac{\delta}{2}\right)^3.$$

Возьмем теперь какую-либо функцию $\varphi(\vec{q})$ вещественных переменных q_α, принадлежащую к классу $C(r,s;3)$ с достаточно высокими показателями r,s, такую, что

$$\int \varphi(\vec{q})\, d\vec{q} = 1; \tag{8.29}$$

$$\varphi(\vec{q}) = 0, \quad \text{если хотя бы для одного } \alpha, \ |q_\alpha| \geqslant \frac{\delta}{2}$$

Тогда из (8.28) получим:

$$\tilde{F}(k_0, \vec{k}; \rho) = \frac{1}{(2\pi i)^3} \int\limits_{C_1 \times C_2 \times C_3} \left\{ \int \tilde{F}(k_0, \vec{k}' + \vec{q}; \rho) \frac{\varphi(\vec{q})}{\prod\limits_{(\alpha)} (k'_\alpha - k_\alpha + q_\alpha)} d\vec{q} \right\} \prod_\alpha dk'_\alpha . \tag{8.30}$$

Но ввиду (8.29), функция

$$f(\vec{q}) = \frac{\varphi(\vec{q})}{\prod\limits_\alpha (k'_\alpha - k_\alpha + q_\alpha)} \quad ; \quad k'_\alpha \in C_\alpha$$

переменных q_α также принадлежит к классу $C(r,s;3)$ и мы можем применить к правой части (8.30) ранее установленный результат о существовании предела (8.26) и о равномерности соответствующего приближения.

Таким образом убеждаемся, что в достаточно малой окрестности любой точки k из области (8.18) последовательность

$$\tilde{F}(k_0, \vec{k}; \rho)$$

аналитических функций k является равномерно сходящейся. Поэтому, в силу известных теорем, предельная функция

$$\tilde{F}(k_0, \vec{k}) = \lim_{\rho \to +0} \tilde{F}(k_0, \vec{k}; \rho) \tag{8.31}$$

будет аналитической функцией переменных k_α; $\alpha = 0,1,2,3$, регулярной в области (8.18).

Замечая, что в наших рассуждениях m_1 могло бы быть взято сколь угодно близким к m, мы видим, что эта функция оказывается регулярной во всей области (8.1).

На основании (8.6) убеждаемся, что для вещественных ρ из этой области рассматриваемая функция совпадает с $\tilde{F}_1 = \tilde{F}_a$ и наша теорема теперь полностью доказана.

§ 9.

Доказанная в предыдущем параграфе теорема IУ тривиально обобщается и на случай функций, зависящих от двух четырехвекторов x_1, x_2 и параметра t. Кроме того, вместо центрально-симметричного интервала $|p_0|<n$ можно рассматривать более общий интервал $a < p_0 < b$. Тогда неравенство

$$|\operatorname{Im}\vec{k}|^2 < |\operatorname{Im}\sqrt{k_0^2-m^2}|^2$$

должно естественно быть заменено на

$$|\operatorname{Im}\vec{k}|^2 < \left|\operatorname{Im}\sqrt{\left(k_0-\frac{a+b}{2}\right)^2-\left(\frac{b-a}{2}\right)^2}\right|$$

Таким образом убеждаемся в справедливости следующего утверждения.

Лемма УI. Пусть будут даны обобщенные функции:

$$f_{ij}(x_1,x_2,t), \qquad i,j=2,a,$$

удовлетворяющие условиям (6.5).

Пусть, кроме того:

$$\tilde{f}_{2,j}(p_1,p_2,t)-\tilde{f}_{a,j}(p_1,p_2,t)=0, \qquad \text{если } \alpha<p_{10}<\beta;$$
$$\tilde{f}_{i,2}(p_1,p_2,t)-\tilde{f}_{i,a}(p_1,p_2,t)=0, \qquad \text{если } \alpha<p_{20}<\beta. \tag{9.I}$$

Тогда существует обобщенная функция

$$\tilde{f}(k_1,k_2,t),$$

являющаяся аналитической функцией, комплексных переменных k_1, k_2, регулярной в области

$$|\operatorname{Im}\vec{k}_1|^2 < \left|\operatorname{Im}\sqrt{\left(k_{10}-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2-\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^2}\right|^2;$$
$$|\operatorname{Im}\vec{k}_2|^2 < \left|\operatorname{Im}\sqrt{\left(k_{20}-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2-\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^2}\right|^2, \tag{9.2}$$

такая, что в области вещественных p_1, p_2 удовлетворяющих этим неравенствам:

$$\tilde{f}(p_1,p_2,t)=\tilde{f}_{i,j}(p_1,p_2,t).$$

Основываясь на этой лемме, а также на теореме П, докажем следующее утверждение.

ЛЭ 9

Теорема V. Если выполнены условия теоремы III, то существует такое положительное ρ, что "область регулярности" переменных $z_1,\dots,z_5$ может быть задана неравенствами:

$$|z_1-M^2|<\rho\mu^2;\ |z_2-M^2|<\rho\mu^2;\ |z_3-\tau|<\rho\mu^2;\ |z_4-\tau|<\rho\mu^2;$$

$$-4\frac{M}{M+\mu}\mu^2\le \operatorname{Re} z_5\le 0;\ |\operatorname{Im} z_5|<\rho\mu^2\left(\frac{M}{t}\right)^2;\ -V\le\tau\le\mu^2. \qquad (9.3)$$

Доказательство. Будем рассматривать раздельно два случая:

$$-V\le\tau<0, \qquad (9.4)$$

и

$$0\le\tau\le\mu^2. \qquad (9.5)$$

Возьмем сперва случай (9.4) и применим теорему II с $\omega=1,\ \delta=0$. Так как все доказываемое сейчас усиление теоремы III относится только к переменной z_5, условимся выписывать здесь только неравенства, относящиеся к этой переменной.

Имеем в рассматриваемом случае

$$|z_5+4a^2|<\rho\mu^2\left(\frac{M}{t}\right)^2;\quad 4a^2\le u^2, \qquad (9.6)$$

где

$$u^2=\left(M+\mu+\frac{M^2}{M+\mu}\right)^2-4M^2. \qquad (9.7)$$

Но неравенство (9.6) будет удовлетворено, если

$$-u^2\le \operatorname{Re} z_5\le 0;\quad |\operatorname{Im} z_5|<\rho\mu^2\left(\frac{M}{t}\right)^2.$$

С другой стороны, из (9.7) имеем:

$$u^2=\left(2M+\frac{\mu}{M+\mu}\right)^2-4M^2>\frac{4M}{M+\mu}\mu^2.$$

Итак, в случае (9.4) область (9.3) действительно входит в "область регулярности".

Перейдем теперь к рассмотрению случая (9.5).

Возьмем достаточно малое число $\sigma>0$ (которое впоследствии фиксируем более детально) и построим в классе $C(0,\infty;1)$ функцию такую, что

МД 9

$$h(t)=0\ ;\quad t\le \frac{M}{2}+\frac{3\mu}{4}-\sigma\mu\ ;$$

$$h(t)=1\ ,\quad t\geqslant \frac{M}{2}+\frac{3\mu}{4}.$$

Положим

$$f_{ij}(x_1,x_2,t)=f^{(1)}_{i,j}(x_1,x_2,t)+f^{(2)}_{i,j}(x_1,x_2,t)\,,$$

где

$$f^{(1)}_{i,j}=h(t)f_{i,j}\quad ,\quad f^{(2)}_{i,j}=[1-h(t)]f_{i,j}\,.$$

Докажем нашу теорему в рассматриваемом случае (9.5) раздельно для $f^{(1)}_{i,j}$ и $f^{(2)}_{i,j}$, поскольку тогда она окажется верной и для их суммы. Возьмем $f^{(1)}_{i,j}$ и воспользуемся теоремой П при $\omega=0,\ \delta=\frac{1}{2}-2\sigma$.

Заметим тогда, что область

$$-u^2\le \operatorname{Re} z_5\le 0\quad ,\quad |\operatorname{Im} z_5|<\rho\mu^2\left(\frac{M}{t}\right)^2,$$

где

$$u^2=\left[M+\mu(1+\delta)+\frac{M^2-\mu^2}{M+\mu(1+\delta)}\right]^2-4M^2\,,$$

входит в "область регулярности". Действительно,

$$u^2=\left[2M+\frac{\mu^2(1+\delta)^2-\mu^2}{M+\mu(1+\delta)}\right]^2-4M^2>$$

$$>4\,\frac{M\mu^2}{M+\mu}\,\frac{M+\mu}{M+\mu(1+\delta)}\,(2\delta+\delta^2).$$

Ясно, далее, что

$$\frac{M+\mu}{M+\mu(1+\delta)}\,(2\delta+\delta^2)>1 \qquad (9.8)$$

при $\delta=\frac{1}{2}$. Поэтому σ можно всегда взять так, чтобы (9.8) выполнялось и при $\delta=\frac{1}{2}-2\sigma$. Тогда

$$u^2>4\,\frac{M\mu^2}{M+\mu}$$

и область (9.3) оказывается подходящей.

Нам остается рассмотреть $f^{(2)}_{i,j}$. Здесь уже мы будем использовать лемму УI. Так как

$$\tilde{f}^{(2)}_{i,j}(p_1,p_2,t)=0\ ,\quad \text{если}\ t<\frac{M+\mu}{\ldots}\quad \text{или}\quad t>\frac{M}{2}+\frac{3\mu}{\ldots}$$

МD. 3

то можем ограничиться интервалом

$$\frac{M+\mu}{2} \le t \le \frac{M}{2} + \frac{3\mu}{4} . \tag{9.9}$$

Возьмем неравенства

$$(k_0+t)^2 - \vec{k}^2 < (M+\mu)^2 , \quad (k_0-t)^2 - \vec{k}^2 < (3\mu)^2 . \tag{9.10}$$

Они, очевидно, будут выполнены, если

$$-M-\mu < k_0+t < M+\mu , \quad -3\mu < k_0-t < 3\mu ,$$

т.е. если

$$t-3\mu < k_0 < M+\mu-t .$$

Таким образом, (9.20) справедливы при

$$\frac{M+\mu(1+\delta)}{2} - 3\mu < k_0 < M+\mu - \frac{M+\mu(1+\delta)}{2} ; \quad \delta = \frac{1}{2} .$$

Приняв во внимание соотношения (7.I), (7.2), убеждаемся отсюда, ч условия леммы УI удовлетворяются в рассматриваемом случае при

$$\alpha = \frac{M+\mu(1+\delta)}{2} - 3\mu , \quad \beta = M+\mu - \frac{M+\mu(1+\delta)}{2} , \quad \delta = \frac{1}{2} . \tag{9.11}$$

Но так как в силу условий нашей теоремы функции $f^{(2)}_{i,j}$ должны быть и вариантны по отношению к пространственным вращениям, видим, что функц

$$f^{(2)}(k_1, k_2, t) ,$$

регулярная в области (9.2), может быть представлена в форме:

$$\phi^{(2)}(z_1, \dots, z_5, t) ,$$

где $z_1, \dots, z_5$ даются выражения (7.I7).

Рассуждая как и при доказательстве теоремы П, выразим k_1, k_2 через $z_1, \dots, z_5, t$ с помощью формул (7.20), (7.22). Тогда соответств область регулярности может быть задана неравенствами:

$$|\mathrm{Im}\, A|^2 + |\mathrm{Im}\, C|^2 < \left| \mathrm{Im} \sqrt{\left(\frac{z_1-z_3}{4t} - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 - \left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^2} \right| ,$$

$$|\mathrm{Im}\, B|^2 + |\mathrm{Im}\, C|^2 < \left| \mathrm{Im} \sqrt{\left(\frac{z_2-z_4}{4t} - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 - \left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^2} \right| . \tag{9.12}$$

МД.9

Представим себе, что неравенства (9.12) справедливы для

$$z_1 = z_2 = M^2 \,, \quad z_3 = z_4 = \tau \,, \quad z_5 = -4a^2 \,, \tag{9.13}$$

где

$$a^2 \leq \frac{M}{M+\mu}\mu^2 \,. \tag{9.14}$$

Тогда, ввиду непрерывности функций A, B, C в окрестности (9.13) и ограниченности интервала изменения t (9.9), мы всегда могли бы подобрать столь малое положительное ρ, чтобы неравенство (9.12) выполнялось для всех z из области (9.3). Тем самым наша теорема была бы доказана.

Итак, нам остается показать справедливость неравенств (9.12) для значений (9.13).

Имеем для этих значений:

$$\mathrm{Im}\, C = 0 \,, \quad (\mathrm{Im}\, A)^2 \leq a^2 \,, \quad (\mathrm{Im}\, B)^2 \leq a^2 \,.$$

Правые же части (9.12) больше μ^2.

Итак, неравенства (9.12) действительно выполняются для значений (9.13) при условии (9.14). Тем самым доказательство закончено.

§ 10.

Лемма УП. Рассмотрим скалярные обобщенные функции трех 4-векторов:

$$F_{i,j}(y_1, y_2, y_3) \,, \quad i,j = z, a \,, \tag{10.1}$$

удовлетворяющие условиям:

$$\left.\begin{aligned}
&F_{z,z}(y_1,y_2,y_3) = 0, && \text{если } y_1 \lesssim 0 && \text{или } y_2 \lesssim 0; \\
&F_{z,a}(y_1,y_2,y_3) = 0, && \text{если } y_1 \lesssim 0 && \text{или } y_2 \gtrsim 0; \\
&F_{a,z}(y_1,y_2,y_3) = 0, && \text{если } y_1 \gtrsim 0 && \text{или } y_2 \lesssim 0; \\
&F_{a,a}(y_1,y_2,y_3) = 0, && \text{если } y_1 \gtrsim 0 && \text{или } y_2 \gtrsim 0;
\end{aligned}\right\} \tag{10.2}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\tilde F_{z,j}(q_1,q_2,q_3) - \tilde F_{a,j}(q_1,q_2,q_3) = 0, && \text{если } \begin{cases} (q_1+q_2)^2 < (M+\mu)^2, \text{ и} \\ (q_1-q_3)^2 < (3\mu)^2; \end{cases} \\
&\tilde F_{i,z}(q_1,q_2,q_3) - \tilde F_{i,a}(q_1,q_2,q_3) = 0, && \text{если } \begin{cases} (q_2+q_3)^2 < (M+\mu)^2 \text{ и} \\ (q_2-q_3)^2 < (3\mu)^2; \end{cases}
\end{aligned}\right\} \tag{10.3}$$

МД 10

$$\tilde{F}_{i,j}(q_1,q_2,q_3)=0, \text{ если } q_3^2<\frac{(M+\mu)^2}{4} \text{ или } q_{30}<0. \qquad (10.4)$$

Тогда можно построить обобщенную функцию вещественной переменной z_6,

$$\Psi(z_1,\dots,z_5,z_6),$$

являющуюся аналитической функцией комплексных переменных $z_1,\dots,z_5$, со свойствами:

I[0]) Ψ регулярна в области:

$$|z_1-M^2|<\rho\mu^2;\ |z_2-M^2|<\rho\mu^2;\ |z_3-\tau|<\rho\mu^2,$$

$$|z_4-\tau|<\rho\mu^2;\ -\frac{4M}{M+\mu}\mu^2\leq \operatorname{Re} z_5\leq 0; \qquad (10.5)$$

$$|\operatorname{Im} z_5|<\rho\mu^2\left(\frac{M}{z_6}\right)^2;\quad -V\leq\tau\leq\mu^2.$$

Здесь V - произвольное фиксированное положительное число, ρ - достаточно малое положительное число (зависящее от V).

2[0])

$$\Psi(z_1,\dots,z_5,z_6)=0, \text{ если } z_6<\left(\frac{M+\mu}{2}\right)^2 \qquad (10.6)$$

3[0]) Для вещественных q_1, q_2, q_3, для которых величины

$$z_1=(q_1+q_3)^2;\quad z_2=(q_2+q_3)^2;\quad z_3=(q_1-q_3)^2;$$

$$z_4=(q_2-q_3)^2;\quad z_5=(q_1-q_2)^2;\quad z_6=q_3^2,$$

удовлетворяют неравенствам (10.5), имеем:

$$\tilde{F}_{i,j}(q_1,q_2,q_3)=\Psi(z_1,\dots,z_5;z_6), \text{ если } q_{30}>0.$$

Доказательство. Будем сводить сделанное утверждение к лемме УI и теореме У.

Рассмотрим выражения:

$$\int F_{i,j}(y_1,y_2,y_3)\,e^{iq_3y_3}\,dy_3, \qquad (10.7)$$

где

$$q_3=t\ell,$$

а ℓ - временно-пробный, единичный 4-вектор:

$$\ell_0>0,\quad \ell^2=1.$$

Совершим лоренцовское преобразование таким образом, чтобы ℓ оказался направленным по временной оси. В новой системе координат соответствующие величины условимся отмечать знаком „прим".

Выражения (10.7) можно рассматривать как функции

$$f_{i,j}(\gamma_1', \gamma_2', t).$$

Нетрудно видеть, что в силу условий нашей леммы функции эти удовлетворяют всем условиям теоремы У.

Поэтому мы можем построить соответствующую функцию

$$\Phi(z_1, \dots, z_5, t),$$

в которой

$$z_1 = (q'_{10}+t)^2 - \vec{q}_1^{\,\prime 2} \; ; \quad z_2 = (q'_{20}+t)^2 - \vec{q}_2^{\,\prime 2} \; ;$$

$$z_3 = (q'_{10}-t)^2 - \vec{q}_1^{\,\prime 2} \; ; \quad z_4 = (q'_{20}-t)^2 - \vec{q}_2^{\,\prime 2} \; ; \quad z_5 = (q'_1 - q'_2)^2 .$$

Ясно, однако, что

$$z_1 = (q_1+q_3)^2 , \quad z_2 = (q_2+q_3)^2 , \quad z_3 = (q_1-q_3)^2 ,$$

$$z_4 = (q_2-q_3)^2 , \quad z_5 = (q_1-q_2)^2 ,$$

ввиду скалярного характера этих выражений. Но

$$\Phi(z_1, \dots, z_5, t) = 0 \qquad \text{для} \qquad t < \frac{M+\mu}{2} .$$

Можем поэтому ввести функцию $\Psi(z_1, \dots, z_5, z_6)$, положив

$$\Psi(z_1, \dots, z_5, z_6) \begin{cases} = \Phi(z_1, \dots, z_5, \sqrt{z_6}) , & z_6 > 0 \\ = 0 & z_6 < \left(\frac{M+\mu}{2}\right)^2 \end{cases}$$

Справедливость леммы УП теперь становится очевидной.

Примечание. Рассмотрим более общий случай, когда функции

$$F_{i,j}^{\nu}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \quad , \quad \nu = 1, \dots, \ell$$

удовлетворяют всем условиям леммы УП, кроме условия скалярности.

Вместо него предположим, что при преобразованиях $\mathcal{L}$ из группы Лоренца наши функции линейно преобразуются

$$F_{i,j}^{\nu}(\mathcal{L}\gamma_1, \mathcal{L}\gamma_2, \mathcal{L}\gamma_3) = \sum_{1 \le \nu \le \ell} A_{\nu,\nu'}(\mathcal{L}) F_{i,j}^{\nu'}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) \qquad (10.8)$$

с помощью некоторого представления $A(\mathcal{L})$ этой группы, разбивающегося на обычные тензорные и спинорные представления.

Отсюда будет вытекать, что $\tilde{F}^{\nu}_{i,j}(q_1,q_2,q_3)$ будут линейно выражаться (с полиномиальными коэффициентами от q_i) через скалярные функции q_1, q_2, q_3 , чем обеспечивается возможность применения леммы УП.

Нетрудно видеть, что результаты леммы УП претерпевают здесь следующее тривиальное изменение:

Можно построить конечную систему обобщенных функций вещественной переменной z_6

$$\Psi_\varkappa (z_1, \ldots, z_5, z_6) \quad , \quad \varkappa = 1, \ldots, s \ ,$$

являющихся аналитическими функциями комплексных переменных $z_1, \ldots, z_5$ и обладающих свойствами (1^0), (2^0). Для вещественных q_1, q_2, q_3 , для которых величины z удовлетворяют неравенствам (10.5), имеем представление с помощью суммы конечного числа членов типа

$$q_{i_1}^{\alpha_1} \ldots q_{i_s}^{\alpha_s} \Psi_\varkappa (z_1, \ldots, z_5, z_6) \ ,$$

если при этом

$$q_{30} > 0 .$$

Отсюда вытекает наша основная

Теорема УI. Рассмотрим трансляционно-инвариантные обобщенные функции четырех 4-векторов

$$F^{\nu}_{i,j}(x_1, \ldots, x_4) \quad , \quad i = r, a \quad , \quad j = r, a \quad , \quad \nu = 1, \ldots, \ell \ ,$$

линейно преобразующиеся при преобразованиях $\mathcal{L}$ из группы Лоренца:

$$F^{\nu}_{i,j}(\mathcal{L}x_1, \ldots, \mathcal{L}x_4) = \sum_{1 \le \nu' \le \ell} A_{\nu\nu'}(\mathcal{L}) F^{\nu'}_{i,j}(x_1, \ldots, x_4) \tag{10.9}$$

с помощью некоторого представления $A(\mathcal{L})$ этой группы, разбивающегося на обычные тензорные и спинорные представления.

Предположим, кроме того, что введенные функции удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{aligned} &F^{\nu}_{rr}(x_1, \ldots, x_4) = 0 && \text{при } x_1 \lesssim x_3 && \text{или } x_2 \lesssim x_4 ; \\ &F^{\nu}_{ra}(x_1, \ldots, x_4) = 0 && \text{при } x_1 \lesssim x_3 && \text{или } x_2 \gtrsim x_4 ; \\ &F^{\nu}_{ar}(x_1, \ldots, x_4) = 0 && \text{при } x_1 \gtrsim x_3 && \text{или } x_2 \lesssim x_4 ; \\ &F^{\nu}_{aa}(x_1, \ldots, x_4) = 0 && \text{при } x_1 \gtrsim x_3 && \text{или } x_2 \gtrsim x_4 . \end{aligned} \tag{10.10}$$

Рассмотрим Фурье-образы

$$\int F^{\nu}_{i,j}(x_1, \ldots, x_4) \exp i (p_1 x_1 + \ldots + p_4 x_4)\, dx_1 \ldots dx_4 =$$

$$= \delta(p_1 + \ldots + p_4)\, \tilde{F}^{\nu}_{i,j}(p_1, \ldots, p_4)$$

Здесь

$$\tilde{F}^{\nu}_{i,j}\,(p_1,\dots,p_4)$$

обобщенные функции $p_1,\dots,p_4$, определенные на многообразии

$$p_1+\dots+p_4=0. \qquad (10.11)$$

Предположим, что они удовлетворяют условиям:

$$\left.\begin{aligned}&\tilde{F}^{\nu}_{2j}(p_1,\dots,p_4)-\tilde{F}^{\nu}_{aj}(p_1,\dots,p_4)=0 \quad \text{при} \quad p_1^2<(M+\mu)^2, \ и \ p_3^2<(3\mu)^2;\\&\tilde{F}^{\nu}_{i2}(p_1,\dots,p_4)-\tilde{F}^{\nu}_{ia}(p_1,\dots,p_4)=0 \quad \text{при} \quad p_2^2<(M+\mu)^2, \ и \ p_4^2<(3\mu)^2;\end{aligned}\right\} \qquad (10.12)$$

$$\left.\begin{aligned}&F^{\nu}_{ij}(p_1,\dots,p_4)=0,\\ \text{если} \quad &(p_1+p_3)^2<(M+\mu)^2 \quad \text{или} \quad p_{10}+p_{30}<0.\end{aligned}\right\} \qquad (10.13)$$

Тогда можно построить обобщенные функции вещественной переменной z_6 :

$$\phi_{\varkappa}\,(z_1,\dots,z_5\,;z_6)\,,$$

являющиеся аналитическими функциями переменных $z_1,\dots,z_5$, со свойствами:

1⁰) $\phi_{\varkappa}$ регулярны в области (10.5)

2⁰) $\phi_{\varkappa}=0$, если $z_6<(M+\mu)^2$,

3⁰) Для вещественных $p_1,\dots,p_4$ из многообразия (10.11), для которых величины

$$z_1=p_1^2\,;\ z_2=p_2^2\,;\ z_3=p_3^2\,:\ z_4=p_4^2\,;\quad z_5=(p_1+p_2)^2\,;\ z_6=(p_1+p_3)^2$$

удовлетворяют неравенствам (10.5), имеем представление вида:

$$\tilde{F}^{\nu}_{i,j}(p_1,\dots,p_4)=\sum p_{i_1}^{\alpha_1}\dots p_{i_s}^{\alpha_s}\,\phi_{\varkappa}\,(z_1,\dots,z_5\,;z_6)\,,\ \text{если} \quad p_{10}+p_{30}>0, \qquad (10.14)$$

с конечным числом членов в сумме.

Доказательство. Ввиду трансляционной инвариантности функций то

$$F^{\nu}_{i,j}\,(x_1,\dots,x_4)$$

их можно рассматривать как функции трех переменных, например:

М.Д. 16

Положим

$$F^{\nu}_{i,j}(x_1,\dots x_4) = F^{\nu}_{i,j_1}(x_1-x_3,\, x_4-x_2,\, x_1-x_2+x_3-x_4) \qquad (10.15)$$

где $j_1 = r$, если $j=a$; $j_1 = a$ если $j=r$

Ясно тогда, что функции

$$F^{\nu}_{i,j}(y_1, y_2, y_3)$$

удовлетворяют условию (10.8) примечания к лемме УП, а также условиям (10.2).

Далее, из (10.15) следует, что

$$\tilde F^{\nu}_{i,j}(q_1+q_3, -q_2-q_3, q_3-q_1, q_2-q_3) = \tilde F^{\nu}_{i,j}(q_1, q_2, q_3)$$

Положив

$$p_1 = q_1+q_3,\; p_2 = -q_2-q_3,\; p_3 = q_3-q_1,\; p_4 = q_2-q_3$$

имеем

$$q_3 = \frac{p_1+p_3}{2},\; p_1^2 = (q_1+q_3)^2,\; p_2^2 = (q_2+q_3)^2,\; p_3^2 = (q_1-q_3)^2$$

$$p_4^2 = (q_2-q_3)^2,\; (p_1+p_2)^2 = (q_1-q_2)^2$$

Видим отсюда, что выполнены и остальные условия леммы УП.

Используя сделанное к ней примечание, мы и получаем доказательство нашей основной теоремы.

Примечание. Вместо условия (10.13) мы можем ввести условие:

$$[(p_1+p_3)^2 - M^2]\, \tilde F^{\nu}_{i,j}(p_1,\dots p_4) = 0, \text{ если } (p_1+p_3)^2 < (M+\mu)^2 \text{ или } p_{10}+p_{30}<0$$

Действительно, в этом случае вместо $F^{\nu}_{i,j}$ можем рассмотреть функции

$$\left[-\left(\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial x_3}\right)^2 - M^2\right] F^{\nu}_{i,j}(x_1,\dots x_4)$$

удовлетворяющие всем условиям теоремы УI.

Соотношение (10.14) окажется тогда умноженным на $[(p_1+p_3)^2 - M^2]$. На этот множитель мы можем, однако , разделить в области, где

$$(p_1+p_3)^2 \neq M^2$$

Поэтому (10.14) останется верным, если к условию $p_{10}+p_{30}>0$ добавить $(p_1+p_3)^2 \neq M^2$

Литература

Андерсон, Давидон и Крузе (1955)
Phys. Rev. 100, 339.
Ахиезер А., Померанчук И.Я. (1948) ЖЭТФ, 18, 603
Гейзенберг (1943а) Zs.f, Phys. 120, 513.
(1943б) Zs. f. Phys. 120, 673
(1946) Zs. f. Naturforsch, 1, 673.
Гелл-Манн, Гольдбергер, Тирринг (1954)
Phys. Rev. 95, 1612.
Гёбель, Карплус, Рудерман (1955)
Phys. Rev. 100, 240.
Гольдбергер (1955а) Phys. Rev. 97, 508.
(1955б) Phys. Rev. 99, 979.
Гольдбергер, Миязава, Оэме (1955) Phys. Rev. 99, 986.
Карплус, Рудерман (1955) Phys. Rev. 98, 771.
Ван Кампен (1953а) Phys. Rev. 89, 1072.
(1953б) Phys. Rev. 91, 1276.
Клейн (1955) Prog. Theor. Phys. 14, 580 (1955).
Крамерс (1927) Atti, Congr. di fis.Como 2, 545.
Крейн М.Г. (1955) DAH, 105, 433 (1955).
Крониг (1926) J.Opt. Soc. Amer 12, 547.
Лоу (1955) F.Low. Phys. Rev. 97, 1392.
Оэме (1955) R.Oehme Phys. Rev., 100, 1503.
Оэме (1956) R.Oehme Phys. Rev. 102, 1174.
Паули, Данков (1942) Phys. Rev., 62, 85.
Пекар (1956а), ЖЭТФ, 30, 304.
Полкинхорн (1956) Polkinghorne. Nuovo Cimento 4, 216.
Рюигрок и Ван ХОВ (1956) Physica, 22, 880.
Салам (1956) A.Salam. Nuovo Cimento, 3, 424.
Салам, Гильберт (1956) A.Salam, Gilbert, Nuovo Cim. 3, 607.
Хааг (1955) Dan Mat-Fys. Medd, √12
Ху Нин (1948) Ning Hu Phys. Rev., 74, 131.

Оглавление

Глава IX. Дисперсионные соотношения.

§ 46. Общие представления о методе. I

I. Введение. I

2. Математическая и физическая основа дисперсионных соотношений. 2

3. Обзор работ по дисперсионным соотношениям. 5

4. Проблема обоснования. II

§ 47. Основные свойства S-матрицы в локальной теории поля. I3

I. Вступительные замечания. I3

2. Общие свойства. I7

3. Локальные свойства. I9

§ 48. Спектральное представление пионной функции Грина. 23

I. Радиационные операторы I-го и 2-го порядка и их вакуумные средние. 23

2. Вакуумное ожидание от $\delta^2 S/\delta\varphi_\rho \delta\varphi_{\rho'}$ 26

3. Вакуумное ожидание произведения двух токов. 27

4. Аналитические свойства Q^2 и Q^a. 30

5. Спектральное представление для q^2, q^a и q^c. 35

§ 49. Спектральное представление фермионной функции Грина. 39

I. Спектральное представление вакуумного ожидания от $\delta^2 S/\delta\bar\psi\delta\psi$. 39

2. Близость к противоречию. 45

§ 50. Амплитуда рассеяния пионов на нуклонах 47

I. Связь амплитуды рассеяния с "запаздывающими" и "опережающими" матричными элементами. 47

2. Переход к фиксированной системе отсчета. Трудности аналитического продолжения. 50

3. Схема получения дисперсионных соотношений для амплитуды рассеяния вперед. 53

§ 5I. Вопросы аналитического продолжения амплитуды рассеяния при $\vec{p}\neq 0$ 58

I. Аналитические свойства в фиктивной области $\tau<\mu^2$ 58

2. Структура однонуклонного члена. 61

3. Вспомогательная теорема 64

4. Специальное представление функции ST 71
5. Аналитическое продолжение к $\tau = \mu^2$ 73

§ 52. Дисперсионные соотношения для рассеяния пионов на нуклонах. 78
I. Переход к действительным величинам. 78
2. Учет свойств симметрии по E. 81
3. Спиновая и изотопическая структура. 83
4. Наблюдаемая область и переход к случаю рассеяния вперед. 87

Математическое дополнение 88

§ I 90
§ 2 91
§ 3 94
§ 4 98
§ 5 I02
§ 6 I06
§ 7 II0
§ 8 II9
§ 9 I30
§ I0 I34

Список литературы I40