

P-228

W. Zöllner

DISPERSIONSBEZIEHUNGEN UND CHEW-LOW-GLEICHUNGEN
FÜR UNELASTISCHE π -MESONEN-PROZESSE MIT FESTER
NUKLEONEN-QUELLE^{x)}

ЖЭТФ, 1959, т36, в4, с1103-1109.

1958

^{x)} Die Arbeit wird in russischer Sprache im Journal für
Exp. u. Theor. Physik veröffentlicht.

VEREINIGTES INSTITUT FÜR KERNFORSCHUNGEN

LABORATORIUM FÜR THEORETISCHE PHYSIK

=====

P-228

W. Zöllner

DISPERSIONSBEZIEHUNGEN UND CHEW-LOW-GLEICHUNGEN
FÜR UNELASTISCHE π -MESONEN-PROZESSE MIT FESTER
NUKLEONEN-QUELLE^{x)}

Объединенный институт
ядерных исследований
БИБЛИОТЕКА

1958

^{x)} Die Arbeit wird in russischer Sprache im Journal für
Exp. u. Theor. Physik veröffentlicht.

A N N O T A T I O N

Es werden statische Dispersionsbeziehungen und Chew-Low-Gleichungen für den Prozess $\pi + N \rightarrow n\pi + N$ aufgestellt. Es zeigt sich, dass man in Abhängigkeit von einer auf verschiedene Weise möglichen Fixierung von Variablen physikalisch sich unterscheidende Dispersionsbeziehungen und Chew-Low-Gleichungen für den untersuchten Prozess erhalten kann.

E i n l e i t u n g

Der in den letzten Jahren erreichte Fortschritt auf dem Gebiet der theoretischen π -Mesonen-Physik wurde mit Hilfe der Theorie der Dispersionsbeziehungen und mittels der sogenannten Chew-Low-Gleichungen erzielt. Zwischen beiden Methoden besteht in verschiedener Hinsicht ein Zusammenhang, der bereits von einigen Autoren erörtert wurde^{1,2)}. Im folgenden werden für die Prozesse $\pi + N \rightarrow n \pi + N$ mit fester Nukleonen-Quelle Dispersionsbeziehungen und Chew-Low-Gleichungen aufgestellt.

Wie auch im Falle der elastischen Streuung ermöglicht die Anwendung der Kausalitätsbedingung die ^{Aufstellung} Anwendung der Dispersionsbeziehung. Die Benutzung des feldtheoretischen Formalismus von Bogoljubow³⁾ erlaubt auch in dem untersuchten statischen Falle die explizite Anwendung der Kausalitätsbedingung⁴⁾, während das bekannterweise bei dem Formalismus von Wick, Chew, Low⁵⁾ nicht direkt möglich ist.

Zur Aufstellung der Dispersionsbeziehung werden die retardierten und avancieren Übergangsamplituden für den betrachteten Prozess benutzt. Für $n > 1$ scheint wegen des Fehlens eines "optischen Theorems" und der Existenz eines nicht beobachtbaren Gebiets eine exakte Auswertung der Dispersionsbeziehung nicht möglich zu sein. Es wird infolgedessen der Übergang von der statischen Dispersionsbeziehung zur entsprechenden Chew-Low-Gleichung vollzogen.

In Abhängigkeit von einer auf verschiedene Weise möglichen

Fixierung der Überzähligen Variablen ist es im Falle $n > 1$ möglich, physikalisch verschiedenartige Dispersionsbeziehungen aufzustellen. Man kann annehmen, dass die Ergebnisse einer exakten Auswertung dieser Dispersionsbeziehungen zusammenfallen würden. Dagegen zeigt sich, dass die Ergebnisse von Näherungsrechnungen unbedingt von der Variablenwahl abhängen. Diese Bemerkungen gelten ebenso für die aus jeder einzelnen Dispersionsbeziehung folgende Beziehung vom Charakter ^{der} Chew-Low-Gleichungen. Dabei muss man bemerken, dass diese Unterschiede physikalische Ursachen haben und nicht in Zusammenhang mit der oft diskutierten Nichteindeutigkeit der Lösung der Chew-Low-Gleichungen (siehe z.B. 6,7) stehen, auf die hier nicht näher eingegangen wird.

I. Die Struktur der S-Matrix

Das S-Matrixelement für den Prozess $\pi + N \rightarrow n\pi + N$ kann in der folgenden Form geschrieben werden:

$$S_{n,i} = \langle s', \vec{q}_n, \dots, \vec{q}_0 | S | s, \vec{q}_0 \rangle =$$

$$= \frac{v_n \dots v_0 \vec{q}_n \dots \vec{q}_0}{(2\pi)^{3(n+1)} \sqrt{2^{n+1} E_n \dots E_0}} (-i)^n i \int dt_n \dots dt_0 e^{i\{E_n t_n + \dots + E_1 t_1 - E_0 t_0\}} \left\langle s' \left| \frac{\int^n \int \mathcal{S}}{\int \varphi_n(t_n) \dots \int \varphi_1(t_1)} \vec{S} \right| s \right\rangle \quad (I)$$

\vec{q}_0 ist der Impuls des einfallenden π -Mesons, $\vec{q}_n, \dots, \vec{q}_1$ sind die Impulse der erzeugten π -Mesonen. $v_i \equiv v(|\vec{q}_i|)$ ist die Fourier-Transformierte der festen ausgedehnten Nukleonen-Quelle. $\varphi_i(t_i) \equiv \varphi_{\gamma, \beta_i}(t_i)$ kennzeichnet die folgende Größe, die im wesentlichen den Feld-Operator des i -ten π -Mesons

darstellt:

$$\varphi_{r,s}(t_i) = \frac{-i}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3\vec{q}_i}{\sqrt{2E_i}} q_{r_i} v_i \left\{ \overset{+}{\alpha}_{s_i}(\vec{q}_i) e^{-iE_i t_i} - \overset{-}{\alpha}_{s_i}(\vec{q}_i) e^{-iE_i t_i} \right\}. \quad (2)$$

Die Annahme eines festen ausgedehnten Nukleons bewirkt, dass in (2) nur die zeitliche Abhängigkeit auftritt.

Zwischen den Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren der π -Mesonen und dem S-Operator bestehen die folgenden Vertauschungsbeziehungen:

$$\begin{aligned} [\overset{-}{\alpha}_s(\vec{q}), S] &= -\frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \frac{v q_r}{\sqrt{2E}} \int e^{-iEt} \frac{\delta S}{\delta \varphi_{rs}(t)} dt, \\ [S, \overset{+}{\alpha}_s(\vec{q})] &= +\frac{i}{(2\pi)^{3/2}} \frac{v q_r}{\sqrt{2E}} \int e^{+iEt} \frac{\delta S}{\delta \varphi_{rs}(t)} dt. \end{aligned} \quad (3)$$

Die Berücksichtigung des pseudoskalaren Verhaltens der π -Mesonen führt zum Auftreten bestimmter Faktoren in (1) und (3), die jedoch für unsere weiteren Darlegungen von keiner grundsätzlichen Bedeutung sind.

Zur Aufstellung des Matrixelements für den betrachteten Prozess in der Form (1) ist die geeignete Anwendung der Stabilitätsbedingung

$$S|\alpha\rangle = |\alpha\rangle \quad (4)$$

wesentlich. $|\alpha\rangle$ ist dabei ein Einteilchen-Zustand oder das Vakuum. Man kann auf diese Art das S-Matrixelement sofort durch die retardierte Übergangsamplitude ausdrücken. Dazu benutzen wir

die Translationsinvarianz von (1) und schreiben $S_{n,1}$ in der folgenden Form:

$$S_{n,1} = -2\pi i \int (E_n + \dots + E_1 - E_0) \frac{v_n \dots v_0}{\sqrt{2^{n+1} E_n \dots E_0}} T_{n,1}^{\text{ret}}(E_n, \dots, E_1; E_0)$$

$$T_{n,1}^{\text{ret}}(E_n, \dots, E_1; E_0) = \frac{\vec{q}_n \dots \vec{q}_0}{(2\pi)^{\frac{1}{2}(n+1)}} (-i)^n i \int dt_n \dots dt_1 e^{i(E_n t_n + \dots + E_1 t_1)} \left\langle S \left| \frac{i \int^n \left(\frac{\delta S}{\delta \varphi_0(t)} \vec{S} \right)}{\delta \varphi_n(t_n) \dots \delta \varphi_1(t_1)} S \right| S \right\rangle \quad (5)$$

Ausgehend von dem hermitisch konjugierten Matrixelement $S_{n,1}^\dagger$ erhält man für die avancierte Übergangsamplitude

$$T_{n,1}^{\text{av}}(E_n, \dots, E_1; E_0) = \frac{\vec{q}_n \dots \vec{q}_0}{(2\pi)^{\frac{1}{2}(n+1)}} (-i)^n i \int dt_n \dots dt_1 e^{i(E_n t_n + \dots + E_1 t_1)} \left\langle S \left| \frac{-i \int^n \left(\frac{\delta S}{\delta \varphi_0(t)} \vec{S} \right)}{\delta \varphi_n(t_n) \dots \delta \varphi_1(t_1)} S \right| S \right\rangle \quad (6)$$

Die Kausalitätsbedingung für den betrachteten statischen Fall⁴⁾ kann in den folgenden zwei Formen geschrieben werden:

$$\frac{\delta \left(\frac{\delta S}{\delta \varphi_0(t)} \vec{S} \right)}{\delta \varphi'(t')} = 0 \quad \text{für } t' < 0,$$

$$\frac{\delta \left(\frac{\delta S}{\delta \varphi_0(t)} \vec{S} \right)}{\delta \varphi'(t')} = 0 \quad \text{für } t' > 0. \quad (7)$$

Daraus folgt, dass

$$T_{n,1}^{\text{ret}} = 0 \quad \text{für } t_l < 0, \quad l = 1, \dots, n, \quad (8)$$

$$T_{n,1}^{\text{av}} = 0 \quad \text{für } t_l > 0, \quad l = 1, \dots, n,$$

womit die Bezeichnung "retardiert" und "avanciert" gerechtfertigt ist.

Die Feststellungen⁽⁷⁾ werden im folgenden die Aufstellung der Dispersionsbeziehungen erlauben.

II. Die Dispersionsbeziehungen

Wir betrachten die Ausdrücke (5) und (6) als Funktionen der n komplexen Veränderlichen $E_\ell = a_\ell + i b_\ell$ ($\ell = 1, \dots, n$). Auf Grund der Kausalitätsbedingungen (7) ist ersichtlich, dass $T_{n,1}^{ret}(E_n, \dots, E_1; E)$ bzw. $T_{n,1}^{av}(E_n, \dots, E_1; E)$ für $\text{Im } E_\ell > 0$ bzw. $\text{Im } E_\ell < 0$ analytische Funktionen von E_ℓ sind.

Zur Feststellung des Verhaltens von $T_{n,1}^{ret}$ und $T_{n,1}^{av}$ für reelle Werte der Argumente untersuchen wir die Differenz der beiden Ausdrücke, die proportional dem antihermitischen Teil $A_{n,1}$ der Übergangsamplitude ist. In $T_{n,1}^{av}$ ersetzen wir hierzu $\frac{\int \dot{S}}{\int \dot{\varphi}_0} S$ durch $-\dot{S} \frac{\int S}{\int \varphi_0}$ und führen dann die Variationen explizit aus. Wir erhalten den folgenden Ausdruck (E_ℓ reell):

$${}_{n_1,1}^{-ret} T_{n_1,1}^{uv} = 2i A_{n_1,1} = \frac{\vec{q}_n \dots \vec{q}_0}{(2n)^{\frac{1}{2}(n+1)}} \cdot (-i)^n i \int dt_n \dots dt_1 e^{i\{E_n t_n + \dots + E_1 t_1\}}$$

$$\begin{aligned} S i \left\{ - \left\langle s' \left| \frac{-i \mathcal{D}^{\dagger}}{\delta \varphi_n} \cdot \frac{i \mathcal{D}^n S}{\delta \varphi_{n-1} \dots \delta \varphi_0} \right| s \right\rangle + \left\langle s' \left| \frac{i \mathcal{D}^n S}{\delta \varphi_0 \dots \delta \varphi_{n-1}} \cdot \frac{-i \mathcal{D}^{\dagger}}{\delta \varphi_n} \right| s \right\rangle \right. \\ - \left\langle s' \left| \frac{-i \mathcal{D}^{2\dagger}}{\delta \varphi_n \delta \varphi_{n-1}} \cdot \frac{i \mathcal{D}^{n-1} S}{\delta \varphi_{n-2} \dots \delta \varphi_0} \right| s \right\rangle + \left\langle s' \left| \frac{i \mathcal{D}^{n-1} S}{\delta \varphi_0 \dots \delta \varphi_{n-2}} \cdot \frac{-i \mathcal{D}^{2\dagger}}{\delta \varphi_{n-1} \delta \varphi_n} \right| s \right\rangle \\ \dots \\ \left. - \left\langle s' \left| \frac{-i \mathcal{D}^n S^{\dagger}}{\delta \varphi_n \dots \delta \varphi_1} \cdot \frac{i \mathcal{D} S}{\delta \varphi_0} \right| s \right\rangle + \left\langle s' \left| \frac{i \mathcal{D} S}{\delta \varphi_0} \cdot \frac{-i \mathcal{D}^n S^{\dagger}}{\delta \varphi_1 \dots \delta \varphi_n} \right| s \right\rangle \right\} \quad (9) \end{aligned}$$

S ist hier ein Symmetrisierungsoperator, der folgendermassen wirkt:

$$S f(n; n-1, \dots, 1) = f(n; n-1, \dots, 1) + f(n-1; n, n-2, \dots, 1) + \dots ;$$

$$S f(n, n-1; n-2, \dots, 1) =$$

$$\begin{aligned} = f(n, n-1; n-2, \dots, 1) + f(n, n-2; n-1, n-3, \dots, 1) + \dots + f(n, 1; n-1, \dots, 2) \\ + f(n-1, n-2; n, n-3, \dots, 1) + \dots + f(n-1, 1; n, n-2, \dots, 2) \\ + \dots + \dots \\ + f(2, 1; n, \dots, 3). \end{aligned}$$

Analog kann man sofort die Ausdrücke für $S f(n, \dots, k; k-1, \dots, 1)$ angeben. Die Entwicklung der Differenz (9) nach einem vollständigen Funktionensystem und die Ausnutzung der Translationsinvarianz der Matrixelemente führt zu Termen der folgenden Form (z.B. der ~~zweite~~ vierte Term von (9)):

$$2\pi i \sum_j \int \delta(E_0 + E_{n-1} + E_i) T_{n-1,i}(-E_0, E_1, \dots, E_{n-1}; E_i) \bar{T}_{i,2}(E_i; -E_{n-1}, -E_n),$$

wobei z. B.

$$T_{n-1,i}(-E_0, E_1, \dots, E_{n-1}; E_i) = \frac{\vec{q}_0 \dots \vec{q}_{n-2}}{(2\pi)^{\frac{3(n-1)}{2}}} (-i)^{n-2} i \int dt_1 \dots dt_{n-2} e^{i\{E_1 t_1 + \dots + E_{n-2} t_{n-2}\}} \left\langle s' \left| \frac{i \int^{\eta-1} \mathcal{S}}{\int \varphi_0 \dots \int \varphi_{n-2}} \right| s; i \right\rangle.$$

Wir führen an dieser Stelle eine Variablentransformation durch und setzen

$$E_\ell = v_\ell E, \quad \ell = 1, \dots, n-1 \quad (10)$$

$$E_0 = E$$

wobei $\sum_{\ell} v_\ell = 1$.

Die v_ℓ sollen reelle konstante Parameter sein. (Über die Nicht-eindeutigkeit dieser Variablenwahl und der damit verbundenen Folgen siehe Abschnitt V.) $T_{n,1}^{\text{ret}}$ ist dann in der oberen Halbebene der komplexen E -Ebene eine analytische Funktion und $T_{n,1}^{\text{av}}$ entsprechend in der unteren Ebene. Lassen wir bei der Betrachtung unseres Prozesses nur starke Wechselwirkungen zu, so bedeutet das, dass in den intermediären Zuständen die Energie E_i nur die Werte $E_i = 0$ und $E_i \geq \mu$ annehmen kann, wobei μ die π -Mesonen-Masse ist. Infolgedessen besitzt die Differenz $T_{n,1}^{\text{ret}} - T_{n,1}^{\text{av}}$ für $E = 0$ δ -artige Singularitäten und ist für $0 < |E| < \mu$ gleich Null. Wir können infolgedessen sagen:

$T_{n,1}^{\text{ret}}(E, \nu)$ und $T_{n,1}^{\text{av}}(E, \nu)$ definieren in der komplexen E -Ebene eine einheitliche analytische Funktion, die nur auf der reellen Achse

Schnitte und eine \int -artige Singularität besitzt (Abb.1).



Abb. 1

Auf diese Funktion können wir den Cauchy-Satz anwenden und erhalten die folgende Dispersionsbeziehung, wobei wir annehmen, dass $A_{n,1}(E, \nu)$ für $E \rightarrow \infty$ wie $1/E$ oder stärker abnimmt:

$$D_{n,1}(E_n, \dots, E_1; E) = \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{A(\varepsilon, \nu)}{\varepsilon - E} d\varepsilon. \quad (11)$$

Die Beseitigung der Integration über die negativen Energien gelingt mit Hilfe der Beziehung

$$\begin{aligned} T_{n,1}(-E_n, \dots, -E_1; -E) &= P_{s's}^+ T_{1,n}^+(E; E_1, \dots, E_n) \\ &= P_{s's}^+ T_{n,1}^+(E_n, \dots, E_1; E) \end{aligned}$$

$P_{s's}$ vertauscht den Spin und Isotopen-Spin des Nukleons im Anfangs- und Endzustand. $T_{n,1}^+$ ist das komplex-konjugierte Matricelement von $T_{n,1}$.

Damit nimmt die Dispersionsbeziehung für den Prozess $\pi + N \rightarrow n\bar{\pi} + N$ die folgende Form an, wobei wir das Einnukleonen-Glied explizit angeben:

$$\begin{aligned}
 D_{n_1,1}(E_n, \dots, E_1, E) &= \frac{1}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{A_{n_1,1}(\varepsilon, \nu)}{\varepsilon - E} + \frac{P_{s_1}^* \hat{A}_{n_1,1}(\varepsilon, \nu)}{\varepsilon + E} \right\} d\varepsilon + \\
 &+ \sum_{s_i} S \left\{ \frac{1}{E_n} \left(\overset{+}{T}_{1,0} T_{0,n} - T_{n,0} \overset{+}{T}_{0,1} \right)_{\varepsilon=0} \right. \\
 &+ \frac{1}{E_n + E_{n-1}} \left(\overset{+}{T}_{2,0} T_{0,n-1} - T_{n-1,0} \overset{+}{T}_{0,2} \right)_{\varepsilon=0} \\
 &+ \dots \\
 &+ \left. \frac{1}{E} \left(\overset{+}{T}_{n,0} T_{0,1} - T_{1,0} \overset{+}{T}_{0,n} \right)_{\varepsilon=0} \right\}.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Die Summation erstreckt sich noch über die Spin- und Isotopen-Indizes des Nukleons im intermediären Zustand.

Der physikalische Bereich der Integration in (11) beginnt bei $E_s = \frac{\mu}{\bar{v}}$, wobei $\bar{v} = \text{Min}(v_1, \dots, v_n)$. Infolgedessen ist stets $E_s \geq n\mu$, wobei das Gleichheitszeichen für gleiche Energien der erzeugten Mesonen gilt. Daraus ist zu entnehmen, dass - abgesehen von der elastischen Streuung ($n=1$) - stets ein grosser nichtbeobachtbarer Bereich in dem Dispersionsintegral vorhanden ist, der eine Auswertung in dem von der elastischen Streuung bekannten Sinne nicht zulässt.

Es ist infolgedessen zweckmässig, von der Dispersionsbeziehung zu der entsprechenden Chew-Low-Gleichung Überzugehen.

IV. Chew-Low-Gleichung

Mit Hilfe der Dispersionsbeziehung für einen Prozess mit fester Nukleonen-Quelle kann man sofort eine Beziehung von der

Art der Chew-Low-Gleichungen für diesen Prozess angeben.

Hierzu setzt man in die Dispersionsbeziehung den expliziten Ausdruck für den antihermitischen Teil der Übergangsamplitude ein und führt die Integration mit Hilfe der \int -Funktionen durch.

Auf diese Weise erhält man einen Ausdruck für $D_{n,i}(E_n, \dots, E_i; E)$.

Mit Hilfe von $T_{n,i} = D_{n,i} + iA_{n,i}$ und $\frac{1}{x \pm i\delta} = P\frac{1}{x} \mp i\pi(x)$ kann man sofort die folgende Beziehung angeben:

$$T_{n,i}(E_n, \dots, E_i; E) =$$

$$= -\sum_i \int \left\{ \frac{\left(\overset{+}{T}_{i,i}(E_i; E_i) T_{i,i}(E_i; -\epsilon_{n-1}, \dots, -\epsilon_1, E) \right)_{\epsilon_n = E_i}}{E_i - E_n - i\delta} + \frac{\left(T_{n,i}(-\epsilon_1, \epsilon_1, \dots, \epsilon_{n-1}; E_i) \overset{+}{T}_{i,i}(E_i; \epsilon_n) \right)_{\epsilon_n = -E_i}}{E_i + E_n + i\delta} \right.$$

$$+ \frac{\left(\overset{+}{T}_{2,i}(\epsilon_n, \epsilon_{n-1}; E_i) T_{i,n-1}(E_i; -\epsilon_{n-2}, \dots, -\epsilon_1, E) \right)_{\epsilon_n = E_i}}{E_i - E_n - E_{n-1} - i\delta} + \frac{\left(T_{n-1,i}(-\epsilon_1, \epsilon_1, \dots, \epsilon_{n-2}; E_i) \overset{+}{T}_{i,2}(E_i; -\epsilon_{n-1}, -\epsilon_n) \right)_{\epsilon_n = -E_i}}{E_i + E_n + E_{n-1} + i\delta}$$

(13)

$$+ \frac{\left(\overset{+}{T}_{n,i}(\epsilon_n, \dots, \epsilon_i; E_i) T_{i,i}(E_i; E) \right)_{\epsilon_i = E_i}}{E_i - E - i\delta} + \frac{\left(T_{i,i}(-E; E_i) \overset{+}{T}_{i,i}(E_i; -\epsilon_1, \dots, -\epsilon_n) \right)_{\epsilon_n = -E_i}}{E_i + E + i\delta}$$

Wegen

$$\frac{\int \int \int \overset{+}{S}}{\int \varphi} \overset{+}{S} = \overset{+}{S} \frac{\int \int \int \overset{+}{S}}{\int \varphi} = \frac{\int \int \int \overset{+}{S}}{\int \varphi} \overset{+}{S} - \int \frac{\int \int \overset{+}{S}}{\int \varphi}$$

kann man auf der rechten Seite der Beziehung (13) auch die Ersetzung $\overset{+}{T}_{m,i,k}(E_m; E_k) \rightarrow T_{m,i,k}(E_m; E_k)$ vornehmen (das ist nicht identisch mit der hermitischen Konjugation).

Beziehung (12) ist symmetrisch bezüglich der erzeugten Mesonen. Sie besitzt ausserdem die erforderliche Crossing-Symmetrie. Den in (12) explizit angegebenen Termen entsprechen die folgenden Graphen (wir wählen $n = 3$):

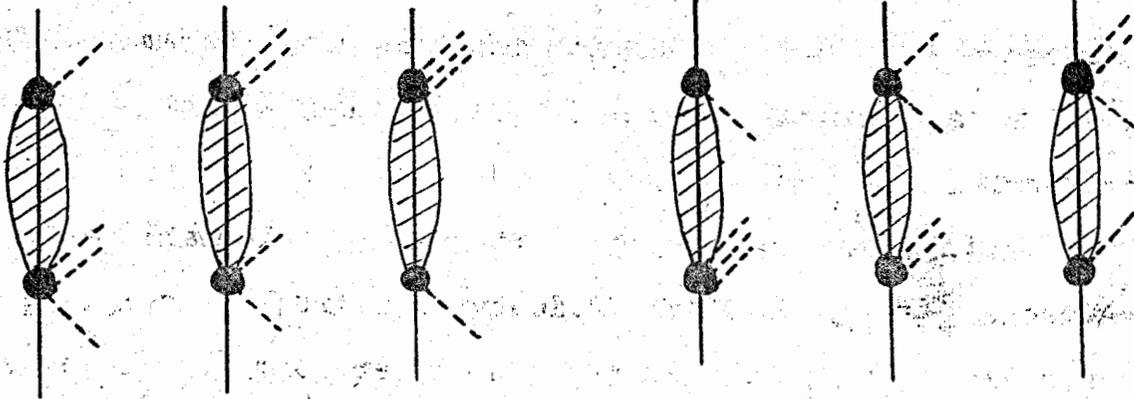


Abb. 2

V. Prozess $\pi + N \rightarrow 2\pi + N$

An Hand des Prozesses $\pi + N \rightarrow 2\pi + N$ soll näher erörtert werden, welche Folgerungen sich aus der durch (10) getroffenen Variablenwahl ergeben.

Wir vergleichen hierzu die Ergebnisse dieser Arbeit für $n = 2$ mit der Arbeit⁴⁾, in der

$$E_1 = \frac{1}{2}(E + \Delta) \quad ; \quad E_2 = \frac{1}{2}(E - \Delta) \quad (14)$$

gewählt wurde. In beiden Fällen liegen zwei Variable vor, von denen eine fixiert werden muss, um die Aufstellung der Dispersionsbeziehung zu ermöglichen. Diese Fixierung kann auf verschiedene

Arten erfolgen (insbesondere bei n π -Mesonen). Im Falle der Arbeit⁴⁾ wird die D i f f e r e n z der Energie der erzeugten

π -Mesonen $E_1 - E_2 = A$ konstant gehalten, in unserem vorliegenden Falle dagegen das V e r h ä l t n i s der Energie der erzeugten Mesonen $\frac{E_1}{E_2} = \frac{v_1}{v_2}$.

Die Möglichkeit der unterschiedlichen Variablenwahl hat mathematische und physikalische Bedeutung. In Arbeit⁴⁾ zeigt es sich, dass die Wahl der Veränderlichen in der Form (14) zu einer einschränkenden Bedingung für die Existenz der Dispersionsbeziehung und der daraus folgenden Beziehung von der Art der Chew-Low-Gleichungen führt, da es nur für $|\Delta| < 2\mu$ einen Abschnitt auf der reellen E-Achse gibt, für den T^{*t}, T^{*v} . Die hier durchgeführten Untersuchungen zeigen, dass bei der Variablenwahl (10) ~~für die~~ solche Bedingungen nicht auftreten (auch bei beliebigem n).

Man muss bei der Fixierung der Veränderlichen darauf achten, dass das erforderliche analytische Verhalten gewährleistet wird und dass die Symmetrieeigenschaften des Prozesses nicht verletzt werden. Eine Fixierung z.B. der Form $E_1 = \text{konst.} = c$, $E_2 = E - c$ würde bedeuten, dass ein Teil des Spektrums von A wegen des Auftretens von Gliedern der Form $\sim \int (E_1 \pm E_2)$ unabhängig von E ist, so dass es innerhalb der betrachteten Modells nicht möglich ist, exakte Beziehungen für D (Dispersionsbeziehungen) oder T (Beziehungen von der Art der Chew-Low-Gleichungen) aufzustellen.

Demnach lassen sich für einen Fixed-Nukleon-Prozess $\pi + N \rightarrow n\pi + N$ (wobei $n \geq 2$) verschiedenartige Dispersionsbeziehungen und Beziehungen vom Charakter der Chew-Low-Gleichungen aufstellen, die sich durch eine unterschiedliche Wahl der $(n-1)$ auftretenden Parameter unterscheiden^{x)}.

Wir können annehmen, dass die Endergebnisse einer (für $n > 1$ anscheinend praktisch nicht möglichen) exakten Auswertung der Dispersionsbeziehungen die gleichen seien. Für Näherungsausdrücke, die man aus der entsprechenden Dispersionsbeziehung oder Chew-Low-Gleichung gewinnt, ist das jedoch offensichtlich nicht der Fall. So sind z.B. die Einnukleonen-Glieder in Arbeit⁴⁾ von der Form $T_{11}(\Delta) \lambda^x$, während sie hier von der Art $T_{11}(0)$ sind.

Eine gemeinsame Eigenschaft dieser verschiedenen Varianten der Dispersionsbeziehungen und der Beziehungen vom Charakter der Chew-Low-Gleichungen besteht darin, dass für alle auftretenden Ausdrücke stets der Energiesatz erfüllt ist. Das beruht darauf, dass wir stets den hermitischen Teil der Übergangsamplitude durch das Dispersionsintegral des antihermitischen Teils ausdrücken.

Für den Prozess $\pi + N \rightarrow 2\pi + N$ wurden in einigen Arbeiten⁹⁻¹¹⁾ Chew-Low-Gleichungen aufgestellt, wobei die benutzten Größen nicht notwendigerweise auf der Energieschale liegen. Die Autoren nehmen dabei z.B. an, dass das Argument der Amplitude der elastischen Streuung (Ein-Nukleonen-Glied) völlig im physikalisch beobacht-

x) Im Falle relativistischer Betrachtungen vergrößert sich die Anzahl der Parameter noch wesentlich. Siehe z.B. ⁸⁾.

x) In einigen Fällen ist in Arbeit⁴⁾ eine andere Vorzeichenwahl getroffen als in der vorliegenden Arbeit.

baren Bereich der Energie liegt, was nicht gerechtfertigt ist. In dem hier dargelegten Fall, bei dem die stete Erfüllung des Energiesatzes gefordert wird, liegt das Argument dieser Amplitude im nichtbeobachtbaren Bereich des Prozesses für die elastische Streuung und muss mit Hilfe der entsprechenden Dispersionsbeziehung berechnet werden. Ergebnisse dieser Rechnungen werden in einer folgenden Arbeit veröffentlicht.

Herrn Dr. Logunow bin ich für zahlreiche Gespräche und Anregungen zu grossem Dank verpflichtet.

Der Artikel wurde in die
Verlagsabteilung am
16 August 1958 geliefert.

1. A.A. Logunow, A.N. Tawchelidse, Mitt. d. Grus. Ak.d.Wiss. (USSR), 18 , 19 (1957); 18 , 533 (1957).
2. R. Norton, A. Klein, Phys. Rev. 109 584 (1958).
3. N.N. Bogoljubow, D.W. Schirkow, "Einführung in die Theorie der Quantenfelder".
4. W. Zöllner, D. Chrystaljow, W. Serebrjakow, A. Lesnow, "Zeitschrift für Naturforschung", (im Druck).
5. Wick, Review of Mod. Phys.
6. Castilleja, Dalitz, Dyson, Phys. Rev. 101 453 (1956).
7. F. Dyson, Phys. Rev. 106, 157 (1957).
8. W. Zöllner, Dokl. Ak. Nauk (USSR), (im Druck).
9. J. Franklin, Phys. Rev. 105 1101 (1957).
10. L. Rodberg, Phys. Rev. 106 1090 (1957).
11. R. Omnes, Nuovo Cim. V, 983 (1957); VI, 780 (1957).