

СЗУТ. 2  
Г-859

16/IX-65

ОБЪЕДИНЕННЫЙ  
ИНСТИТУТ  
ЯДЕРНЫХ  
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

P-2277



В.Г. Гришин, Э.П. Кистенев, Л.И. Лепилова,  
В.И. Мороз, Му Цзюнь

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЦЕНТР  
ЛАБОРАТОРИЯ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЙ

ИЗМЕРЕНИЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ И УГЛОВЫХ  
ХАРАКТЕРИСТИК ЭЛЕКТРОНОВ И  $\gamma$ -КВАНТОВ  
В ПРОПАНОВОЙ ПУЗЫРЬКОВОЙ КАМЕРЕ

1965

P-2277

3542/2 48

В.Г. Гришкин, Э.П. Кистенев, Л.И. Лепилова,  
В.И. Мороз, Му Цзюнь

ИЗМЕРЕНИЕ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ И УГЛОВЫХ  
ХАРАКТЕРИСТИК ЭЛЕКТРОНОВ И  $\gamma$ -КВАНТОВ  
В ПРОПАНОВОЙ ПУЗЫРЬКОВОЙ КАМЕРЕ

Направлено в ПТЭ

Объединенный институт  
ядерных исследований  
БАНЬ МОУТЕНА

### 1. Методика измерений

В результате измерения координат точек на треках частиц в камере<sup>/1/</sup> мы получаем набор  $(X_i, Y_i, Z_i)$  ( $i = 1, \dots, N; N \leq 20$ ) для каждого из следов в системе осей  $X, Y, Z$ , связанных с камерой. В геометрической программе<sup>/2/</sup> заложена аппроксимация измеренных точек на плоскости  $XOY$ , перпендикулярной магнитному полю, параболой вида

$$y = a \left( x - \frac{\ell}{2} \right)^2 + c, \quad (1)$$

где

$$\ell = \sqrt{(X_1 - X_N)^2 + (Y_1 - Y_N)^2}. \quad (2)$$

Система координат  $(x, y)$  определяется следующим образом:

Ось  $x$  проходит через точки  $(X_1, Y_1)$  и  $(X_N, Y_N)$ . Ось  $y$  лежит в плоскости  $XOY$  и перпендикулярна к  $Ox$ , начало отсчета совпадает с точкой  $(X_1, Y_1)$ , ось  $(x, y)$  и  $(X, Y)$  образуют одинаковые системы, левую или правую соответственно (см. рис. 1).

Коэффициенты параболы  $a$  и  $c$  определяем методом наименьших квадратов; считая, что измеренные точки имеют одинаковый вес, и пренебрегая ошибкой  $\Delta x$ . За экспериментальное значение радиуса кривизны ( $R_\beta$ ) проекции трека принимается

$$R_\beta = \frac{1}{2a_\beta}. \quad (3)$$

Угол  $\beta_\beta$  определяется как угол между осью  $Ox$  и перпендикуляром, проведенным в плоскости  $XOY$  к прямой, проходящей через точку  $(X_1, Y_1)$  и мгновенный центр кривизны параболы (1) в точке  $(\frac{\ell}{2}; c)$ .

Угол  $\alpha_\beta$  определяется в геометрической программе методом наименьших квадратов, как угол подъема винтовой линии, ось которой проходит через точку  $q$  (см. рис. 1) параллельно оси  $OZ$  и радиус кривизны которой равен  $R_\beta$ .

Таким образом, геометрическая программа сопоставляет каждому следу три параметра  $R_\beta$ ,  $\beta_\beta$  и  $\alpha_\beta$  и их среднеквадратичные ошибки, которые определяются по формулам, аналогичным приведенной ниже:

$$\frac{\Delta R_3}{R_3} = \frac{1}{R_3} \sqrt{\sum \left( \frac{\partial R_3}{\partial y_i} \Delta y_i \right)^2} \quad (4)$$

Целью предлагаемого далее расчета является (а) определение тех поправок, которые необходимо сделать к измеренным параметрам, чтобы получить несмещенные оценки параметров, характеризующих частицу, которая оставила изучаемый след; и (б) определение дисперсии полученной оценки.

## II. Определение импульса электрона и позитрона (введение поправок на радиационные и ионизационные потери)

а) Вычисление поправки к импульсу электрона (позитрона), полученному из геометрической программы.

Формула для вычисления поправки к импульсу электрона (позитрона) получена следующим образом:

Выводим уравнение проекции траектории релятивистского электрона (позитрона) на плоскость, перпендикулярную магнитному полю, считая, что (а) поле направлено по оси OZ; (б) многократное рассеяние пренебрежимо мало; (в) на каждом элементе траектории потери электрона (позитрона) равны средним потерям, вычисленным в предположении, что потери на излучение на элементе dS не превосходят величину E/κ, где E — энергия электрона (позитрона); κ — константа отсечки при отборе следов на измерения, которая будет определена в дальнейшем, dS — элемент длины электронного (позитронного) трека в пространстве.

Полученную таким образом кривую аппроксимируем параболой вида (1)  $y = a(x - \frac{l}{2})^2 + c$  в системе координат, связанной с треком. В результате аппроксимации получаем зависимость между кривизной траектории в начальной точке и коэффициентом a параболы, определенным экспериментально из измерений точек на следе частицы.

Уравнение изменения импульса электрона (позитрона) запишем в следующем виде:

$$dP = - \left[ \frac{P(1+b)}{X_0 \kappa} + \xi \right] dS, \quad (5)$$

где принято, что релятивистский фактор  $\gamma \gg 1$  так, что  $P \approx E$ ,  $b = 0,014^{1/13}$ , P — импульс электрона (позитрона), измеренный в (Мэв/с),  $X_0$  — радиационная длина в см.

Нами было принято для расчетов значение радиационной длины среднее между приводимыми в работах<sup>3,4/</sup>, равное 45,3 г/см<sup>2</sup>, что для пронапа плотности 0,427 г/см<sup>3/5/</sup> соответствует  $X_0 = 106,0$  см.

$\xi = - \frac{dP}{dS}$  — ионизационные потери, даваемые формулой (8), выведенной с учетом эффекта плотности<sup>12/2</sup> и дающей значение ионизационных потерь электронов и позитронов в наших условиях с точностью не хуже 2% (потенциалы ионизации водорода и углерода приняты равными соответственно 15,8 и 76,4 эв<sup>16/</sup>):

$$- \frac{dP}{dS} = 0,0196 [41,9 + 2 \ln \frac{P}{0,51}] \left[ \frac{\text{Мэв}}{\text{с.см}} \right]. \quad (8)$$

В дальнейшем мы будем везде писать только об электронах, однако все сказанное будет справедливо и для позитронов.

В сделанных нами предположениях  $n = \text{Sin} \alpha = \text{const}$ . Обозначая через ds элемент длины проекции трека на плоскость XOY,

$$k_1 = \frac{1+b}{\sqrt{1-n^2} X_0 \kappa}, \quad (7)$$

$$\eta = \frac{\xi}{300 \text{H} \cdot 10^{-3}}, \quad (8)$$

где H — величина магнитного поля в гауссах, получим дифференциальное уравнение

$$\frac{dR}{ds} = k_1 R - \eta, \quad (9)$$

где R — кривизна проекции трека на плоскость XOY.

Из уравнения (9) после интегрирования получим

$$R(s) = R_0 e^{-k_1 s} - \frac{\eta}{k_1} (1 - e^{-k_1 s}). \quad (10)$$

Выражение (10) можно с хорошей точностью представить в виде

$$R(s) = R_0 e^{-ks}, \quad (11)$$

где

$$k = k_1 + \frac{\eta}{R} = \frac{1+b}{\sqrt{1-n^2} \kappa X_0} + \frac{\xi}{300 \text{H} \cdot R}. \quad (12)$$

Указанная замена при условии, что  $s \ll R$  (условие допустимости аппроксимации следа параболой), дает ошибку в определении радиуса кривизны не более 4%.

Из выражения (11) с точностью до производной 4-го порядка включительно получим уравнение проекции траектории на плоскость, перпендикулярную магнитному полю (рис. 2):

$$Y_1 = \frac{1}{2} \frac{X_1^2}{R_0} + \frac{1}{6} \frac{k}{R_0} X_1^3 - \frac{1}{24} \left( \frac{3}{R_0^2} + \frac{k^2}{R_0} \right) X_1^4. \quad (13)$$

Определенная таким образом кривая (13) проходит через точку (0,0) и касается в этой точке оси  $OX_1$ . Обозначим через  $(X_{1k}, Y_{1k})$  точку, лежащую на кривой (13) на расстоянии  $\ell$  от точки (0,0). Перейдем в собственную систему координат трека  $(x, y)$ , которую мы определим как

$$x = X_{1k} \cos \phi + Y_{1k} \sin \phi, \quad (14)$$

$$y = -X_{1k} \sin \phi + Y_{1k} \cos \phi,$$

где

$$\sin \phi = \frac{Y_{1k}}{\sqrt{X_{1k}^2 + Y_{1k}^2}}, \quad (15)$$

$$\cos \phi = \frac{X_{1k}}{\sqrt{X_{1k}^2 + Y_{1k}^2}},$$

$$\ell = \sqrt{X_{1k}^2 + Y_{1k}^2}.$$

В этой системе координат уравнение траектории будет иметь вид

$$y = a_1 x + \frac{1}{2} a_2 x^2 + \frac{1}{6} a_3 x^3 + \frac{1}{24} a_4 x^4, \quad (16)$$

где

$$a_1 = -\operatorname{tg} \phi, \quad (17)$$

$$a_2 = A \frac{1}{\cos^3 \phi}, \quad (18)$$

$$a_3 = \frac{Ak \cos \phi - 3A^2 \sin \phi}{\cos^5 \phi}, \quad (19)$$

$$a_4 = \frac{\cos \phi [\cos \phi (3A^3 + k^2 A) - 5kA^2 \sin \phi]}{\cos^7 \phi} + \frac{-5A \sin \phi [Ak \cos \phi - 3A^2 \sin \phi]}{\cos^7 \phi}. \quad (20)$$

$$A = \frac{1}{R_0}. \quad (21)$$

Рассмотрим аппроксимацию полученной кривой параболой вида

$$y = a \left( x - \frac{\ell}{2} \right)^2 + c. \quad (22)$$

Полагая, что вес каждого интервала  $dx$  постоянен (это условие соответствует равномерному распределению точек на следе<sup>х)</sup> при одинаковом весе каждой точки) с помощью метода наименьших квадратов определим коэффициенты  $a$  и  $c$ .

Имеем

$$\int_0^{\ell} [y - a \left( x - \frac{\ell}{2} \right)^2 + c] dx = 0, \quad (23)$$

$$\int_0^{\ell} [y - a \left( x - \frac{\ell}{2} \right)^2 + c] \left( x - \frac{\ell}{2} \right)^2 dx = 0, \quad (24)$$

где под  $y$  понимается выражение (16).

Решая эту систему, получим

$$2a = \left( a_2 + \frac{\ell}{2} a_3 + \frac{\ell^2}{7} a_4 \right). \quad (25)$$

Выражение (25) дает зависимость экспериментально измеренного радиуса кривизны  $R_{\text{э}} = \frac{1}{2a} = \frac{1}{A_{\text{э}}}$  от величины  $R = \frac{1}{A}$ , пропорциональной импульсу электрона в начальной точке. Разлагая в ряд правую часть выражения (25) в точке  $A_{\text{э}}$  и ограничиваясь линейными членами, получим

$$A = \left( a_2 + \frac{\ell}{2} a_3 + \frac{\ell^2}{7} a_4 \right) \Big|_{A_{\text{э}}} + \left( \frac{da_2}{dA} + \frac{\ell}{2} \frac{da_3}{dA} + \frac{\ell^2}{7} \frac{da_4}{dA} \right) \Big|_{A_{\text{э}}} \cdot (A - A_{\text{э}}), \quad (26)$$

откуда

$$A = \frac{A_{\text{э}} - \left( a_2 + \frac{\ell}{2} a_3 + \frac{\ell^2}{7} a_4 \right) \Big|_{A_{\text{э}}}}{a_2' + \frac{\ell}{2} a_3' + \frac{\ell^2}{7} a_4'} \Big|_{A_{\text{э}}} + A_{\text{э}}. \quad (27)$$

При вычислении производных  $a_2'$ ,  $a_3'$ ,  $a_4'$  следует учитывать связь между углом  $\phi$  и величиной  $A$ , которая дается приводимой ниже формулой (30).

Из (13) и (15) следует

$$\sin \phi = \frac{A \ell \cos^2 \phi \left[ 1 + \frac{k}{3} \ell \cos \phi + \frac{\ell^2 \cos^2 \phi}{12} (3A^2 + k^2) \right]}{12}. \quad (28)$$

учитывая, что второй и третий члены в квадратных скобках малы по сравнению с единицей и что  $\frac{A \ell}{2} \ll 1$ , для определения  $\sin \phi$  воспользуемся методом Ньютона, приняв за приближенное значение

<sup>х)</sup> При измерении следа точки располагаются приблизительно равномерно.

$$\sin \phi_0 = \frac{Al}{1 + \sqrt{1 + A^2 \ell^2}} \quad (29)$$

Из (28) и (29) получим

$$\sin \phi = \sin \phi_0 - \frac{F}{F_1} \quad (30)$$

где

$$F = \sin \phi_0 - \frac{Al}{2} \cos^2 \phi_0 \left[ 1 + \frac{k}{3} \ell \cos \phi_0 + \frac{\ell^2 (3A^2 + k^2)}{12} \cos^2 \phi_0 \right] \quad (31)$$

$$F_1 = 1 + \frac{A_f \ell}{2} \cos^2 \phi_0 \left[ \frac{k\ell}{3} \operatorname{tg} \phi_0 + \frac{\ell^2 (3A^2 + k^2)}{6} \sin \phi_0 \right] \quad (32)$$

Формула (27) дает возможность определить истинное значение кривизны траектории  $A$  как функцию измеренной величины  $A_0$ , длины хорды  $\ell$  и константы  $k$ , характеризующей потери (см. формулу (12)).

В таблице 1 представлены величины поправок (учитывающие радиационные и ионизационные потери) к измеренному импульсу электрона (в процентах от  $P$ ), рассчитанные по формуле (27) для случая  $\kappa \sqrt{1 - \eta^2} = 1$ .

Т а б л и ц а 1

$P, \text{ГэВ/с}$	$\ell, \text{см}$	0	2	5	10	20	30	40
0,1		0	2,025	5,145	10,260	18,833	—	—
0,3		0	—	—	6,767	—	—	—
1		0	—	—	5,463	11,122	17,251	23,558
10		0	—	—	4,935	10,133	15,595	21,320

Значения поправок, приведенные в таблице, как видно из всего сказанного выше, справедливы лишь для метода аппроксимации параболой проекции следа на плоскость, перпендикулярную магнитному полю.

### III. Определение ошибки в измерении импульса электрона (позитрона)

Импульс, определенный при аппроксимации следа параболой, может быть представлен как

$$P_0 = P_0 \pm \Delta P_{\text{изм}} \pm \Delta P_{\text{MH}} \pm \Delta P_{\text{H}} - k_0 \Delta P_1 - \Delta P_2 \quad (33)$$

где  $P_0$  — начальный (истинный) импульс электрона;  $P_0$  — импульс электрона определенный непосредственно по параметрам параболы;  $\Delta P_{\text{изм}}$  — ошибка в определении импульса, возникающая из-за неточности определения коэффициентов параболы (распределена по Гауссу);  $\Delta P_{\text{MH}}$  — ошибка в определении импульса, возникающая из-за искажения траектории многократным рассеянием (распределена по Гауссу);  $\Delta P_{\text{H}}$  — ошибка в определении импульса, возникающая из-за неоднородности магнитного поля при обработке следов, расположенных в разных частях камеры,  $\Delta P_{\text{H}}$  может считаться распределенной по Гауссу;  $\Delta P_1$  — истинные потери импульса на излучение на длине  $S$ ;  $\Delta P_2$  — поправка импульса за счет наличия ионизационных потерь. *на длине*

Учитывая изложенную выше процедуру введения поправок на среднее значение ионизационных и радиационных потерь и на отличие проекции следа от параболы, получим:

$$P_0 = P_0 + k_0 \overline{\Delta P_1} + \Delta P_2 \quad (34)$$

или

$$P_0 = P_0 \pm \Delta P_{\text{изм}} \pm \Delta P_{\text{MH}} \pm \Delta P_{\text{H}} + k_0 (\overline{\Delta P_1} - \Delta P_1) \quad (35)$$

где  $\overline{\Delta P_1}$  — среднее значение потерь импульса на излучение (с учетом обрезания  $\kappa$ ) на длине  $\ell$ ,  $P_0$  — искомая оценка импульса электрона;  $k_0$  — коэффициент пропорциональности между средними потерями на излучение и величиной поправки.

Из формулы (35) следует, что в результате усреднения измерений треков электронов одного и того же импульса  $P_0$  получим, что  $\overline{P_0} = P_0$ , т.е.  $P_0$  дает несмещенную оценку величины импульса  $P_0$ .

Дисперсия величины  $P_0$  определяется как сумма дисперсий отдельных величин:

$$D = (\delta P_0)^2 = P_0^2 \left\{ \left( \frac{\delta P_{\text{изм}}}{P_0} \right)^2 + \left( \frac{\delta P_{\text{MH}}}{P_0} \right)^2 + \left( \frac{\delta P_{\text{H}}}{P_0} \right)^2 + k_0^2 \left( \frac{\delta P_1}{P_0} \right)^2 \right\} \quad (36)$$

Рассмотрим последовательно выражения, стоящие в фигурных скобках.

#### 1) Измерительная ошибка

Если принять, что

$$a) \text{ в формуле (22) } \ell = \sqrt{X_{1k}^2 + Y_{1k}^2} \ll R,$$

б)  $N$  измеренных точек равномерно распределены на следе и  $N \gg 1$ , для аппроксимации следа параболой получим:

$$\frac{\delta P_{\text{изм}}}{P_0} = 12\sqrt{5} \frac{\Delta}{S^2(1-n^2)\sqrt{N}} R, \quad (37)$$

где

$$\Delta = \sqrt{(\Delta x)^2 \sin^2 \beta + (\Delta y)^2 \cos^2 \beta},$$

$\Delta x^2$  и  $\Delta y^2$  характеризуют разброс измеренных точек относительно подобранной кривой. Для  $\beta = \frac{\pi}{2}$  величина  $\Delta$  в условиях нашего облучения равна  $0,004$  см.  $\approx 40 \mu$

2) Ошибка в определении импульса, вносимая многократным рассеянием, была взята в виде <sup>17/</sup>

$$\frac{\delta P_{\text{МН}}}{P_0} = \frac{3,5 \cdot 10^4}{\beta N S^{\frac{1}{2}} X_0^{\frac{1}{2}}}. \quad (38)$$

3) Ошибка, вносимая неоднородностью магнитного поля в условиях облучения 24-литровой пропановой камеры ЛВЭ ОИЯИ в большом магните, была равной

$$\frac{\delta P_{\text{П}}}{P_0} = \frac{\Delta H}{H} \approx 0,03. \quad (39)$$

4) Определение дисперсии радиационных потерь

Для импульсов электронов больших 25 Мэв/с распределение радиационных потерь приближенно может быть представлено в виде <sup>18/</sup>

$$w(y)dy = (X_0 \ln 2)^{-1} \frac{e^{-y} dy}{y} dS, \quad (40)$$

где  $w$  - вероятность излучения кванта с импульсом  $k' = P_0(1-e^{-y})$

электроном с начальным импульсом  $P_0$  (Мэв/с) на элементе пути  $dS$ .

Если измерения ведутся таким образом, что отбрасываются все случаи излучения на элементе  $dS$  квантов с импульсом, большим  $k' = P_0(1-e^{-y})$  (отбор событий без резкого изменения энергии частицы в какой-либо области), то средние потери электрона на излучение на элементе пути  $dS$  запишутся в виде

$$d\bar{P} = - \frac{P_0}{X_0 \kappa_0} dS, \quad (41)$$

где

$$\kappa_0 = \frac{\ln 2}{\int_0^{y_0} \frac{e^{-y}(1-e^{-y})}{y} dy}. \quad (42)$$

Однако отбор событий на измерения можно вести и иначе - отбрасывать те траектории, на которых электрон в конце имеет импульс, меньший  $P = P_0 e^{-y_0}$  (отбор по полным потерям импульса на длине  $S$ ). Такой метод накладывает более жесткие условия на величину потерь, нежели рассмотренный выше. Импульсное распределение электронов по прохождению длины  $S$  в среде дается формулой <sup>18/</sup>

$$W(y)dy = \frac{e^{-y} y \frac{S}{X_0 \ln 2}^{-1}}{\Gamma\left(\frac{S}{X_0 \ln 2}\right)} dy. \quad (43)$$

Отсюда среднее значение импульса электрона по прохождению длины  $S$  по всем случаям, когда общие потери не превышали  $\Delta P = P_0(1-e^{-y_0})$ , будет

$$\bar{P}(y_0, S) = P_0 e^{-\frac{S}{X_0 \ln 2}} \frac{\Gamma(2y_0, \frac{S}{X_0 \ln 2})}{\Gamma(y_0, \frac{S}{X_0 \ln 2})}, \quad (44)$$

где  $\Gamma(n, a)$  - неполная гамма-функция.

График зависимости энергии электрона по прохождению длины  $S$  в пропане от величины  $y_0$  представлен на рис. 3.

Дифференцируя формулу (44) по  $S$  получим

$$d\bar{P} = \frac{\bar{P}(S, y_0)}{X_0 \kappa(S, y_0)} dS, \quad (45)$$

где  $\kappa(0, y_0)$  дается формулой (42).

В таблице 2 представлены значения  $\kappa(S, y_0)$  в зависимости от  $S$  и величины обрезания  $y_0$ .

Т а б л и ц а 2

$\frac{S}{X_0}$ $y_0$	0,035	0,14	0,21	0,28	0,35	0,7
0,5	2,3	2,42	2,6	2,8	3,0	3,2
1	1,51	1,59	1,64	1,7	1,73	1,8
2	1,17	1,18	1,2	1,22	1,27	1,3

Как видно из этой таблицы, зависимость  $\kappa(S)$  слабая, поэтому приближенно можно положить

$$\kappa(S) \approx \kappa(0) = \frac{\ln 2}{\int_0^{y_0} \frac{e^{-y}(1-e^{-y})}{y} dy} \quad (46)$$

по крайней мере для встречающихся у нас длин  $S \leq \frac{1}{3} X_0$  и величин обрезаний  $y_0 \geq 0,5$ .

Принимая во внимание сказанное выше, считаем, что дисперсия, которая будет вычислена исходя из формулы (43), справедлива для обоих методов.

На рисунке 4 представлена зависимость корня из дисперсии ( $\delta$ ) средней величины импульса электрона по прохождению длины  $S$  в пропане от величины обрезания  $y_0$ , рассчитанная по формуле

$$\delta = \sqrt{\left(\frac{\delta P_1}{P_0}\right)^2} = \left\{ e^{-\frac{\ln 3 \cdot S}{\ln 2 X_0}} \frac{\Gamma(3y_0, \frac{S}{X_0 \ln 2})}{\Gamma(y_0, \frac{S}{X_0 \ln 2})} - e^{-\frac{2S}{X_0}} \sqrt{\left(\frac{2y_0, \frac{S}{X_0 \ln 2}}{\Gamma(y_0, \frac{S}{X_0 \ln 2})}\right)^2} \right\}^{1/2} \quad (47)$$

Для определения величины  $y_0$  и длины  $S$ , на которой допустимы измерения импульса электрона, можно предложить на выбор следующие два приема:

1) Исходя из допустимой величины ошибки  $\frac{\Delta P_0}{P_0}$ , выбрать  $y_0$  и измерять импульс электрона вначале ( $P_{нач}$ ) и в конце ( $P_{кон}$ ) траектории независимо. Отбрасывать случаи, не удовлетворяющие неравенству

$$\frac{P_{нач}}{P_{кон}} > e^{-y_0} \quad (48)$$

2) При просмотре и подготовке к измерениям или при анализе результатов измерений отбрасывать случаи с видимым изменением кривизны следа. При этом можно определить величину  $\bar{S}(y_{гр})$  - путь, который должен пройти электрон до появления резкого сброса энергии.

Тогда из выражения

$$\frac{dS}{\bar{S}(y_{гр})} = \frac{dS}{X_0 \ln 2} \int_{y_{гр}}^{\infty} \frac{e^{-y}}{y} dy \quad (49)$$

следует, что

$$\int_{y_{гр}}^{\infty} \frac{e^{-y}}{y} dy = \frac{\bar{S}(y_{гр})}{X_0 \ln 2} \quad (50)$$

Более грубо  $y_{гр}$  в этом случае можно определить, исходя из закона " $\frac{1}{E}$ " для излучения электрона

$$\frac{dS}{\bar{S}(y_{гр})} = \frac{dS}{X} \int_{E_0}^{E_0} \frac{dE}{E} \quad (51)$$

откуда

$$y_{гр} = \frac{\bar{S}(y_{гр})}{X_0} \quad (52)$$

### 5. Определение коэффициента $k_0$ .

Как следует из формулы (34),

$$k_0 = \frac{P_0 - P_0 \cdot \left| \frac{X_0}{\Delta P_1} \right|}{\Delta P_1} \quad (53)$$

Как видно из таблицы 1, величину  $k_0$  можно положить равной приблизительно 1/2 (для метода аппроксимации проекции следа на плоскость, перпендикулярную магнитному полю параболой).

Из сказанного в этом разделе видно, что повышение точности определения импульса электрона возможно за счет:

1) уменьшения величины  $y_0$ , что однако ведет к потере части случаев. График зависимости числа случаев, удовлетворяющих критерию  $y \leq y_0$ , от величины  $y_0$  и длины следа в процентах к полному числу случаев приведен на рисунке 5. Кривые рассчитаны по формуле

$$\frac{N(S, y_0)}{N_0} = \frac{\Gamma(y_0, \frac{S}{X_0 \ln 2})}{\Gamma(y_0)} \quad (54)$$

где  $\Gamma(y_0)$  - полная гамма-функция;

2) такого распределения измеренных точек на следе или введения их в программу с весами, которое обратит в минимум выражение (36);

3) подбора кривой, лучше описывающей проекцию траектории электрона на плоскость, перпендикулярную магнитному полю, нежели парабола (это уменьшит коэффициент  $k_0$ );

4) многократного измерения одного и того же события, чем достигается уменьшение измерительной ошибки.



IV . Определение углов  $\beta$ ,  $\alpha$  и их ошибок

1. Вычисление угла  $\beta$

Как уже говорилось в разделе 1, программа считает угол  $\beta$  как угол между осью X и перпендикуляром к прямой, проведенной из центра кривизны в первую точку следа.

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{X_{\Pi} - X_1}{Y_1 - Y_{\Pi}}, \quad (55)$$

где  $(X_{\Pi}, Y_{\Pi})$  - координаты центра кривизны аппроксимирующей кривой,  $(X_1, Y_1)$  - координаты первой точки следа.

2. Вычисление ошибки в определении угла  $\beta$

а) Измерительная ошибка

Величину измерительной ошибки можно оценить по формуле, учитывающей корреляции между x-ой и y-ой координатами центра кривизны

$$\Delta \beta_{\text{изм}} = \left\{ \frac{1}{4} \left( \frac{\ell}{R} \right)^2 \left( \frac{\Delta P_{\text{изм}}}{P_0} \right)^2 + \left( \frac{\Delta \ell}{R} \right)^2 + 2 \left( \frac{\Delta}{\ell} \right)^2 \right\}^{1/2}, \quad (56)$$

где

$$(\Delta \ell)^2 = (\Delta x)^2 \cos^2 \beta + (\Delta y)^2 \sin^2 \beta, \quad (57)$$

$$\Delta, \frac{\Delta P_{\text{изм}}}{P_0} \quad (\text{см. формулу (37)})$$

Чтобы программным путем избежать введения личных дисперсий каждого оператора, вместо  $\left( \frac{\Delta P_{\text{изм}}}{P_0} \right)^2$  в формулу (56) можно подставлять аналогичное выражение, вычисляемое программой:

$$\left( \frac{\Delta R}{R} \right)^2 = \sum_1^N \left( \frac{\partial R}{\partial y_1} \right)^2 (\Delta y_1)^2, \quad (58)$$

где под  $\Delta y_1$  - подразумевается отклонение i-той измеренной точки от подобранной кривой.

б) Дисперсия многократного рассеяния

Величина ошибки в угле  $\beta$ , вносимая многократным рассеянием, оцененная для аппроксимации следа окружностью по трем точкам в предположении, что частица, прошедшая в среде расстояние S, имеет вероятность попасть в интервал боковых смещений  $(y, y + dy)$  и угловых отклонений  $(\theta, \theta + d\theta)$ , даваемую Ферми<sup>/8,10/</sup> и равную,

$$\overline{\Delta \beta_{\text{МН}}^2} = \frac{7}{24} \ell \theta_s^2, \quad (59)$$

где  $\theta_s^2$  - средний квадрат угла рассеяния, равный<sup>/10/</sup>

$$\theta_s^2 = \left( \frac{21}{\beta P} \right)^2 \frac{1}{X_0}; [P] = \text{Мэв/с}. \quad (60)$$

Таким образом, окончательно ошибка в определении угла  $\beta$  может быть записана в виде

$$\Delta \beta = \left\{ \frac{1}{4} \left( \frac{\ell}{R} \right)^2 \left( \frac{\Delta P_{\text{изм}}}{P_0} \right)^2 + \left( \frac{\Delta \ell}{R} \right)^2 + 2 \left( \frac{\Delta}{\ell} \right)^2 + \frac{7}{24} \ell \theta_s^2 \right\}^{1/2}. \quad (61)$$

3. Вычисление угла  $\alpha$

Как указывалось в первом разделе, геометрическая программа вычисляет угол  $\alpha$  методом наименьших квадратов как угол между касательной к следу в первой точке и плоскостью (ХОУ). Значение тангенса угла  $\alpha$  определяется по формуле<sup>/11/</sup>

$$\operatorname{tga} = \frac{\sum_1^N z_1 \sum_1^N \delta_1 - N \sum_1^N z_1 \delta_1}{R \left[ \left( \sum_1^N \delta_1 \right)^2 - N \sum_1^N \delta_1^2 \right]}, \quad (62)$$

где

$$\delta_1 = \arcsin \frac{z_1 - \frac{\ell}{2}}{R},$$

$x_1, z_1$  - координаты i-той точки следа в системе координат, связанной с треком.

4. Вычисление ошибки в определении угла  $\alpha$

а) Измерительная ошибка

Величина измерительной ошибки в определении угла  $\alpha$  рассчитывалась по формуле<sup>/11/</sup>

$$\Delta \alpha = \cos^2 \alpha \sqrt{\sum_1^N \left( \frac{\partial \operatorname{tga}}{\partial z_1} \right)^2 (\Delta z_1)^2}. \quad (63)$$

б) Ошибка, вносимая многократным рассеянием

Так как развертка трека имеет вид прямой линии в координатах  $(z, s)$ , то вносимая многократным рассеянием ошибка может быть оценена по формуле<sup>/17/</sup>

$$\overline{(\Delta \alpha_{\text{МН}}^2)}^{1/2} = 0,765 \left\{ \frac{12}{P \beta} \left( \frac{S}{X_0} \right)^4 \right\}^{1/2}; [P] = \text{Мэв/с}. \quad (64)$$

Таким образом, окончательно величину ошибки в определении угла можно записать

в виде

$$\Delta\alpha = \left\{ \Delta\alpha_{\text{мн}}^2 + \Delta\alpha_{\text{изм}}^2 \right\}^{1/2} \quad (65)$$

V. Определение импульсов  $\gamma$ -квантов, эффективных масс  $M_{\gamma\gamma}$  и соответствующих ошибок

1. Определение импульса  $\gamma$ -кванта

Импульс  $\gamma$ -кванта вычисляется как сумма импульсов электрона и позитрона, составляющих конверсионную пару

$$P_{\gamma} = P_{e^+} + P_{e^-}$$

Величина ошибки  $\frac{\Delta P_{\gamma}}{P_{\gamma}}$  получается усреднением по всем возможным распределениям импульса  $\gamma$ -кванта между электроном и позитроном и равна <sup>/12/</sup>

$$\frac{\Delta P_{\gamma}}{P_{\gamma}} = 0,85 \left( \frac{\Delta P_{e^+}}{P_{e^+}} \right) \quad (67)$$

или

$$\frac{\Delta P_{\gamma}}{P_{\gamma}} = \frac{1}{P_{\gamma}} \sqrt{(\Delta P_{e^+})^2 + (\Delta P_{e^-})^2}$$

2. Определение эффективной массы  $M_{\gamma\gamma}$

Масса частицы, распавшейся на два  $\gamma$ -кванта с импульсами  $P_1$  и  $P_2$ , определяется по формуле

$$M_{\gamma\gamma} = \sqrt{2P_1 P_2 (1 - \cos \theta_{12})} \quad (68)$$

где  $\theta_{12}$  - угол между направлениями движения  $\gamma$ -квантов.

Направление движения  $\gamma$ -кванта определяется при усреднении с учетом весов направления, вычисленного по точке рождения и точке конверсии в пару, и направления, даваемого суммарным импульсом электрона и позитрона. Ошибка в определении массы

$M_{\gamma\gamma}$  распавшейся частицы равна

$$\frac{\Delta M_{\gamma\gamma}}{M_{\gamma\gamma}} = \frac{\Delta P_{\gamma}}{\sqrt{2} P_{\gamma}} \quad (69)$$

где  $\frac{\Delta P_{\gamma}}{P_{\gamma}}$  дается формулой (67).

VI. Результаты эксперимента

1. Определение массы  $\pi^0$ -мезона

При просмотре снимков с 24-литровой пропановой камеры ЛВЭ ОИЯИ, облученной в  $\pi^-$ -мезонном пучке с энергией 4 Гэв/с были отобраны 0-лучевые звезды с не менее чем 2-мя  $\gamma$ -квантами. Всего было найдено 187 событий. Эти события обрабатывались на электронно-вычислительной машине М-20 вначале по геометрической программе <sup>/2/</sup>, а затем по программе идентификации  $\gamma$ -квантов, составленной с учетом поправок, о которых речь шла выше. На рис. 6 представлено распределение  $M_{\gamma\gamma}$  для 0-лучевых звезд с 2-мя  $\gamma$ -квантами. Обработка этой гистограммы дала следующие результаты:

$$M_{\pi^0} = 136,6 \pm 2 \text{ Мэв},$$

$$\frac{\Delta M_{\pi^0}}{M_{\pi^0}} = 0,12. \text{ x/}$$

Таким образом, мы получили несмещенное значение массы  $\pi^0$ -мезона, что является доказательством правильности введения поправок на ионизационные и радиационные потери электронов в среде.

Масса  $\pi^0$ -мезона, определенная без введения указанных поправок, по результатам, полученным непосредственно из геометрической программы, была равной  $122 \pm 3$  Мэв.

2. Экспериментальный анализ угловых ошибок

Для определения величины ошибки в измерении углов были сделаны следующие экспериментальные оценки:

а) измерены 105 проходящих  $\pi^-$ -мезонных треков ( $P_{\pi^-} = 4$  Гэв/с) следующим образом:

Измерялся один и тот же след на 10 см длины в направлении оси Y и обратном от соответствующей точки, взятой в центре (кадра) следа.

Определялись углы  $\alpha$ ,  $\beta$  для каждого участка следа, строились распределения по

$$\Delta\alpha = \alpha_1 - \alpha_2,$$

$$\Delta\beta = \beta_1 - \beta_2,$$

где под  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  подразумеваются углы  $\alpha$ ,  $\beta$  вычисленные геометрической программой для каждого из измеренных участков следа в точке, взятой за начало измерений. Полученные гистограммы представлены на рисунках 7, 8.

x/ 0,12 - в расчете на один случай.

б) Таким же образом были измерены 54 трека энергичных  $\delta^-$ -электронов ( $P_\delta \geq 500$  Мэв/с). Полученные распределения для  $\Delta\alpha$  и  $\Delta\beta$  представлены на рисунках 9,10. Как видно из рисунков (7, 9), распределение  $\Delta\beta$  симметрично относительно нуля, что говорит о малой величине смещения в угле  $\beta$ , которое возникает за счет нашего метода аппроксимации.

Ошибки в величине  $\Delta\beta$ , определенные экспериментально (см. рис. 7, 9), оказались равными соответственно 7,8' для прямых  $\pi^-$ -мезонных и 20,5' для электронных треков. Те же ошибки, определенные теоретически по формуле (81), равны 7,8' для  $\pi^-$ -мезонных и 24,5' для электронных треков.

Ошибки в величине  $\Delta\alpha$ , определенные экспериментально (см. рис. 8, 10), были равны соответственно 8,8' для  $\pi^-$ -мезонных и 23,1' для электронных треков (соответствующие величины ошибок, получаемые теоретическим расчетом по формуле (85), равны 8' и 23').

Авторы благодарят М.И.Подгорецкого, В.Б.Флягина, П.В.Шляпникова за ценные обсуждения, лаборантов просмотровой и измерительной групп ЛВЭ ОИЯИ за просмотр и измерения найденных событий.

## П Р И Л О Ж Е Н И Е 1

### Программа идентификации $\gamma$ -квантов (7-1)

#### Назначение программы

Программа предназначена для идентификации  $\gamma$ -квантов, образовавших электронно-позитронную пару на ядре в трековых камерах. При этом предполагается, что следы электрона и позитрона были предварительно обработаны по геометрическим программам 1-15 или 1-33<sup>1,2/</sup>, в которых проекция следа на плоскость, перпендикулярную магнитному полю (ХОУ), аппроксимируется параболой (вариант 7-1). Результаты обработки выдаются на печать и перфокарты, которые можно ввести в программу идентификации каналов реакции и в программу вычисления эффективных масс<sup>14/</sup>.

## Описание программы 7 - 1

1. Программа учитывает № программы в 1-й строке второй перфокарты по двум последним цифрам третьего адреса (если этот номер меньше 133, то предусмотрен уход на изменение перфокарт).

2. Исходный материал программы размещается на стандартных перфокартах следов и управляющей карте. Все эти перфокарты выданы геометрическими программами и отличаются только номерами программ.

В конце события подкладывается перфокарта с семерками.

3. Если при вводе не совпадают контрольные суммы, то на печать выдается следующее:

- 1) № зоны
  - 2) № события
  - 3) № трека по 1А
  - 4) k = - - - 3; .....105.
- } с управл. п/к ,

После печати вводится следующее событие

4. Если в следах не совпадают номера событий, то на печать выдается

- 1) № зоны,
- 2) № события,
- 3) № трека по 1А,
- 4) k = - - - 3; . . . . 106 и вводится следующее событие.

5. Если в событии нет гамма-кванта, то печатается

- 1) № зоны,
- 2) № события,
- 3) № = 0,
- 4) k = - - - 3; . . . . 107 и вводится следующее событие.

6. Если в событии нет данного следа, то печатается

- 1) № зоны,
- 2) № события,
- 3) № отсутствующего трека по 1А ,
- 4) k = - - - 3; . . . . 108 и вводится следующее событие.

7. Для всех следов заряженных частиц массива (события), импульс которых измерен по кривизне, вычисляется  $H_S$ , где  $S = 1, 2, \dots$  ( $S$  - номер следа по порядку). Если  $|H_1 - H_S| < 1$ , то событие обрабатывается, если  $> 1$ , то печатаются  $H_S$  все, начиная с  $H_1$ , потом обрабатывается следующее событие.

8. Вычисляются результаты кинематического расчета аналогично тому, как это делается в программе 2-20 (обсчет вилки, тройки, излома).

9. Вычисляются веса событий ( $W$ ) методом потенциальных длин.

10. При счете  $W$ , если нет пересечения ли с одной из плоскостей, ограничивающих эффективный объем, происходит заданный останов.

11. Программа допускает один и два просчета (управляется набором const в 7771).

12. Программа обрабатывает не более десяти следов.

Выдача на печать в программе 7-1

1. Тест печати и № события,

2. № зоны и № события

3. № программы

4. 1)  $N \cdot 0,3 \cdot 10^{-3}$

2)  $P_+; \Delta P_+$

3)  $P_-; \Delta P_-$

4)  $\theta_1, AB, \theta_{i+1}, AB$

5)  $\theta_1, i+1, \theta_1, AB$

6)  $\cos \theta_{AB,1}$

7)  $\Delta \cos \theta_{AB,1}$

8)  $\eta$

9)  $\Delta \eta$

10)  $(\eta/\Delta \eta)^2$

11)  $\sin \Phi$

12)  $\cos \Phi$

13)  $\varnothing$

14)  $\Delta \theta$

15)  $(\theta/\Delta \theta)^2$

16)  $W$

5. Выдача на печать и перфокарты

1) № события,

2) № зоны,

3) Призн.  $\gamma$ -квантов;

признак того, что  $(\Delta \alpha \gamma)^2$

и  $(\Delta \beta \gamma)^2$  выдаются на печать;

№ вилки

4)  $P_\gamma$

5)  $\Delta P_\gamma; (\Delta \beta \gamma)^2$

6)  $Q, (\Delta \alpha \gamma)^2$

7)  $l_\gamma$

8)  $m_\gamma$

9)  $n_\gamma$

10)  $x_1$

11)  $y_1 \quad \chi^2 = 0$

12)  $z_1 \quad L_{AB}$

13) аналогично 1-ой строке

14) аналогично 2-ой строке

15) аналогично 3-ей строке

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Ионизационные потери электронов и позитронов в пропане

В крайне релятивистском случае ионизационные потери электрона и позитрона даются формулой /10,15/

$$-\frac{dP}{dS} = 4\pi n e^2 m_0 c \left[ \ln \frac{\pi m_0 c^2}{I} - \frac{3}{4} \ln(1-\beta) - \frac{a}{2} - \frac{\delta}{2} \right], \quad (70)$$

где  $a = 2,9$  для электронов,

$a = 3,8$  для позитронов,

$\delta$  - поправка на эффект плотности, равная

$$\delta = -\ln(1-\beta^2) - \ln\left(\frac{I^2}{h^2 \nu^2}\right) - 1, \quad (71)$$

где

$$\nu = \left(\frac{nc}{\pi m_0}\right)^2, \quad (72)$$

$m_0$  - масса электрона,

$r_0$  - классический радиус электрона,

$n$  - число электронов в единице объема вещества,

$S$  - длина электронного (позитронного) трека в пространстве.

Преобразуя формулу (70), получим (с учетом эффекта плотности)

$$-\frac{dP}{dS} = 4\pi n e^2 m_0 c \left[ \ln \frac{m_0 c^2}{h \nu} + \ln \pi - \frac{a-1}{2} + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{(1-\beta^2)^{1/2}} \right]. \quad (73)$$

Для пропана плотности  $0,427 \text{ г/см}^3$  получим для электронов и позитронов соответственно

$$-\frac{dP}{dS} = 0,0196 \left[ 42,60 + 2 \ln \frac{1}{(1-\beta^2)^{1/2}} \right], \quad (74)$$

$$-\frac{dP}{dS} = 0,0196 \left[ 41,20 + 2 \ln \frac{1}{(1-\beta^2)^{1/2}} \right]. \quad (75)$$

Соответственно без учета эффекта плотности будем иметь

$$-\frac{dP}{dS} = 0,0196 \left[ 34,6 + 6 \ln \frac{1}{(1-\beta^2)^{1/2}} \right], \quad (76)$$

$$-\frac{dP}{dS} = 0,0196 \left[ 34,6 + 6 \ln \frac{1}{(1-\beta^2)^{3/2}} \right]. \quad (77)$$

При этом потенциал ионизации был принят равным 15,8 эв к углерода - 78,4 эв /8/. Из сравнения приведенных выше формул оказалось, что начиная с импульса

$$P = 5,2 \cdot m_0 c = 2,7 \frac{MэВ}{c}$$

формулы, учитывающие эффект плотности, дают меньшие значения ионизационных потерь, нежели формулы, выведенные без учета эффекта плотности. Так как при обработке снимков, полученных в облучении, встречались события с импульсом электрона не менее 20 МэВ/с, для расчетов были приняты формулы ионизационных потерь, учитывающие эффект плотности. Окончательно с ошибкой менее двух процентов ионизационные потери электронов и позитронов в пропане могут быть описаны одной общей формулой

$$-\frac{dP}{dS} = 0,0196 \left[ 41,9 + 2 \ln \frac{P}{0,51} \right] \left( \frac{MэВ}{c \cdot см} \right) \quad (78)$$

Это выражение было использовано для вычисления поправки на величину ионизационных потерь в программе 7-1.

### ПРИЛОЖЕНИЕ 3

Определение относительной ошибки в измерении кривизны (при равномерном распределении точек вдоль следа)

В геометрической программе, известной в библиотеке стандартных программ ОИЯИ под номерами 1-15, 1-33, применен метод аппроксимации проекции следа на плоскость, перпендикулярную магнитному полю, параболой. Для простоты рассмотрим аппроксимацию параболой вида

$$y = ax^2 + c, \quad (79)$$

где  $a$ , определенное методом наименьших квадратов, дается формулой

$$a = \frac{N \sum yx^2 - \sum y \sum x^2}{N \sum x^4 - (\sum x^2)^2}; \quad (80)$$

ошибку в определении  $a$  ищем в виде

$$\frac{\sigma_a}{a} = \frac{\sqrt{\sum \left( \frac{\partial a}{\partial y} \right)^2 (\Delta y)^2}}{a}, \quad (81)$$

тогда

$$\frac{\sigma_a}{a} = \frac{\sqrt{\sum \left( \frac{\partial a}{\partial y} \right)^2 (\Delta y)^2}}{a} \quad (82)$$

или

$$\frac{\sigma_a}{a} = \frac{\sqrt{N^2 \sum x^4 - 2N(\sum x^2)^2 + N(\sum y^2)^2}}{N \sum yx^2 - \sum y \sum x^2}; \quad (83)$$

в случае равномерного распределения измеренных точек вдоль следа

$$\left. \begin{aligned} c &= -\frac{a(\Delta x)^2 N}{4} \\ \sum y &= -\frac{a(\Delta x)^2 N^3}{6} \\ \sum x^2 &= \frac{N^3 (\Delta x)^2}{12} \\ \sum y \sum x^2 &= -\frac{a(ax)^4 N^6}{72} \\ N^2 \sum x^4 &= \frac{(\Delta x)^4 N^7}{80} \\ N^2 \sum x^4 - N(\sum x^2)^2 &= \frac{(\Delta x)^4 N^7}{180} \\ N \sum yx^2 - \sum y \sum x^2 &= a \frac{(\Delta x)^4 N^6}{180} \end{aligned} \right\} \quad (84)$$

откуда

$$\frac{\sigma_a}{a} = 12\sqrt{5} \frac{\sqrt{\Delta x^2}}{\ell^2 \sqrt{N}} R. \quad (85)$$

В наиболее общем случае эту формулу можно записать в виде

$$\frac{\sigma_a}{a} = 12\sqrt{5} \frac{\sqrt{\Delta x^2 \sin^2 \beta + \Delta y^2 \cos^2 \beta}}{\ell^2 \sqrt{N(1-n^2)}} R, \quad (86)$$

где  $n$ ,  $\Delta x^2$ ,  $\Delta y^2$  были определены выше.

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

В программе 7-1 использовано выражение для ошибки в определении импульса, несколько отличающееся от даваемого формулой (36). Программа не вычисляет дисперсию радиационных потерь. Поэтому для оценки величины ошибки в определении импульса, вносимой флуктуациями радиационных потерь, можно пользоваться графиками, представленными на рис. 13 (учитывая при этом величину коэффициента  $k_0$ , равного для метода аппроксимации проекции трека на плоскость, перпендикулярную магнитному полю,  $\frac{1}{2}$ ). Величина ошибки  $\Delta p$ , выдаваемая программой 7-1, может быть представлена как

$$\Delta p_{\text{от } 7-1} = P_0 \sqrt{\left(\frac{\sigma_a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\delta P_{\text{МН}}}{P_0}\right)^2 + \left(\frac{\delta P_{\text{М}}}{P_0}\right)^2}, \quad (87)$$

причем величина  $\frac{\sigma_a}{a}$  рассчитывается по формулам, приведенным в работе (11) и выдается на печать отдельно.

Для вычисления ошибки в определении угла в  $\beta$  в программе 7-1 использовано выражение

$$\Delta \beta^2 = \frac{1}{4} \left(\frac{\ell}{R}\right)^2 \left(\frac{\sigma_a}{a}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \ell}{R}\right)^2, \quad (88)$$

не учитывающее ошибки, вносимой неточностью измерения координат первой точки, эта ошибка может быть оценена по формуле

$$(\Delta \beta')^2 = 2 \left(\frac{\Delta}{\ell}\right)^2, \quad (89)$$

$$\Delta = \sqrt{\Delta x^2 \sin^2 \beta + \Delta y^2 \cos^2 \beta}.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 5

Угол многократного рассеяния при аппроксимации следа окружностью по трем точкам

Расположим систему координат так, чтобы след проходил через ее начало. Пусть координаты первой точки (0, 0), средней  $(x, y_1)$  и последней  $(2x, y_2)$ . Считая, что направление движения частицы в начале координат совпадает с осью  $x$  имеем  $y \ll x$ . В этих условиях, вероятность иметь в точке  $x$  значения  $y_1$  в интервале  $y_1, y_1 + dy_1$  и угла рассеяния  $\theta$  в интервале  $\theta_1, \theta_1 + d\theta_1$  запишется как

$$P_1(y_1, \theta) dy_1 d\theta_1 = \frac{2\sqrt{3}}{\pi} \frac{1}{\theta_1^2 x^2} \ell^{-4} \theta_1^2 \left( \frac{\theta_1^2}{x} - \frac{3y_1 \theta_1}{x^2} + \frac{3y_1^2}{x^3} \right) dy_1 d\theta_1. \quad (90)$$

Тогда вероятность при заданных  $y_1$  и  $\theta_1$  иметь в точке  $2x$  значения  $y_2$  в интервале  $y_2, y_2 + dy_2$  и  $\theta_2$  в интервале  $\theta_2, \theta_2 + d\theta_2$

$$P_2(y_2, \theta_2) dy_2 d\theta_2 = \frac{2\sqrt{3}}{\pi} \frac{1}{\theta_2^2 x^2} e^{-\frac{4}{\theta_2^2} \left[ \frac{(\theta_2 - \theta_1)^2}{x} - \frac{3(y_2 - y_1 - \theta_1 x)(\theta_2 - x)}{x} + \frac{3(y_2 - y_1 - \theta_1 x)^2}{x} \right]} dy_2 d\theta_2 \quad (91)$$

где  $\theta_2^2 = \left(\frac{10}{P\beta}\right)^2 \frac{1}{X_0}$ ;  $[P] = \text{Мэв/с}$

Отсюда вероятность того, что частица пройдет через точки  $(0,0)$ ;  $(x, y_1)$ ;  $(2x, y_2)$  запишется как

$$F(y_1, y_2) dy_1 dy_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P_1(y_1, \theta_1) P_2(y_2, \theta_2) d\theta_1 d\theta_2 dy_1 dy_2. \quad (92)$$

Угол между касательной к окружности и хордой, проходящей через точки  $(0,0)$ ;  $(2x, y_2)$ , обозначим через  $\phi$  (он равен половине дуги, стягиваемой хордой)

$$\phi = \frac{1}{2} \frac{2x}{R} = \frac{y_2 - 2y_1}{x}, \quad (93)$$

где радиус окружности определяется формулой

$$R = \frac{x^2}{2(y_2 - y_1)}. \quad (94)$$

Обозначим через  $\psi$  угол между осью  $x$  и той же хордой

$$\psi = \frac{y_2}{2x}. \quad (95)$$

Тогда угол между касательной к окружности и осью  $x$ , с которой совпадало направление полета частицы в точке  $(0,0)$ , будет

$$\beta = \psi - \phi. \quad (96)$$

Подставляя в (96) формулы (93) и (95), получим

$$\beta = \frac{1}{2x} (4y_1 - y_2). \quad (97)$$

Из соображений симметрии можем записать

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \beta F(y_1, y_2) dy_1 dy_2 = 0.$$

Тогда дисперсия угла многократного рассеяния запишется в виде

$$\overline{\Delta\beta_{\text{МН}}^2} = \overline{\beta^2} = \iint_{-\infty}^{+\infty} \beta^2 F(y_1, y_2) dy_1 dy_2. \quad (98)$$

После несложного, но длительного интегрирования получим

$$\overline{\Delta\beta_{\text{МН}}^2} = \frac{7}{12} \times \theta_s^2. \quad (99)$$

Если выполнено условие, что  $S \ll R$ , формулу (99) можно записать в виде

$$\overline{\Delta\beta_{\text{МН}}^2} = \frac{7}{24} \ell \theta_s^2. \quad (100)$$

### Л и т е р а т у р а

1. В.Ф.Вишневский, Ду Юань-дай, А.Ф.Лукьянцев, В.И.Мороз, А.В.Никитин, Г.Н.Тентюкова, Ю.А.Троян, Цзян Шао-цзюи, Чжан Вэнь-юй, Б.А.Шахбазян, Янь У-гуан. Препринт ОИЯИ, Р-1486, Дубна, 1963.
2. З.М.Иванченко, А.Ф.Лукьянцев, В.И.Мороз, В.И.Никитина, Л.Ф.Нефедьева, Ян Фу-цин. Препринт ОИЯИ, 2005, Дубна, 1965.
3. A.N.Rosenfeld et al., UCRL-8030, 1964.
4. О.И.Довженко, А.А.Поманский. Труды ФИАН СССР, т. 28. Космические лучи, 1964.
5. М.И.Соловьев. Диссертация ОИЯИ, Дубна, 1964.
6. Э.Сегре. Экспериментальная ядерная физика. ИЛ, Москва, 1965.
7. Н.Б.Делоне. Пузырьковые камеры. Москва, 1963.
8. В.Гайтлер. Квантовая теория излучения. ИЛ, Москва, 1956.
9. Э.Ферми. Ядерная физика, ИЛ, Москва, 1951.
10. Б.Росси. Частицы больших энергий, ГИТТЛ, Москва, 1955.
11. Е.Н.Кладницкая. Материалы совещания по методике пузырьковых камер. Препринт ОИЯИ, 798, 2, Дубна, 1961.
12. L.Behr and P.Mittner. Proceedings of the 1962 Conference on Instrumentation for High-Energy Physics. 446, 1963.
13. Д.Мензел. Основные формулы физики. ИЛ, Москва, 1957.
14. Р.М.Джабар-Заде, В.И.Мороз, А.В.Никитин, А.И.Родионов, Э.Рупц., Ю.А.Троян, Б.А.Шахбазян. Препринт ОИЯИ 1957, Дубна. 1965.
15. К.Л.Люк, Юан и Ву Цзянь-сюн. Принципы и методы регистрации элементарных частиц. ИЛ, Москва, 1963.

Рукопись поступила в издательский отдел  
16 июля 1965 г.

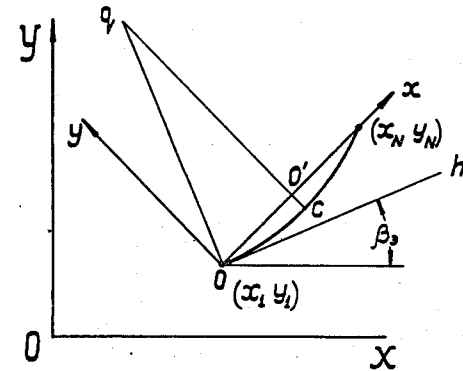


Рис. 1. Аппроксимация измеренных точек параболой вида (1).  $X, Y$  - система осей камеры,  $(X_1, Y_1), (X_N, Y_N)$  - первая и последняя измеренные точки на следе,  $x, y$  - "система осей следа",  $00 = \frac{\ell}{2}$ ;  $\overline{qc} = R$ ;  $\overline{q0} \perp 0h$ ;  $\overline{qc} \parallel 0y$ ;  
 $q$  - мгновенный центр кривизны параболы в точке с координатами  $(\frac{\ell}{2}, c)$  (в системе  $x, y$ ).

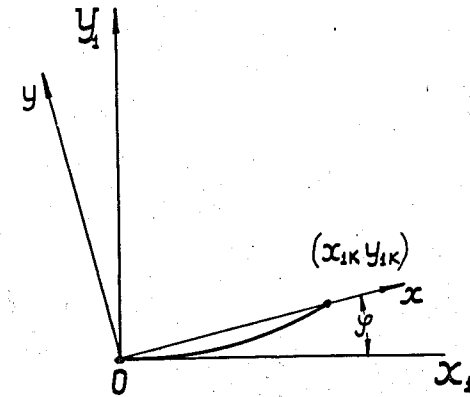


Рис. 2. Аппроксимация теоретического уравнения движения электрона в среде (13) параболой вида (1);  $X_1, Y_1$  - система координат, в которой кривая, определяемая уравнением (13), проходит через точку  $(0, 1)$  и касается в этой точке оси  $X_1$ .

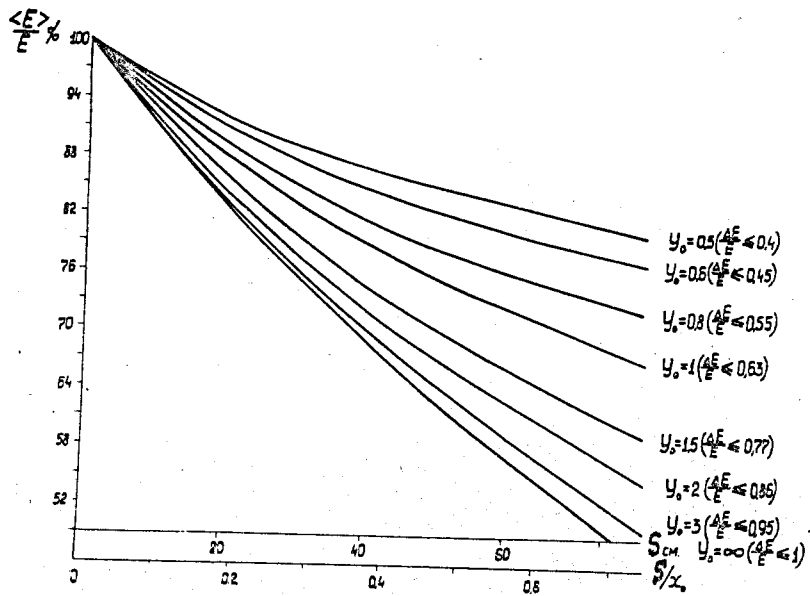


Рис. 3. Отношение средней энергии электронов (позитронов)  $\langle E \rangle$  по прохождении длины  $S$  в пропане к начальной энергии  $E_0$  в зависимости от величины обрезания  $u_0$ .

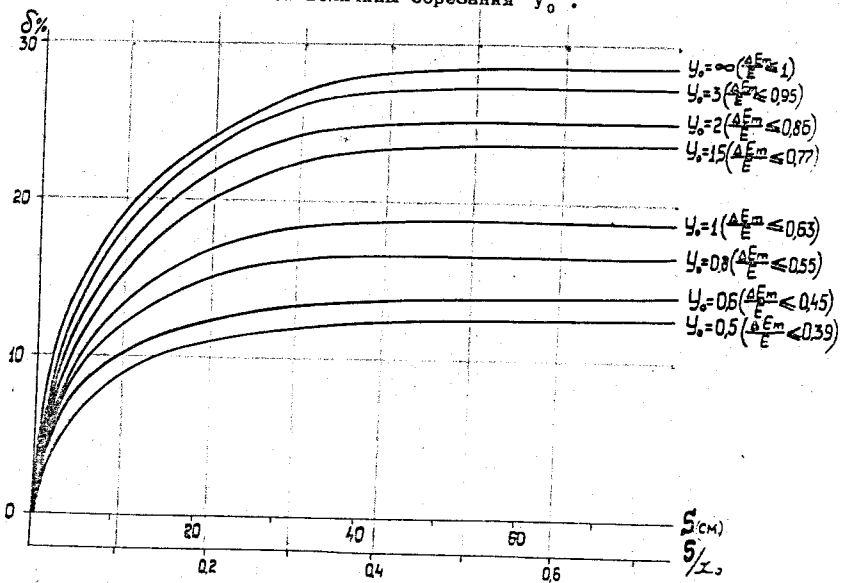


Рис. 4. Корень из дисперсии средних радиационных потерь электронов (позитронов) на длине  $S$  в пропане в зависимости от величины обрезания  $u_0$ .

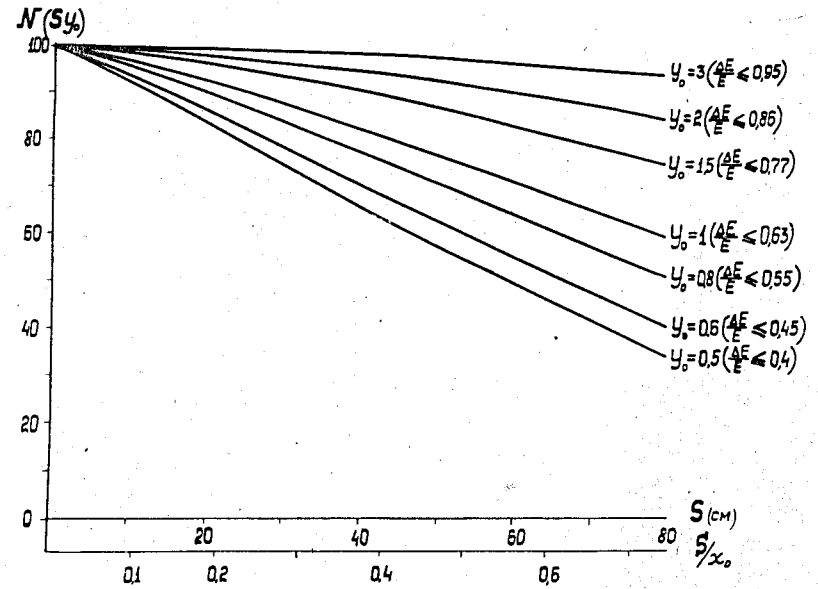


Рис. 5. Среднее число случаев, удовлетворяющих критерию  $u \leq u_0$ , по прохождении длины  $S$  в пропане в зависимости от величины обрезания  $u_0$ .



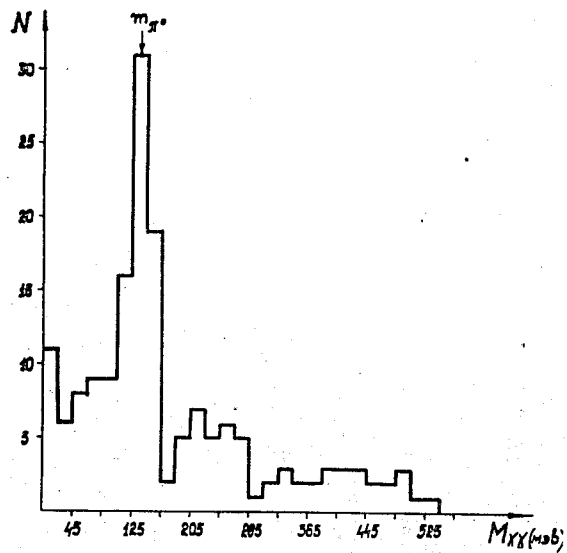


Рис. 6. Распределение по  $M_{\gamma\gamma}$  для 0-лучевых звезд с 2-мя  $\gamma$ -квантами (всего 167 случаев),  $M_{\pi^0} = 136,8 \pm 2$  Мэв,  $\frac{\Delta M}{M} = 12\%$ .

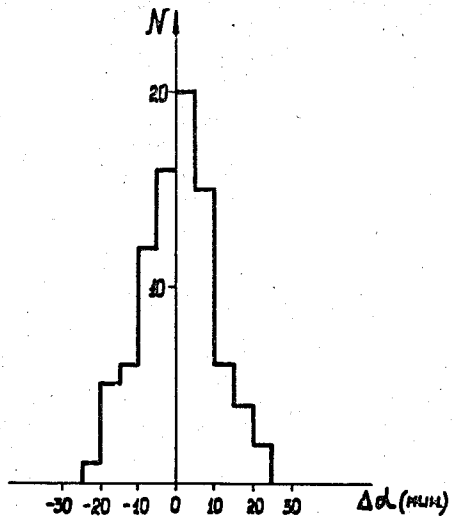


Рис. 7. Распределение по углу  $\Delta\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$  для прямых  $\pi^-$ -мезонных треков ( $P_{\pi^-} = 4$  Гэв/с);  $\alpha_1, \alpha_2$  - определены геометрической программой в точке, принятой за начало измерений для первого и второго участков следа соответственно.

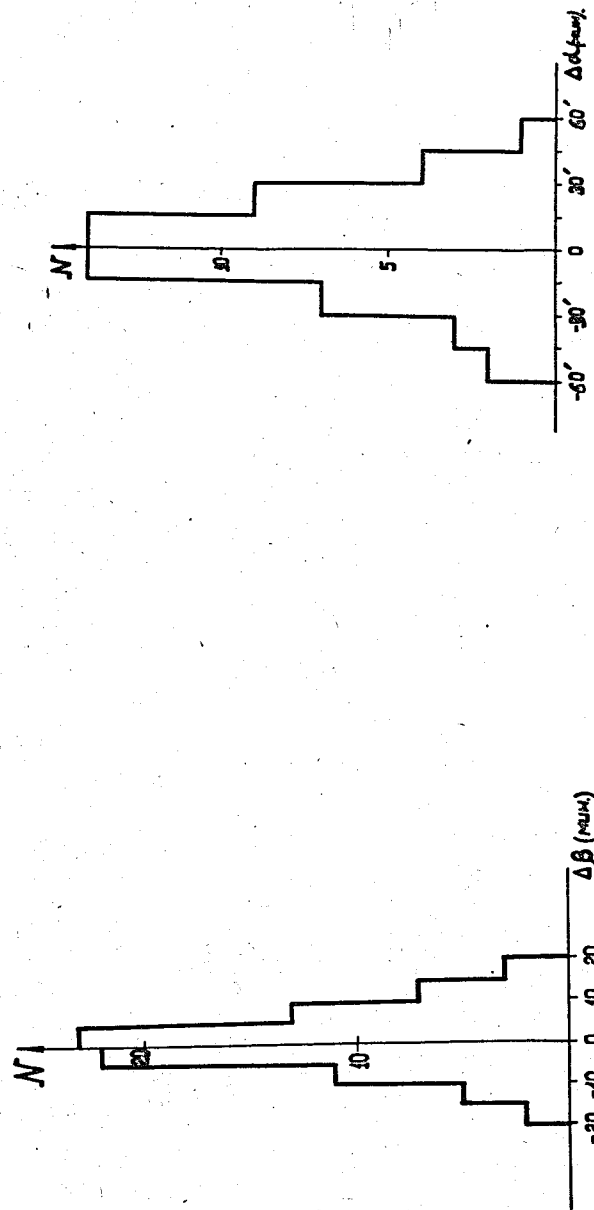


Рис. 8. Распределение по углу  $\Delta\beta = \beta_1 - \beta_2$  для прямых  $\pi^-$ -мезонных треков ( $P_{\pi^-} = 4$  Гэв/с).  $\beta_1, \beta_2$  - определены геометрической программой в точке, принятой за начало измерений для первого и второго участков следа соответственно.

Рис. 8. Распределение по углу  $\Delta\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$  для электронных треков ( $P_{e^-} > 500$  Мэв/с)

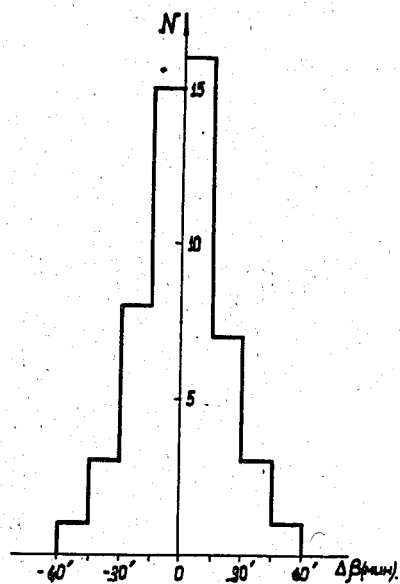


Рис. 10. Распределение по углу  $\Delta\beta = \beta_1 - \beta_2$   
 для электронных трюнов ( $P_e \geq 500$  МэВ/с)