ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р-2253

Г.Н. Вялов, М.М. Фикс

КИНЕТИКА ПРОЦЕССА МНОГОКРАТНОГО УСКОРЕНИЯ ЧАСТИЦ С ПЕРЕМЕННЫМ ЗАРЯДОМ В ПОТЕНЦИАЛЬНОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

ЛАБОРАТОРИЯ ЯДЕРНЫХ РЕАКЦИЙ

1965

P-2253

Г.Н.Вялов, М.М.Фикс

КИНЕТИКА ПРОЦЕССА МНОГОКРАТНОГО УСКОРЕНИЯ ЧАСТИЦ С ПЕРЕМЕННЫМ ЗАРЯДОМ В ПОТЕНЦИАЛЬНОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

В в е д е н и е

В работе [1] для многократного ускорения тяжелых ионов в потенциальном электрическом поле предложено использовать различие эффективных зарядов ионов при их прохождении через тонкие мишени различной плотности.

Как показано в работе [2], при достаточно высокой энергии инжекции W_o частиц в ускоритель кулоновское рассеяние на перезаряжающих мишенях не приводит к существенным потерям интенсивности пучка в процессе многократного ускорения.

При рассмотрении процесса многократного ускорения в работах [1,2] функция распределения частиц с энергией W по зарядовым состояниям определялась, по существу, как $\delta [Z - Z_{eff}(W)]$, где $Z_{eff}(W)$ - средний заряд частиц, прошедших слой вещества, достаточный для установления статистически равновесного распределения частиц по зарядовым состояниям.

Так как фактически распределение частиц по зарядам имеет некоторую ширину, то не все частицы могут быть захвачены в режим ускорения при заданной энергии инжекции W_o.

В настоящей работе оценивается коэффициент захвата частиц в режим многократного ускорения.

Вывод кинетического уравнения

Ускорение частиц в элементарной ячейке, предложенной в работе [1], описывается по следующей схеме:

1) ускорение частицы (оператор V_+),
2) перезарядка частицы с уменьшением ее заряда (оператор C),
3) замедление частицы (оператор V_-),
4) перезарядка частицы с увеличением ее заряда (оператор L).

Операторы V_+ и V_- изменяют распределение частиц по энергиям и не меняют распределения по зарядам. Операторы L и C устанавливают при каждом данном значения энергии свое распределение по зарядам независимо от того, каким оно было ранее. Поэтому для произвольной нормированной функции распределения по зарядам имеют место соотношения:

$$L\phi[Z,W] = f_\ell\left[\frac{Z - Z_\ell(W)}{\Delta_\ell}\right] \qquad C\phi[Z,W] = f_c\left[\frac{Z - Z_c(W)}{\Delta_c}\right]$$

$$Z_\ell(W) = \int Z f_\ell \, dZ \qquad Z_c(W) = \int Z f_c \, dZ \tag{1}$$

$$\Delta_\ell^2 = \int (Z - Z_\ell)^2 f_\ell \, dZ \qquad \Delta_c^2 = \int (Z - Z_c)^2 f_c \, dZ \, .$$

Построив систему, в которой элементом периодичности служит такая ускорительная ячейка $L V_- C V_+$, можно осуществить многократное ускорение частиц.

Если распределение частиц в пространстве энергий и зарядов на входе в элементарную ускорительную ячейку описывается функцией $N(W,Z)$, то на выходе из ячейки функция распределения частиц $N_1(W,Z)$ определяется уравнением:

$$N_1(W,Z) = L V_- C V_+ N(W,Z) \tag{2}$$

$$N_1(W,Z) = f_\ell\left[\frac{Z - Z_\ell(W)}{\Delta_\ell}\right] \int\int dZ_1 dZ_2 f_c\left[\frac{Z_2 - Z_c(W+VZ_2)}{\Delta_c}\right] N(W - VZ_1 + VZ_2, Z_1) . \tag{2a}$$

Из выражения (2а) видно, что функция распределения частиц представляется в виде : $N = f_\ell n(W)$.

Отсюда

$$n_1(W) = \int\int dZ_1 dZ_2 f_c\left[\frac{Z_2 - Z_c(W+VZ_2)}{\Delta_c}\right] f_\ell\left[\frac{Z_1 - Z_\ell(W+VZ_2-VZ_1)}{\Delta_\ell}\right] n(W+VZ_2-VZ_1) . \tag{3}$$

Рассмотрим режим ускорения при достаточно малых ускоряющих потенциалах V, когда возможно разложение подинтегральных функций в ряд Тейлора по степеням разностей $V(Z_2 - Z_c)$ и $V[(Z_2 - Z_c) - (Z_1 - Z_\ell)]$. Используя условия нормировки $\int f_\ell dZ = 1$ и $\int f_c dZ = 1$, получим во втором приближении по V :

$$n_1(W) = \{1 + V[Z'_c(W+VZ_c) - Z'_\ell(W+VZ_c-VZ_\ell)]\} n[W + VZ_c(W+VZ_c) - VZ_\ell(W+VZ_c-VZ_\ell)] +$$
$$+ V^2 (Z'^2_c + Z'^2_\ell - Z'_c Z'_\ell) n(W) + \tfrac{1}{2} V^2 (\Delta_c^2 + \Delta_\ell^2) n''(W) . \tag{4}$$

Итерируя уравнение (4), можно определить функцию распределения частиц по энергиям после Δk прохождений ускорительного элемента:

$$n_{\Delta k}(W) = \prod_{i=1}^{\Delta k} \{1 + V[Z'_c(W_i + VZ_c) - Z'_\ell(W_i + VZ_c - VZ_\ell)]\} n(W_0) +$$
$$+ \Delta k V^2 (Z'^2_c + Z'^2_\ell - Z'_c Z'_\ell) n(W) + \tfrac{1}{2} \Delta k V^2 (\Delta_c^2 + \Delta_\ell^2) n''(W) \tag{5}$$

$$W_i = W + V \sum_{j=0}^{\Delta k - i - 1} \{Z_c[W + VZ_c + jV(Z_c - Z_\ell)] - Z_\ell[W + (j+1)V(Z_c - Z_\ell)]\}$$
$$i = 0, 1, 2, \dots, \Delta k - 1 .$$

Из уравнения (5) можно найти изменение функции распределения частиц за Δk прохождений ускорительного элемента:

$$\delta n_{\Delta k} = n_{\Delta k}(W) - n(W) = \Delta k \{\tfrac{1}{2} V^2 (\Delta_c^2 + \Delta_\ell^2) n''(W) +$$
$$+ [V(Z_c - Z_\ell) + \tfrac{1}{2} V^2 (Z'_c Z_c - Z'_\ell Z_c + Z'_\ell Z_\ell + Z'_c Z_\ell)] n'(W) + \tag{6}$$
$$+ [V(Z'_c - Z'_\ell) + \tfrac{1}{2} V^2 (Z''_c Z_c - Z''_\ell Z_c + Z''_\ell Z_\ell + Z''_c Z_\ell + Z'^2_c + Z'^2_\ell)] n(W)\} .$$

Кроме того, функция распределения частиц меняется также вследствие их инжекции и вывода из ускорителя, а также из-за потерь в процессе ускорения.

Пусть изменение функции распределения за Δk прохождений через ускорительный элемент вследствие инжекции частиц описывается функцией $\delta N_0 = \Delta k \phi_0(Z) n_0 \delta(W - W_0)$. Далее, поскольку из работы /2/ следует, что потери частиц при достаточно высокой энергии инжекции W_0 малы и происходят в основном при первых прохождениях ускорительного элемента, когда энергия частиц невелика, то потери частиц за Δk ускорений приближенно можно представить в виде $\delta N_i = \Delta k \phi_i(Z) n_i \delta(W - W_i)$.

Так как в линейном варианте ускорения при достаточно большом числе ускоряющих секций флуктуации энергии падают как $1/\sqrt{K}$, а в циклическом варианте можно осуществить вывод моноэнергетического пучка вблизи энергии, где $Z_\ell(W_f) \approx Z_c(W_f)$, то число выведенных за Δk ускорений частиц можно также с достаточной точностью представить в виде некоторого δ- образного стока: $\delta N_f = \Delta k \phi_f(Z) n_f \delta(W - W_f)$.

Отсюда находим изменение функции распределения частиц за Δk прохождений через ускорительную ячейку:

$$\delta N = \delta N_{\Delta k} + \delta N_0 - \delta N_i - \delta N_f . \tag{7}$$

Ввиду того, что инжекция, вывод и потери частиц происходят в достаточно узких энергетических интервалах, а также учитывая, что число таких частиц за время одного ускорения мало, можно положить:

$$\phi_0(Z) = f_\ell\left[\frac{Z - Z_\ell(W_0)}{\Delta_\ell}\right]; \qquad \phi_i(Z) = f_\ell\left[\frac{Z - Z_\ell(W_i)}{\Delta_\ell}\right]; \qquad \phi_f(Z) = f_\ell\left[\frac{Z - Z_\ell(W_f)}{\Delta_\ell}\right].$$

Тогда для функции распределения частиц в ускорителе получим следующее уравнение:

$$\frac{\partial N}{\partial k} = f_\ell\left[\frac{Z - Z_\ell(W)}{\Delta_\ell}\right]\frac{\partial}{\partial W}\{[V(Z_c - Z_\ell) + \tfrac{1}{2}V^2(Z'_c Z_c - Z'_\ell Z_c + Z'_\ell Z_\ell + Z'_c Z_\ell)]n + \tag{8}$$

$$+\tfrac{1}{2}V^2(\Delta_c^2 + \Delta_\ell^2)n'\} + f_\ell\left[\frac{Z - Z_\ell(W)}{\Delta_\ell}\right]\{n_0\delta(W - W_0) - n_i(k)\,\delta(W - W_i) - n_f(k)\,\delta(W - W_f)\}.$$

Этот результат имеет наглядный физический смысл. Так как в нашей цепочке оператор L действует последним, то распределение частиц по зарядам является известной функцией, которая для заданной энергии частицы определяется оператором L. Это действительно имеет место для всех частиц, находящихся вне ускорительного элемента, т.е. для большинства частиц в ускорителе, если размеры ускорительного элемента достаточно малы. Отсюда

$$\frac{\partial n}{\partial k} = \frac{\partial}{\partial W}\{[V(Z_c - Z_\ell) + \tfrac{1}{2}V^2(Z'_c Z_c - Z'_\ell Z_c + Z'_\ell Z_\ell + Z'_c Z_\ell)]n + \tfrac{1}{2}V^2(\Delta_c^2 + \Delta_\ell^2)n'\} + \tag{8a}$$

$$+ n_0\delta(W - W_0) - n_i(k)\,\delta(W - W_i) - n_f(k)\,\delta(W - W_f).$$

Экспериментальные данные по обдирке ионов элементов с атомным номером $Z_0 \lessapprox 50$ позволяют считать, что в широких пределах $0{,}2 \lessapprox Z_{eff}/Z_0 \lessapprox 0{,}8$ ширина распределения Δ по зарядам не зависит от энергии. Уравнение (8а) получено при этом предположении, хотя обобщение в случае, когда Δ_ℓ и Δ_c являются функциями энергии (при $Z_{eff} \to 0$ и $Z_{eff} \to Z_0$), не представляет затруднений.

При выводе кинетического уравнения мы использовали "универсальное время" – число прохождений всех частиц через ускорительный элемент. Естественно, что для частиц с различной энергией W (соответственно скоростью v) число прохождений через ускорительный элемент за время Δt будет различным.

Переменные k и t связаны друг с другом простым соотношением: $\Delta k \ell = v \Delta t$, где $\ell(v)$ – длина элемента периодичности. Функция $\ell(v)$ находится из простых кинематических соображений и зависит от конкретного варианта ускорителя. Вводя время прохождения частицей с энергией W элемента периодичности – "период обращения" $T(W) = \ell/v$, получим уравнение, описывающее изменение функции распределения частиц во времени:

$$T(W)\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial W}\{[V(Z_c - Z_\ell) + \tfrac{1}{2}V^2(Z'_c Z_c - Z'_\ell Z_o + Z'_\ell Z_\ell + Z'_o Z_\ell)]n + \frac{V^2}{2}(\Delta_c^2 + \Delta_\ell^2)\frac{\partial n}{\partial W}\} + \tag{8б}$$

$$+ n_0\delta(W - W_0) - n_i(t)\,\delta(W - W_i) - n_f(t)\,\delta(W - W_f).$$

Определение коэффициента захвата частиц в режим многократного ускорения

Определим коэффициент захвата частиц в режим многократного ускорения как отношение n_f/n_0 в случае установившегося режима ускорения при $t \to \infty$.

Поскольку относительные заряды $\frac{Z_\ell}{Z_0} = q_\ell$ и $\frac{Z_c}{Z_0} = q_c$ для всех элементов согласно /3/ являются универсальными функциями величины $\epsilon = \frac{2W}{A_0 Z_0^{4/3}}$, то в дальнейшем удобно ввести переменную ϵ. Обозначив:

$$-a = u(q_c - q_\ell) + \tfrac{1}{2}u^2(q'_c q_c - q'_\ell q_c + q'_\ell q_\ell + q'_c q_\ell)$$

$$b = \tfrac{1}{2}u^2(\delta_\ell^2 + \delta_c^2)$$

$$\delta_\ell = \frac{\Delta_\ell}{Z_0}; \qquad \delta_c = \frac{\Delta_c}{Z_0}; \qquad u = \frac{2V}{A_0 Z_0^{1/3}},$$

получим для определения постоянных коэффициентов n_f и n_i стационарное уравнение:

$$\frac{d}{d\epsilon}\left(-an + b\frac{dn}{d\epsilon}\right) + \frac{2}{A_0 Z_0^{4/3}}[n_0\delta(\epsilon - \epsilon_0) - n_i\delta(\epsilon - \epsilon_i) - n_f\delta(\epsilon - \epsilon_f)] \tag{9}$$

с граничными условиями:

$$j = an - b\frac{dn}{d\epsilon} \underset{\substack{\epsilon \to 0 \\ \epsilon \to \infty}}{\to} 0, \qquad \begin{matrix} n = 0 \\ \epsilon < \epsilon_i \\ \epsilon > \epsilon_f \end{matrix}$$

Решение уравнения (9) определяет функцию распределения частиц по энергиям в установившемся режиме ускорения и коэффициенты захвата и потери частиц:

$$n(\epsilon) = \frac{2}{A_0 Z_0^{4/3} b}\exp\left(\frac{1}{b}\int_{\epsilon_i}^{\epsilon} a\,d\epsilon\right) \times$$

$$+[n_i\theta(\epsilon - \epsilon_i) > \int_{\epsilon_i}^{\epsilon} d\epsilon\,\exp\left(-\frac{1}{b}\int_{\epsilon_i}^{\epsilon} a\,d\epsilon\right) + \tag{10}$$

$$+ n_f\theta(\epsilon - \epsilon_f)\int_{\epsilon_f}^{\epsilon} d\epsilon\,\exp\left(-\frac{1}{b}\int_{\epsilon_i}^{\epsilon} a\,d\epsilon\right) -$$

$$- n_0\theta(\epsilon - \epsilon_0)\int_{\epsilon_0}^{\epsilon} d\epsilon\,\exp\left(-\frac{1}{b}\int_{\epsilon_i}^{\epsilon} a\,d\epsilon\right)$$

$$\frac{n_f}{n_0} = \frac{\int_{\epsilon_i}^{\epsilon_0} d\epsilon \, \exp\left(-\frac{1}{b}\int_{\epsilon_i}^{\epsilon} a\, d\epsilon\right)}{\int_{\epsilon_i}^{\epsilon_f} d\epsilon \, \exp\left(-\frac{1}{b}\int_{\epsilon_i}^{\epsilon} a\, d\epsilon\right)}; \qquad \frac{n_i}{n_0} = \frac{\int_{\epsilon_0}^{\epsilon_f} d\epsilon \, \exp\left(-\frac{1}{b}\int_{\epsilon_i}^{\epsilon} a\, d\epsilon\right)}{\int_{\epsilon_i}^{\epsilon_f} d\epsilon \, \exp\left(-\frac{1}{b}\int_{\epsilon_i}^{\epsilon} a\, d\epsilon\right)}. \qquad (11)$$

Экстраполируя экспериментальные данные для эффективных зарядов и ширины распределения ионов по зарядовым состояниям при обдирке в твердых и газовых мишенях атомов с порядковым номером $Z_0 \lesssim 50$ к более тяжелым элементам, оценим коэффициент захвата в режим ускорения самых тяжелых частиц. В качестве минимальной энергии ϵ_i можно принять такую энергию ионов, при которой среднеквадратичный угол рассеяния равен угловой апертуре ускорителя.

Тогда, рассматривая ускорение ионов урана в ускорителе с угловой апертурой $v_L = 3 \cdot 10^{-2}$ и полагая рассеяние в ускорительном элементе эквивалентным рассеянию в углеродной фольге толщиной $14 \frac{\text{мкг}}{\text{см}^2}$, получим для ионов урана $W_i \approx 5$ Мэв ($\epsilon_i \approx 10^{-4}$).

Прирост энергии $a(\epsilon, u)$ при выбранном значении u обращается в нуль при некоторой минимальной энергии ϵ'_i и максимальной ϵ'_f. Если $\epsilon_i < \epsilon'_i$, то в качестве минимальной энергии частиц в ускорителе следует рассматривать величину ϵ'_i.

Численные оценки показывают, что коэффициент захвата определяется в основном разностью $\epsilon_0 - \epsilon_i$ и величиной ϵ_i.

На рис. 1 представлен коэффициент захвата ионов урана в режим многократного ускорения как функция энергии инжекции для ускоряющих потенциалов $V = 2{,}7$ MV и $V = 8{,}1$ MV ($V = 8{,}1$ MV – потенциал, оптимальный для ускорения в большей части энергетического интервала (ϵ_0, ϵ_f)).

Если рассматривать коэффициент захвата как функцию ускоряющего потенциала при заданной энергии инжекции, то эта функция описывается кривой с максимумом при потенциале, оптимальном для захвата. Этот потенциал отличается, вообще говоря, от потенциала, оптимального для многократного ускорения. Поэтому в области энергии инжекции и в области многократного ускорения нужно выбирать различные ускоряющие потенциалы, или оптимизировать единый потенциал с точек зрения захвата и ускорения.

Заключение

Приведенные оценки показывают, что при разумных энергиях инжекции частиц в ускоритель значительная часть их может быть захвачена в режим ускорения.

Это подтверждает принципиальную возможность создания ускорителя рассматриваемого типа с хорошей интенсивностью пучка. Однако следует подчеркнуть, что оценки проводились на основе экстраполяции в область малых энергий ($\epsilon_i \approx 10^{-4} - 5 \cdot 10^{-4}$) известных нам экспериментальных данных по обдирке ионов.

Эти энергии достижимы в настоящее время даже для самых тяжелых ионов.

Наличие надежных экспериментальных данных о функциях распределения тяжелых ионов по зарядам при прохождении через вещество позволило бы провести более точные численные расчеты на основе интегрального соотношения (3).

Потери энергии при торможении ускоряемых частиц в перезаряжающих мишенях влияют на процесс ускорения относительно легких ионов и могут быть учтены в рамках использованного математического аппарата.

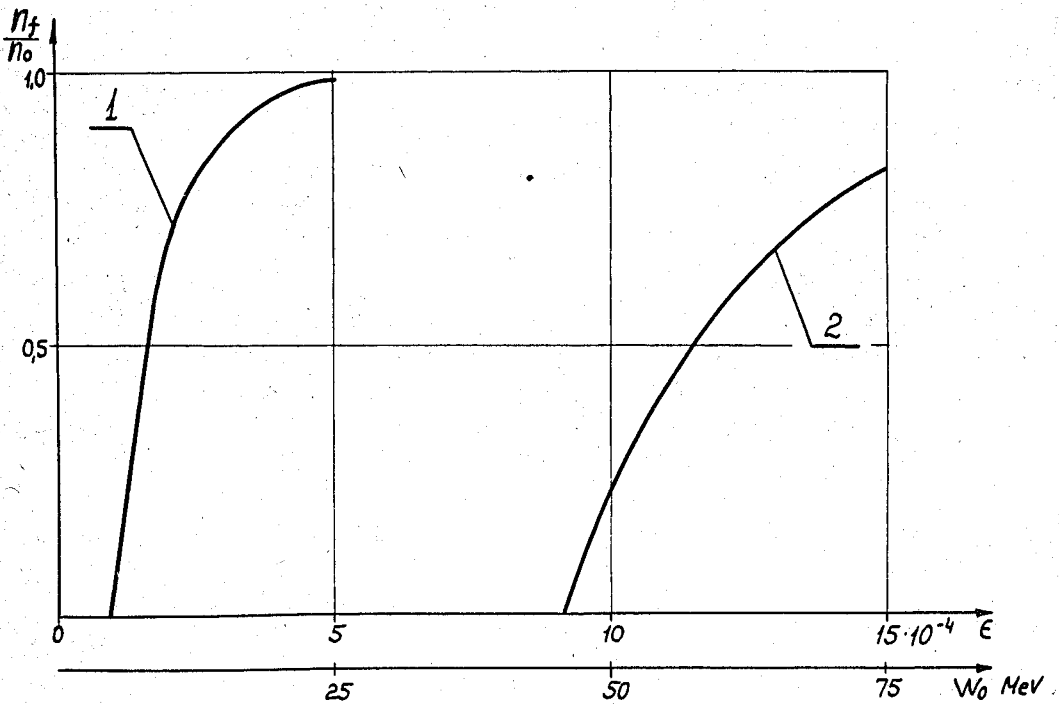
Мы ограничились рассмотрением δ-образных источников и стоков, описывающих инжекцию, потери и вывод частиц в ускорителе. Реальные источники и стоки имеют конечную ширину. Если энергия инжекции ионов достаточно высока (больше ширины распределения функции стока), то учет этих ширин, по-видимому, существенно не изменит коэффициента захвата и может быть осуществлен численно на основе интегрального соотношения (3).

Авторы признательны члену-корреспонденту Академии наук СССР Г.Н.Флерову за постоянный интерес к рассматриваемым вопросам.

Литература

1. G.Hortig. Ein Beschleuniger fur schwere Ionen. Z. f. Physik, 176, 115-119 (1963).
2. Г.Н.Вялов, М.М.Фикс. Об ускорении частиц с переменным зарядом в потенциальном электрическом поле. Препринт ОИЯИ Д-1946, Дубна, 1965.
3. A.Papineau. Compt. Rend., 242, 2933 (1956).

Рукопись поступила в издательский отдел
1 июля 1965 г.



1. $U = 5\cdot10^{-3}$ ($V = 2{,}7$ MV)   2. $U = 15\cdot10^{-3}$ ($V = 8{,}1$ MV)

Рис. 1. Зависимость коэффициента захвата ионов урана в режим многократного ускорения от энергии инжекции.