ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Лаборатория теоретической физики

Р-225

В. С. Владимиров

Об определении области аналитичности

г. Дубна, 1958 год

Р-225

В. С. Владимиров

Об определении области аналитичности

I. В связи с обоснованием дисперсионных соотношений в теоретической физике[1,2] возникла следующая задача: допускают ли обобщенные функции, удовлетворяющие некоторым условиям, аналитическое продолжение в комплексную область и если допускают таковое, то указать возможно большую область аналитичности. В этом плане, следуя результатам работ[3] и [2] (Математическое дополнение), мы докажем здесь следующую общую теорему[x].

Теорема I. Пусть даны трансляционно-инвариантные обобщенные функции четырех 4-векторов:

$$\mathcal{F}_{ij}^{\nu}(x_1, x_2, x_3, x_4),\ ij = r, a, \quad \nu = 1, 2, \ldots, \ell,$$

линейно преобразующиеся при преобразованиях из полной группы Лоренца с помощью некоторого представления этой группы. Предположим, что введенные обобщенные функции удовлетворяют следующим условиям:

$\mathcal{F}_{rr}^{\nu} = 0$, если $x_1 \lesssim x_3$ или $x_2 \lesssim x_4$

$\mathcal{F}_{ra}^{\nu} = 0$, если $x_1 \lesssim x_3$ или $x_2 \gtrsim x_4$

$\mathcal{F}_{ar}^{\nu} = 0$, если $x_1 \gtrsim x_3$ или $x_2 \lesssim x_4$

$\mathcal{F}_{aa}^{\nu} = 0$, если $x_1 \gtrsim x_3$ или $x_2 \gtrsim x_4$

Предположим, далее, что их преобразования Фурье $\tilde{\mathcal{F}}_{ij}^{\nu}(p_1, p_2, p_3, p_4)$ определенные, очевидно, на многообразии

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0 \tag{I,I}$$

---

[x] Относительно обозначений и определений см.[3]

удовлетворяют условиям:

$\tilde{\mathcal{F}}^{\nu}_{rj} = \tilde{\mathcal{F}}^{\nu}_{oj}$, если $\rho_1^2 < (\mu+1)^2$ и $\rho_3^2 < \gamma^2$, $i = r, a$;

$\tilde{\mathcal{F}}^{\nu}_{ir} = \tilde{\mathcal{F}}^{\nu}_{ia}$, если $\rho_2^2 < (\mu+1)^2$ и $\rho_4^2 < \gamma^2$ $i = r, a$;

$\tilde{\mathcal{F}}^{\nu}_{ij} = 0$, если $(\rho_1+\rho_3)^2 < (\mu+1)^2$ или $\rho_{10}+\rho_{30} < 0$, $i,j = r, a$,

причем считаем, что

$$\gamma > 1 , \quad \mu+1 \geq \gamma \tag{2.I}$$

Пусть V и τ_0 -любые фиксированные числа, удовлетворяющие неравенствам

$$V < \tau_0 \leq 1 , \quad \tau_0 \geq -1-2\mathcal{M} \tag{3.I}$$

Тогда можно указать такое достаточное малое положительное число ρ и построить конечное число обобщенных функций $\Phi_\lambda(z_1, z_2, \dots, z_5; \xi)$, $\lambda = 1, 2, \dots, S$,вещественной переменной ξ со свойствами:

I) Функции $\Phi_\lambda(z_1, z_2 \dots, z_5, \xi)$ аналитические относительно $(z_1, z_2, \dots, z_5)$ в области

$$|z_1-\mathcal{M}^2| \leq \rho , \quad |z_2-\mathcal{M}^2| \leq \rho, \quad |z_3-\tau| \leq \rho , \tag{4.I}$$
$$|z_4-\tau| \leq \rho, \quad |z_5+\alpha^2| \leq \rho/\xi ,$$

где вещественные параметры τ и α^2 независимо пробегают промежутки

$$V \leq \tau \leq \tau_0 , \quad 0 \leq \alpha^2 \leq 4\gamma\left(1-\frac{1-\tau_0}{2\mathcal{M}+2}\right)-4\tau_0 \tag{5.I}$$

2) $\Phi_\lambda(z_1, z_2, \dots, z_5, \xi)$, если $\xi < (\mathcal{M}+1)^2$.

3) Для вещественных $(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4)$ из многообразия (I.I), для которых величины

$$z_1=\rho_1^2,\ z_2=\rho_2^2,\ z_3=\rho_3^2,\ z_4=\rho_4^2,\ z_5=(\rho_1+\rho_2)^2,\ \xi=(\rho_1+\rho_3)^2$$

удовлетворяют неравенствам (4.I) и $\rho_{10}+\rho_{30}\geq 0$ имеем представление вида

$$\tilde{\mathcal{F}}^{\nu}_{ij}(\rho_1,\rho_2,\rho_3,\rho_4)=\sum_{\lambda=1}^{3}\mathcal{P}^{\nu}_{\lambda ij}(\rho_1,\rho_2,\rho_3,\rho_4)\,\phi_\lambda\left[\rho_1^2,\rho_2^2,\rho_3^2,\rho_4^2,(\rho_1+\rho_2)^2;(\rho_1+\rho_3)^2\right]$$

где $\mathcal{P}^{\nu}_{\lambda ij}$ - полиномы.

<u>Замечание</u>. Функции $\phi_\lambda(z_1,z_2,\dots,z_5;\xi)$ аналитические относительно $(z_1,z_2,\dots,z_5)$ и обобщенные относительно ξ. Это значит [см. соответствующие определения в (2) и (3)], что для любой основной функции $\varphi(\xi)$ выражения

$$\int\phi_\lambda(z_1-M^2,\ z_2-M^2,\ z_3-\tau,\ z_4-\tau,\ z_5/\xi-\alpha^2;\ \xi)\varphi(\xi)d\xi$$

являются аналитическими функциями относительно $(z_1,z_2,\dots,z_5)$ области $|z_i|\leq\rho,\quad i=1,2,\dots,5$

Теорема I впервые была доказана Н.Н. Боголюбовым в работе[2] (математическое дополнение). Доказательство проводилось для случая $\tau_0=1$ и $\gamma=3$. Была установлена аналитичность в области (4.I), где

$$0\leq\alpha^2\leq 4M/M+1$$

Этот результат был улучшен в работах[3],[6], где было доказано, что в упомянутом случае: $0\leq\alpha^2\leq 8$; был рассмотрен также случай $\tau_0=1$ и $\gamma=2$ и установлено, что в (4.I) α^2 пробегает промежуток 0,4. Приведенные результаты как частный случай содержится в теореме I.

Доказательство теоремы I проводится по схеме доказательства соответствующей теоремы Ш из [3]. Поэтому мы будем проводить его кратко, обращая внимание лишь на новые моменты и отсылая читателя, интересующегося подробностями, к работам [2], [3] и [6]. При доказательстве теоремы I существенно используется теорема 2 (см. п. 2), доказанная в [3]. Нужно отметить, что ввиду большого числа параметров, участвующих в теореме I, используются далеко не все возможности теоремы 2. Поэтому область аналитичности, определенная в (4.I) - (5.I), может быть расширена в том смысле, что увеличен интервал изменения α^2. Но для этого необходимо обратиться к большому численному счету.

Однако при некоторых значениях параметров μ, γ и τ_0 объем вычислительной работы сводится, по существу, к численному решению системы трех алгебраических уравнений с тремя неизвестными. Именно, имеет место следующее усиление теоремы I.

Теорема I'. Пусть выполнены условия теоремы I и $\mu \geqslant 1$. Среди всех решений (x, u, v) таких, что $0 \le u \le x$, $0 \le v \le x$, системы алгебраических уравнений [x)]

$$2u^2 + u^2\left(\gamma/x-u\right)^2 = 2v^2 + v^2\left(\mu+1/x-v\right)^2,$$

$$\mu+1 = \sqrt{1+\left(\gamma/x-u\right)^2}\,(x-2u) + \sqrt{1+\left(\mu+1/x-v\right)^2}\,(x-2v),$$

$$2v^2 + v^2\left(\mu+1/x-v\right)^2 = \left[\sqrt{1+\left(\mu+1/x-v\right)^2}\,(x-2v) - \mu+1/2 - \mu^2\tau_0/2\mu+2\right]^2 -$$

$$- \mu^2 x^2 + \left(\mu+1/2 + \mu^2-\tau_0/2\mu+2\right)^2 = 0 \qquad (6.I)$$

---

x) Такое решение всегда существует.

выберем решение с наименьшим x . Обозначим это решение через (x_0, u_0, v_0) . Предположим, что выполнено условие

$$\mu+1+\frac{\mu^2-\tau_0}{\mu+1}-2\sqrt{1+\left(\frac{\mu+1}{x_0-v_0}\right)^2}\left[x_0\frac{\mu^2-\tau_0}{(\mu+1)^2}-v_0\left(\frac{2\mu^2-2\tau_0}{(\mu+1)^2}-1\right)\right]\geq 0 \qquad (7.\mathrm{I})$$

Тогда

$$x_0^2>\gamma\left(1-\frac{1-\tau_0}{2\mu+2}\right)-\tau_0 \qquad (8.\mathrm{I})$$

и в теореме I область аналитичности (4.I) характеризуется параметром α^2 из промежутка $0\leq\alpha^2\leq 4x_0^2-\varepsilon$, где ε - сколь угодно малое положительное число.

Замечание. Не выяснено, является ли указанная в теореме I' область аналитичности максимально возможной по z_5, так как не доказано, что область аналитичности G , определяемая теоремой 2, не допускает аналитического расширения в смысле[4], гл. IУ.

Был рассчитан ряд примеров, представляющих интерес для приложений [см., например, (2),(5)] :

$\mu=7$, $\tau_0=1$, $\gamma=3$, $x_0=1,608$, $u_0=0,539$, $v_0=0,275$
$\mu=7$, $\tau_0=1$, $\gamma=2$, $x_0=1,135$, $u_0=0,379$, $v=0,139$
$\mu=7$, $\tau_0=0$, $\gamma=2$, $x_0=1,557$, $u_0=0,521$, $v_0=0,205$

Численное решение системы уравнений (6.I) осуществлялось методом Ньютона.

В п.п. 8 и 9 показано, что в теореме I при $\mu=1$, $\gamma=2$ $\tau_0=1$ и при любом κ из промежутка $[0,2]$ область аналитичности (4.I)-(5.I) можно заменить на :

$$|z_1-49|\le\rho,\ |z_2-49|\le\rho,\ |z_3-\tau|\le\rho,\ |z_4-\tau+2\kappa|\le\rho,\ |z_5+\alpha^2|\le\rho/3,$$
$$V\le\tau\le 1,\ 0\le\alpha^2\le 2+7/4\,\kappa-\kappa^2/32+\sqrt{4+7\kappa-\kappa^2/16-7/64\,\kappa^3} \qquad (9.I)$$

Нужно отметить, что приведенные в (9.I) верхние границы изменения α^2 могут быть увеличены. (приложения см. в работе[7])

2. Имеет место следующая теорема, доказанная в работе (3).

Теорема 2. Пусть даны две обобщенные функции $\mathcal{F}_r(x)$ и $\mathcal{F}_a(x)$, удовлетворяющие условиям:

$\mathcal{F}_r(x)=0$ если $x\le 0$; $\mathcal{F}_a(x)=0$,если $x\ge 0$;
$\tilde{\mathcal{F}}_r(p)=\tilde{\mathcal{F}}_a(p)$ если $p\in G^0$

где область G^0 есть совокупность точек $p=(p_0,\vec{p})$, удовлетворяющих одновременно неравенствам

$$C_1-\sqrt{\vec{p}^{\,2}+\sigma^2}<p_0<C_2+\sqrt{\vec{p}^{\,2}+\delta^2} \qquad (1.2)$$

Пусть a и b - любые вещественные числа, $a\le b$ x).

Введем обозначения:

---

x) Равенство $a=b$ соответствует тривиальной области аналитичности $|\mathcal{J}m\,\vec{\kappa}|<|\mathcal{J}m\,\kappa_0|$ см. замечание I к теореме I в (3)

$$\lambda = \frac{|\mathcal{Y}m\, \vec{K}|}{|\mathcal{Y}m \sqrt{(K_0-a)(K_0-b)}|} \; ; \quad Q = \left| Re\vec{K} - \frac{Re\sqrt{(K_0-a)(K_0-b)}}{\mathcal{Y}m\sqrt{(K_0-a)(K_0-b)}}\, \mathcal{Y}m\,\vec{K} \right| \qquad (2.2)$$

$$\ell_K(\eta) = \left(\frac{\eta + |\eta|}{2}\right)^K, \quad K = 0, 1, \dots \qquad (3.2)$$

Назовем $G\,(a,b)$ совокупность комплексных точек $K = (K_0, \vec{K})$, удовлетворяющих неравенству

$$\lambda < 1 \qquad (4.2)$$

а также обладающих тем свойством, что при всех ξ из промежутка $[a,b]$ выполнены неравенства

$$C_1 - \sqrt{\ell_2\left[Q - \lambda\sqrt{(\xi-a)(b-\xi)}\right] + \sigma^2} < \xi < C_2 + \sqrt{\ell_2\left[Q - \lambda\sqrt{(\xi-a)(b-\xi)}\right] + \delta^2} \qquad (5.2)$$

Тогда существует функция $\widetilde{\Phi}\,(K)$ комплексного переменного K, аналитическая в области

$$G = \bigcup_{a \le b} G\,(a,b)$$

и такая, что при всех вещественных ρ из области G_0

$$\widetilde{\Phi}\,(\rho) = \widetilde{\mathcal{F}}_r\,(\rho) = \mathcal{F}_a\,(\rho)$$

Другими словами, комплексная точка K принадлежит области G в том и только том случае, если для нее найдется хотя бы одна пара вещественных чисел a и b, $a \le b$ таких, что неравенства (4.2) и (5.2) выполнены.

Следствие I. Если

$$C_1 - \sigma < c_2 + \delta_1 \tag{6.2}$$

то область

$$\left|\mathcal{J}m\ \vec{K}\right| < \left|\mathcal{J}m\sqrt{(K_0 - C_1 + \sigma)(K_0 - C_2 - \delta)}\right| \tag{7.2}$$

содержится в области G.

Действительно, полагая $a = c_1 - \sigma + \varepsilon,\ b = c_2 + \delta$, где сколь угодно малое положительное число, и пользуясь (4.2), (5.2) и (6.2), заключаем, что множество точек (7.2) содержится в

см. также [2], теорема IУ .

Следствие 2. Множество точек K, определяемое неравенствами: либо $|\mathcal{J}m\vec{K}| < |\mathcal{J}m K_0|$,

либо при $|\mathcal{J}m\vec{K}| \geq |\mathcal{J}m K_0|$

$$C_1 - \sqrt{e_2\left[|Re\vec{K}| - \sqrt{(\mathcal{J}m\vec{K})^2 - (\mathcal{J}m K_0)^2}\right] + \sigma^2} + \sqrt{(\mathcal{J}m\vec{K})^2 - (\mathcal{J}m K_0)^2} < Re K_0 <$$
$$< C_2 + \sqrt{e_2\left[|Re\vec{K}| - \sqrt{(\mathcal{J}m K_0)^2}\right] + \delta^2} - \sqrt{(\mathcal{J}m\vec{K})^2 - (\mathcal{J}m K_0)^2} \tag{8.2}$$

содержится в области G. В частности, если точка $(p_0, \vec{K}), \mathcal{J}m\, p_0 = 0$ принадлежит области G, то и все точки $(p_0 + iq_0, \vec{K})$ будут принадлежать G.

Действительно, достаточно рассмотреть те K, для которых

$$|\mathcal{J}m\vec{K}| \geq |\mathcal{J}m K_0|$$

Полагая при $\varepsilon > 0$

$$a = Re K_0 - \sqrt{(\mathcal{J}m\vec{K})^2 - (\mathcal{J}m K_0)^2} - \varepsilon \tag{9.2}$$

$$b = Re K_0 + \sqrt{(\mathcal{J}m\vec{K})^2 - (\mathcal{J}m K_0)^2} + \varepsilon$$

получим

$$|\mathrm{Im}\sqrt{(k_0-a)(k_0-b)}|^2=(\mathrm{Im}\vec{k})^2+\varepsilon^2+2\varepsilon\sqrt{(\mathrm{Im}\vec{k})^2-(\mathrm{Im}\,k_0)^2}>(\mathrm{Im}\vec{k})^2$$

$$\mathrm{Re}\sqrt{(k_0-a)(k_0-b)}=0$$

таким образом неравенство (4.2) выполнено.

Неравенства (5.2) будут выполнены, если

$$c_1-\sqrt{\ell_2(|\mathrm{Re}\vec{k}|-b-a/2)+\sigma^2}<\xi<c_2+\sqrt{\ell_2(|\mathrm{Re}\vec{k}|-b-a/2)+\delta^2}$$

$$a\le\xi\le b$$

Последние неравенства будут удовлетворены, если предположить, что

$$c_1-\sqrt{\ell_2(|\mathrm{Re}\vec{k}|-b-a/2+\sigma^2}<a$$

$$c_2+\sqrt{\ell_2(|\mathrm{Re}\vec{k}|-b-a/2+\delta^2}>b$$

Полученные же неравенства, в силу (8.2) и (9.2), будут выполнены при достаточно малом $\varepsilon>0$.

3. Докажем, что неравенства (5.2) эквиваленты следующим неравенствам:

$$\left.\begin{aligned}&\xi_1-c_1+\sqrt{[Q-\lambda\sqrt{(\xi_1-a)(b-\xi_1)}]^2+\sigma^2}>0,\\&c_2-\xi_2+\sqrt{[Q-\lambda\sqrt{(\xi_2-a)(b-\xi)}]^2+\delta^2}>0\end{aligned}\right\}\qquad(\mathrm{I}.3)$$

,

где числа $\xi_1=\xi_1(k,a,b)$ и $\xi_2=\xi_2(k,a,b)$ суть вещественные корни соответственно уравнений

$$\sqrt{(\xi_1-a)(b-\xi_1)\{[Q-\lambda\sqrt{(\xi_1-a)(b-\xi_1)}]^2+\sigma^2\}}=\lambda[Q-\lambda\sqrt{(\xi_1-a)(b-\xi_1)}]\times$$

$$\times\left(\frac{b+a}{2}-\xi_1\right)\qquad(2.3)$$

$$\sqrt{(\xi_2-a)(b-\xi_2)}\left\{\left[Q-\lambda\sqrt{(\xi_2-a)(b-\xi_2)}\right]^2+\delta^2\right\}= \\ =\lambda\left[Q-\lambda\sqrt{(\xi_2-a)(b-\xi_2)}\right]\left(\xi_2-\frac{b+a}{2}\right) \tag{3.3}$$

удовлетворяющие неравенствам

$$a\le\xi_1\le\frac{a+b}{2}\le\xi_2\le b \tag{4.3}$$

Нетрудно видеть, что всегда существует одно и только одно решение уравнений (2.3) и (3.3), удовлетворяющее неравенствам (4.3).

Очевидно, что из неравенств (5.2) всегда следуют неравенства (I.3).

Докажем, что из неравенств (I.3) следуют неравенства (5.2). Для этого изучим кривые

$$f_1(\xi)=\xi-c_1+\sqrt{\ell_3\left[Q-\lambda\sqrt{(\xi-a)(b-\xi)}\right]+\sigma^2},\quad a\le\xi\le b$$

$$f_2(\xi)=c_2-\xi+\sqrt{\ell_2\left[Q-\lambda\sqrt{(\xi-a)(b-\xi)}\right]+\delta^2},\quad a\le\xi\le b \quad {}^{*)}$$

Имеем

$$f_1'(\xi)=1-\frac{\lambda\ell_1\left[Q-\lambda\sqrt{(\xi-a)(b-\xi)}\right]}{\sqrt{\ell_2\left[Q-\lambda\sqrt{(\xi-a)(b-\xi)}\right]+\sigma^2}}\cdot\frac{\frac{a+b}{2}-\xi}{\sqrt{(\xi-a)(b-\xi)}} \tag{5.3}$$

$$f_2'(\xi)=-1+\frac{\lambda\ell_1\left[Q-\lambda\sqrt{(\xi-a)(b-\xi)}\right]}{\sqrt{\ell_2\left[Q-\lambda\sqrt{(\xi-a)(b-\xi)}\right]+\delta^2}}\cdot\frac{\xi-\frac{a+b}{2}}{\sqrt{(\xi-a)(b-\xi)}} \tag{6.3}$$

---

x) Будем считать, что $Q>0,\lambda>0$ и $a<b$; в противном случае утверждение очевидно.

Из (5.3) и (6.3) следуют равенства:

$$f_2'(a)=-\infty,\ f_i'(b)=+\infty,\ i=1,2;\ f_1'\left(\frac{a+b}{2}\right)=1,\ f_2'\left(\frac{a+b}{2}\right)=-1 \qquad (7.3)$$

Уравнения (2.3) и (3.3) имеют единственное решение, удовлетворяющее (4.3). Поэтому и в силу (7.3) уравнения $f_i'(\xi)=0$ имеют на промежутке $[a,b]$ по одному корню ξ_i, $i=1,2$. Отсюда и из (7.3) заключаем, что кривые $f_i(\xi)$, имеют на промежутке $[a,b]$ по одной точке минимума ξ_i. Следовательно, из неравенств (I.3) $f_i(\xi_i)>0$, $i=1,2$ следуют неравенства (5.2).

Таким образом неравенства (5.2) эквивалентны неравенствам (I.3).

Докажем теперь, что комплексная точка K принадлежит области G в том и только том случае, если для нее найдется хотя бы одна пара вещественных чисел a и b, $a \le b$, таких, что выполнено неравенство (4.2) и неравенства

$$\left.\begin{aligned} &\xi_1-C_1+\sqrt{\left[Q-\lambda\sqrt{(\xi_1-a)(b-\xi_1)}\right]^2+\alpha^2}\ge 0\\ &C_2-\xi_2+\sqrt{\left[Q-\lambda\sqrt{(\xi_2-a)(b-\xi_2)}\right]+\delta^2}\ge 0\end{aligned}\right\} \qquad (8.3)$$

где ξ_1 и ξ_2 определяются уравнениями (2.3) и (3.3).

Действительно, если для некоторой точки K нашлись такие вещественные числа a и b, $a \le b$, что выполнено неравенство (4.2) и в одном (или в обоих) из неравенств (8.3) имеет место знак равенства, то можно сколь угодно мало изменить параметры a и b так, что неравенство (4.2) еще сохранится, а соответствующие равенства (8.3) превратятся в строгие неравенства (I.3), и, следовательно, упомянутая точка будет принадлежать области G .

4. Теперь можно установить справедливость следующей леммы.

Лемма I. Комплексная точка K принадлежит области G в том и только том случае, если система пяти уравнений, состоящая из уравнений (2.3), (3.3) и уравнений

$$\lambda \left| \operatorname{Im} \sqrt{(K_0-a)(K_0-b)} \right| = \left| \operatorname{Im} \vec{K} \right| ,$$

$$\xi_1 - c_1 + \sqrt{\left[Q - \lambda\sqrt{(\xi_1-a)(b-\xi_1)}\right]^2 + \sigma^2} = 0 , \tag{I.4}$$

$$c_2 - \xi_2 + \sqrt{\left[Q - \lambda\sqrt{(\xi_2-a)(b-\xi_2)}\right]^2 + \delta^2} = 0 \tag{2.4}$$

имеет решение $(\lambda, a, b, \xi_1, \xi_2)$, удовлетворяющее условиям

$$0 \le \lambda < 1 , \quad a \le \xi_1 \le \frac{a+b}{2} \le \xi_2 \le b \tag{3.4}$$

<u>Доказательство</u>. Обозначим через G_1 множество точек K, удовлетворяющих условиям леммы. В силу п.3 $G_1 \subset G$. Докажем, что $G_1 = G$. Для этого достаточно доказать, что $G \subset G_1$. Пусть $K \in G$. Тогда найдутся такие вещественные числа λ, a, b, ξ_1 и ξ_2 , удовлетворяющие уравнениям (2.3) и (3.3) и неравенствам (I.4) и (2.4). Неравенства (8.3) запишем в виде

$$\left.\begin{aligned} &\xi_1 - c_1 + \sqrt{\left[Q - \lambda\sqrt{(\xi_1-a)(b-\xi_1)}\right]^2 + \sigma^2} = \delta_1 \qquad \delta_1 \ge 0 \\ &c_2 - \xi_2 + \sqrt{\left[Q - \lambda\sqrt{(\xi_2-a)(b-\xi_2)}\right]^2 + \delta^2} = \delta_2 \qquad \delta_2 \ge 0 \end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

Из теоремы 2 следует, что область G монотонно убывает с увеличением C_1 и уменьшением C_2. Следовательно, область G_1 монотонно убывает с увеличением C_1 и уменьшением C_2. Из (4.4) следует, что точка K принадлежит области G_1, определяемой параметрами $c_1+\delta_1$ и $c_2-\delta_2$. Следовательно, она принадлежит к более широкой области G_1 (определенной параметрами C_1 и C_2'). Следовательно, $G\subset G_1$ и наша лемма доказана.

В частности, если точка K имеет вид: $K \overset{*}{=} (\rho_0,\vec{K})$, $\operatorname{Im}\rho_0=0$ то критерий принадлежности ее к области G упрощается. В этом случае в силу (2.2) имеем:

$$\lambda=\frac{|\operatorname{Im}\vec{K}|}{\sqrt{(\rho_0-a)(b-\rho_0)}}\ ,\qquad Q=|\operatorname{Re}\vec{K}| \qquad (5.4)$$

* Имеет место

Лемма 2. Точка $K \overset{*}{=} (\rho_0,\vec{K})$ принадлежит области G в том и только том случае, если существует решение (λ,u,v) системы уравнений

$$u^2(1+\lambda)+u^2\left(\frac{\sigma}{|\operatorname{Re}\vec{K}|-\lambda u}\right)^2=v^2(1+\lambda^2)+v^2\left(\frac{\delta}{|\operatorname{Re}\vec{K}|-\lambda v}\right)^2,$$

$$c_1-c_2=\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{|\operatorname{Re}\vec{K}|-\lambda u}\right)^2}\left(\lambda|\operatorname{Re}\vec{K}|-\lambda^2u-u\right)+\sqrt{1+\left(\frac{\delta}{|\operatorname{Re}\vec{K}|-\lambda v}\right)^2}\times$$
$$\times\left(\lambda|\operatorname{Re}\vec{K}|-\lambda^2v-v\right), \qquad (6.4$$

$$u^2(1+\lambda^2)+u^2\left(\frac{\sigma}{|\operatorname{Re}\vec{K}|-\lambda u}\right)^2-\left[(c_1-\rho_0)\lambda-\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{|\operatorname{Re}\vec{K}|-\lambda u}\right)^2}\times\right.$$
$$\left.\times\left(\lambda|\operatorname{Re}\vec{K}|-\lambda^2u-u\right)\right]^2=\left(\operatorname{Im}\vec{K}\right)^2$$

удовлетворяющее условиям

$$0 \leq \lambda < 1, \quad 0 \leq \lambda u \leq |Re\vec{K}|, \quad 0 \leq \lambda v \leq |Re\vec{K}| \tag{7.4}$$

<u>Доказательство</u>. Полагая в уравнениях (2.3), (3.3), (I.4) и (2.4)

$$\alpha = b-a/2, \quad \beta = a+b/2, \quad u = \sqrt{(\xi_1-a)(b-\xi_1)}, \quad v = \sqrt{(\xi_2-a)(b-\xi_2)},$$

$$\xi_1 = a+b/2 - \sqrt{(b-a/2)^2 - u^2}, \quad \xi_2 = a+b/2 + \sqrt{(b-a/2)^2 - v^2}$$

и принимая во внимание (5.4), получим

$$\left.\begin{aligned}
&u \cdot \sqrt{(|Re\vec{K}| - \lambda u)^2 + \sigma^2} = \lambda \left(|Re\vec{K}| - \lambda u\right)\sqrt{\alpha^2 - u^2} \\
&v \sqrt{(|Re\vec{K}| - \lambda v)^2 + \delta} = \lambda \left(|Re\vec{K}| - \lambda v\right)\sqrt{\alpha^2 - v^2} \\
&\beta - \sqrt{\alpha^2 - u^2} - c_1 + \sqrt{(|Re\vec{K}| - \lambda u)^2 + \sigma^2} = 0 \\
&c_2 - \beta - \sqrt{\alpha^2 - v^2} + \sqrt{(|Re\vec{K}| - \lambda v)^2 + \delta^2} = 0 \\
&\lambda \sqrt{\alpha^2 - (\rho_0 - \beta)^2} = |\mathcal{I}m\vec{K}|
\end{aligned}\right\} \tag{8.4}$$

Исключая из уравнений (8.4) α и β, получим уравнения (6.4); условия (4.2) и (4.3) при этом перейдут в условия (7.4). Лемма доказана.

5. Пользуясь теоремой 2, докажем теорему I. Положим

$$c_1 = t, \quad c_2 = -t, \quad \delta = \mu + 1, \quad \sigma = \gamma. \tag{I.5}$$

Будем считать

$$t \geq \frac{\mu+1}{2} = t_0 \tag{2.5}$$

Обозначим через G_t область G, определенную в теореме 2 и соответствующую различным значениям параметра t из промежутка $[t_0, \infty)$.

Доказательство теоремы I состоит в почти дословном повторении доказательства теорем II и Ш из (3) [см. также (2)]. Задача сводится к доказательству существования такого достаточно малого положительного числа η, что при каждом $t \geq t_0$ область G_t содержит множество точек (η/t -окрестность) вида:

$$(K_0, \vec{K}) = \left[\frac{M^2-\tau}{4t} + K_0' \quad \frac{\alpha}{2} \vec{e}_1 + \sqrt{\left(t + \frac{M^2-\tau}{4t}\right)^2 - M^2 - \frac{\alpha^2}{4}}\, \vec{e}_2 + \vec{K}_1' \right] \tag{3.5}$$

где $(K_0', \vec{K}')$ -комплексные, а $\vec{e}_i$ -вещественные векторы такие, что

$$|K_0'| < \eta/t, \quad |\vec{K}'| < \eta/t, \quad |\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = 1, \quad \vec{e}_1 \vec{e}_2 = 0$$

и (4.5)

$$0 \leq \alpha^2/4 \leq \gamma \left(1 - {}^{1-\tau_0}/_{2M+2}\right) - \tau_0, \quad \nu \leq \tau \leq \tau_0$$

Рассмотрим два случая.

I.

$$\left(t + \frac{M^2-\tau}{4t}\right)^2 - M^2 - \frac{\alpha^2}{4} \geq 0 \tag{5.5}$$

В силу следствия 2 из теоремы 2 в (3.5) можно считать . Поэтому и в силу (5.5) имеем :

$$Re\, K_0 = {}^{M^2-\tau}/_{4t}, \quad \mathcal{Im}\, K_0 = 0 \quad \mathcal{Im}\, \vec{K} = \mathcal{Im}\, \vec{K}'$$
$$Re\, \vec{K} = {}^{\alpha}/_{2}\, \vec{e}_1 + \sqrt{\left(t + \frac{M^2-\tau}{4t}\right)^2 - M^2 - \alpha^2/_4}\; \vec{e}_2 + Re\, \vec{K}' \tag{6.5}$$

Откуда

$$|\operatorname{Im}\vec{K}| = \xi_1/t \qquad |\operatorname{Re}\vec{K}| = \sqrt{\left(t + \mu^2 - \tau/4t\right)^2 - \mu^2 + \xi_2/t}\,, \quad |\xi_i| \le \xi.$$

В силу (8.2),(I.5) и (6.5) достаточно установить справедливость неравенств

$$\left(t + \frac{\mu^2 - \tau}{4t} + \frac{\xi}{t}\right)^2 < (\mu+1)^2 + \left[\sqrt{\left(t + \mu^2 - \tau/4t\right)^2 - \mu^2} - \frac{2\xi}{t}\right]^2$$

$$\left(t - \frac{\mu^2 - \tau}{4t} \pm \frac{\xi}{t}\right)^2 < \gamma^2 + \left[\sqrt{\left(t + \frac{\mu^2 - \tau}{4t}\right)^2 - \mu^2} - \frac{2\xi}{t}\right]^2$$

при достаточно малом ξ и при всех рассматриваемых t, α и τ. Последние неравенства обеспечиваются условиями $\tau_0 \le 1$ и $\gamma > 1$.

2.

$$\left(t + \frac{\mu^2 - \tau}{4t}\right)^2 - \mu^2 - \frac{\alpha^2}{4} \le 0 \tag{7.5}$$

В этом случае множество точек(3.5) компактно. Поэтому для доказательства теоремы достаточно доказать , что точки

$$K^*(t;\alpha,\tau) = \left[\frac{\mu^2 - \tau}{4t}, \frac{\alpha}{2}\vec{e}_1 + i\sqrt{\mu^2 + \alpha^2/4 - \left(t + \frac{\mu^2 - \tau}{4t}\right)^2}\,\vec{e}_2\right] \tag{8.5}$$

при всех рассматриваемых τ и α принадлежат G_t, $t \ge t_0$.

Воспользуемся следствием I из теоремы 2. В силу (I.5) условие (6.2) будет выполнено при

$$t_0 \le t < t_0 + \gamma/2$$

В силу (7.2), (I.5) и (8.5) осталось доказать неравенство

$$f(t,\tau,\alpha) \equiv \left(\frac{\mu^2 - \tau}{4t} - t + \gamma\right)\left(\mu + 1 - t - \frac{\mu^2 - \tau}{4t}\right) - \mu^2 - \frac{\alpha}{4} +$$

$$+ \left(t + \frac{\mu^2 - \tau}{4t}\right)^2 \equiv$$

$$\equiv \frac{\mu^2-\tau}{4t}\left(\mu+2t+1-\gamma\right)+2t^2+\gamma(\mu+1)-t(\mu+1+\gamma)-\mu^2\frac{\alpha^2}{4}>0$$

при условиях (4.5) и (7.5). Для этого достаточно доказать, что

$$f(t,\tau_0,\alpha)>0$$

Но в силу (2.I) и (3.I) имеем:

$$f(t_0,\tau_0,\alpha)=\gamma\left(1-\frac{1-\tau_0}{2\mu+2}\right)-\tau_0-\frac{\alpha^2}{4}\geq 0$$

$$\frac{\partial f(t,\tau_0,\alpha)}{\partial t}=-\left(\mu+1-\gamma\right)\frac{\mu^2-\tau_0}{4t^2}+4t-\mu-1-\gamma>$$

$$>-\left(\mu+1-\gamma\right)\frac{\mu^2-\tau_0}{(\mu+1)^2}+\mu+1-\gamma=\left(\mu+1-\gamma\right)\left[1-\frac{\mu^2-\tau_0}{(\mu+1)^2}\right]\geq 0$$

Итак, доказано, что

$$f(t,\tau,\alpha)>0$$

при всех рассматриваемых t,τ и α, кроме точки

$$t=t_0=\frac{\mu+1}{2},\quad \tau=\tau_0,\quad \alpha^2/4=\gamma\left(1-\frac{1-\tau_0}{2\mu+2}\right)-\tau_0 \qquad (9.5)$$

Однако, если обратиться к определению области G в теореме 2, то увидим, что точка (8.5), соответствующая параметрам (9.5), вместе с некоторой окрестностью будет принадлежать области G_{t_0} (подробности этого рассмотрения изложены ниже).

Теорема I доказана.

6. Применим результаты пунктов 3 и 4 для доказательства теоремы I*. Как следует из пункта 5 для этого достаточно установить, что точки (8.5) при всех τ и α из области

$$0 \le \alpha^2 < 4x_0^2, \quad V \le \tau \le \tau_0, \quad \left(t + \frac{\mu^2 - \tau}{4t}\right)^2 - \mu^2 - \frac{\alpha^2}{4} \le 0 \tag{1.6}$$

принадлежат G_t, $t \ge t_0$

Предварительно докажем следующую лемму.

Лемма 3. Фиксируем числа t и α таким образом, чтобы тройка чисел (t, α, τ_0) принадлежала области (1.6). Пусть

$$K^*(t; \alpha, \tau_0) \in G_t \tag{2.6}$$

Тогда

$$K^*(t; \alpha, \tau) \in G_t \tag{3.6}$$

при всех таких, что числа (t, α, τ) удовлетворяют неравенствам (1.6).

Доказательство. Из теоремы 2 и из (2.6) и (8.5) следует существование вещественных чисел a_0 и b_0, $a_0 \le b_0$, таких, что выполнены неравенства:

$$\lambda(\tau_0) < 1 \tag{4.6}$$

$$t - \sqrt{e_2 [\alpha/2 - \lambda(\tau_0) \sqrt{(\xi - a_0)(b_0 - \xi)}] + \gamma^2} < \xi <$$

$$< -t + \sqrt{e_2 [\alpha/2 - \lambda(\tau_0) \sqrt{(\xi - a_0)(b_0 - \xi)}] + (\mu + 1)^2} \tag{5.6}$$

при всех ξ из промежутка $[a_0, b_0]$. В (4.6) и далее будут использованы обозначения

$$\lambda^2(\tau) = \frac{A(\tau)}{B(\tau)}, \quad A(\tau) = \mu^2 + \alpha^2/4 - \left(t + \frac{\mu^2 - \tau}{4t}\right)^2$$

$$B(\tau) = \left(\frac{\mu^2 - \tau}{4t} - a_0\right)\left(b_0 - \frac{\mu^2 - \tau}{4t}\right) \tag{6.6}$$

Для доказательства (3.6) достаточно установить справедливость неравенства

$$\lambda(\tau) \leq \lambda(\tau_0) \tag{7.6}$$

Действительно, в силу (4.6), (5.6) и (6.6), а также на основании монотонности функции $\ell_2(\xi)$, заключаем, что для точки $K^*(t;\alpha,\tau)$, указанной в лемме, неравенства (4.2) и (5.2) будут выполнены, если положить $a=a_0$ и $b=b_0$. Следовательно,

$$K^*(t,\alpha,\tau) \in G_t(a,b) \subset G_t$$

Прежде чем перейти к доказательству неравенства (7.6), докажем неравенство

$$a_0+b_0+2t \geq 0 \tag{8.6}$$

Для доказательства (8.6) используем лемму 2. Из второго и четвертого уравнений (8.4) имеем

$$a_0+b_0+2t = 2\,\frac{\alpha/2\,\lambda(\tau_0)-\lambda^2(\tau_0)\,\bar{v}_0-v_0}{\lambda(\tau_0)\,[\alpha/2-\lambda(\tau_0)\,v]}\sqrt{[\alpha/2-\lambda(\tau_0)v]^2+(\nu+1)^2} \tag{9.6}$$

Так как по условию $\delta=\mu+1>\gamma=6$, то из первого уравнения (6.4) следует, что $\bar{v}_0 \leq u_0$. Принимая во внимание последнее неравенство, а также неравенства

$$c_1-c_2=2t>0\,, \quad \alpha/2-\lambda(\tau_0)\bar{v}_0 \geq 0$$

получим из второго уравнения (6.4)

$$\alpha/2\,\lambda(\tau_0)-\lambda^2(\tau_0)\,\bar{v}_0-v_0 \geq 0$$

отсюда и из (9.6) следует неравенство (8.6).

Рассмотрим функцию

$$f(\tau)=B(\tau)-A(\tau)$$

В силу (4.6) $f(\tau_0)>0$. Принимая во внимание (6.6) и (8.6), получим

$$f'(\tau)=B'(\tau)-A'(\tau)=-\frac{1}{4t}(a_0+b_0+2t)\le 0 \tag{10.6}$$

Следовательно, $f(\tau)\ge f(\tau_0)>0$, если $\tau\le\tau_0$, т.е.

$$\lambda^2(\tau)=\frac{A(\tau)}{B(\tau)}<1 \tag{11.6}$$

Докажем теперь, что $\lambda(\tau)$ монотонно убывает с уменьшением τ. Принимая во внимание (10.6) и (11.6), получим

$$\frac{d\lambda^2(\tau)}{d\tau}=\frac{A'(\tau)-\lambda^2(\tau)B'(\tau)}{B(\tau)}\ge\begin{cases}\dfrac{A'(\tau)}{B(\tau)}=\dfrac{t+\frac{\mu^2\tau}{4t}}{2tB(\tau)}>0 & \text{если } B'(\tau)\le 0\\[2ex] \dfrac{A'(\tau)-B'(\tau)}{B(\tau)}=\dfrac{a_0+b_0+2t}{4tB(\tau)} & \text{если } B'(\tau)>0\\ \ge 0 & \end{cases}$$

Таким образом, неравенство (4.6) доказано. Лемма доказана.

7. В силу леммы 3 наша задача свелась к следующей: найти такое максимальное число x_0, что при каждом фиксированном t, $t\ge t_0$ область G_t содержит множество точек

$$K^*(t;\alpha,\tau_0)=\left[\frac{\mu^2-\tau_0}{4t},\ \frac{\alpha}{2}\vec{e}_1+i\sqrt{\mu^2+\frac{\alpha^2}{4}-\left(t+\frac{\mu^2-\tau_0}{4t}\right)^2}\,\vec{e}_2\right] \tag{1.7}$$

$$0\le\alpha^2<4x_0^2,\quad \mu^2+\frac{\alpha^2}{4}-\left(t+\frac{\mu^2-\tau_0}{4t}\right)^2\ge 0.$$

Точки $K^*(t;\alpha,\tau_0)$, для которых t и α лежат на кривой

$$\mu^2+\frac{\alpha^2}{4}-\left(t+\frac{\mu^2-\tau_0}{4t}\right)^2=0$$

содержится в соответствующих областях G_t. Поэтому для каждого $t, t \geq t_0$, можно указать такое число $x = x(t)$, что все точки $K^*(t; \alpha, \tau_0)$, для которых

$$\left(t + \frac{\mu^2 - \tau_0}{4t}\right)^2 - \mu^2 \leq \alpha^2/4 < x^2$$

принадлежат области G_t, в то время как точка $K^*(t, 2x, \tau_0)$ уже не принадлежит G_t. Это значит, что точка $K^*(t, 2x, \tau_0)$ принадлежит границе области G, т.е. для нее (см. п.3).

Применим теперь лемму 2 для точек (I.7) и для областей . Устремляя α к $2x(t)$ и, следовательно, λ к 1, из (6.4) и (7.4) для определения $x = x(t)$ получим систему алгебраических уравнений :

$$2u^2 + u^2\left(\frac{\gamma}{x-u}\right)^2 = 2v^2 + v^2\left(\frac{\mu+1}{x-v}\right)^2$$

$$2t = \sqrt{1 + \left(\frac{\gamma}{x-u}\right)^2}(x - 2u) + \sqrt{1 + \left(\frac{\mu+1}{x-v}\right)^2}(x - 2v)$$

$$2v^2 + v^2\left(\frac{\mu+1}{x-v}\right)^2 - \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\mu+1}{x-v}\right)^2}(x - 2v) - t - \right. \tag{2.7}$$

$$\left. - \frac{\mu^2 - \tau_0}{x-v}\right]^2 - \mu^2 - x^2 + \left(t + \frac{\mu^2 - \tau_0}{4t}\right)^2 = 0$$

и условия

$$0 \leq u \leq x \qquad 0 \leq \tag{3.7}$$

Заметим, что одновременно мы доказали существование требуемого решения системы (2.7) при любом $t \geq t_0$. Непосредственно из геометрических соображений и из доказательства теоремы I следует, что полученная функция $x(t)$ удовлетворяет неравенству:

$$x^2(t) > \gamma\left(1 - \frac{1-\tau_0}{2\mu+2}\right) - \tau_0. \tag{4.7}$$

Итак, для определения $x(t)$ необходимо найти все решения (x, u, v) системы (2.7), удовлетворяющие условиям (3.7) и принять за $x(t)$ наименьшее x. Совершая изложенную процедуру для всех $t, t \geq t_0$, получим непрерывные функции $x(t), u(t), v(t)$. Теперь ясно, что

$$x_0 = \min x(t)\ ,\quad t \geq t_0 \tag{5.7}$$

и наша задача решена.

Теперь предположим, что выполнено условие (7.I). В этом случае

$$x_0 = x(t_0) \tag{6.7}$$

Докажем равенство (6.7), а с ним и теорему I.

Пусть, напротив,

$$x_0 = \min x(t) < x(t_0),\quad t \geq t_0 \tag{7.7}$$

Так как существуют достаточно большие t, при которых $x(t) > x_0$, то из (7.7) и из непрерывности функции $x(t)$ следует существование такого числа $t_1 > t_0$, что при этом t_1 система уравнений (2.7) имеет решение

$$[x(t_0), u(t_1), v(t_1)],\quad 0 \leq u(t_1) \leq x(t_0),\quad 0 \leq v(t_1) \leq x(t_0) \tag{8.7}$$

Введем функцию

$$f(t) = 2v^2(t) + \frac{v^2(t)(\mu+1)^2}{[x(t_0)-v(t)]^2} - \left\{\sqrt{1+\frac{(\mu+1)^2}{[x(t_0)-v(t)]^2}}\,[x(t_0)-2v(t)] - t - \frac{\mu^2-\tau_0}{4t}\right\}^2 - \mu^2 x^2(t_0) + \left(t + \frac{\mu^2-\tau_0}{4t}\right)^2$$

где функция $v(t)$ определяется системой уравнений

$$2u^2(t)+\frac{u^2(t)\gamma^2}{[x(t_0)-u(t)]^2}=2v^2(t)+\frac{v^2(t)(\mu-1)^2}{[x(t_0)-v(t)]^2} \qquad (9.7)$$

$$2t=\sqrt{1+\frac{\gamma}{[x(t_0)-u(t)]^2}}\,[x(t_0)-2u(t)]+\sqrt{1+\frac{(\mu+1)^2}{[x(t_0)-\gamma(t)]^2}}\,[x(t_0)-2v(t)]$$

Тогда

$$f(t_0)=0,\quad f(t_1)=0,\quad t_1>t_0 \qquad (10.7)$$

Пользуясь условием (7.I), мы докажем, что $f'(t)>0$ при $t\geq t_0$ Но это будет противоречить соотношениям (I0.7). Следовательно, предположение (7.7) неверно, а поэтому имеет место равенство (6.7).

Имеем

$$\frac{1}{2}f'(t)=\left(1-\frac{\mu^2\tau_0}{4t^2}\right)[x(t_0)-2v(t)]\sqrt{1+\frac{(\mu+1)^2}{[x(t_0)-v(t)]^2}}+ \qquad (11.7)$$

$$+\left\{\sqrt{1+\frac{(\mu+1)^2}{[x(t_0)-v(t)]^2}}\,[x(t_0)-v(t)]-t-\frac{\mu^2\tau_0}{4t}\right\}\frac{2+\frac{x(t_0)(\mu+1)^2}{[x(t_0)-v(t)]^3}}{\sqrt{1+\frac{(\mu+1)^2}{[x(t_0)-v(t)]^2}}}\,v'(t)$$

Из уравнений (9.7) получаем также

$$\frac{2+\dfrac{x(t_0)(\mu+1)^2}{[x(t_0)-v(t)]^3}}{\sqrt{1+\dfrac{(\mu+1)^2}{[x(t_0)-v(t)]^2}}}\,v'(t)=\frac{-2}{1+\sqrt{\dfrac{\left\{2+\dfrac{\gamma^2}{[x(t_0)-u(t)]^2}\right\}\left\{1+\dfrac{(\mu+1)^2}{[x(t_0)-v(t)]^2}\right\}}{\left\{2+\dfrac{(\mu+1)^2}{[x(t_0)-v(t)]^2}\right\}\left\{1+\dfrac{\gamma^2}{[x(t_0)-u(t)]^2}\right\}}}}$$

В силу нашего предположения $\mu+1>\gamma$. Поэтому из первого уравнения (9.7) следует, что

$$v(t)<u(t)\,,\quad \frac{(\mu+1)^2}{[x(t_0)-v(t)]^2}>\frac{2}{[x(t_0)-u(t)]^2} \tag{I3.7}$$

Из второго уравнения (9.7) и из (I3.7) получаем неравенство

$$x(t_0)-2v(t)>0 \tag{I4.7}$$

Отметим неравенство при всех $A>B>0$

$$\frac{(2+B)(1+A)}{(2+A)(1+B)}>1 \tag{I5.7}$$

Положим

$$A=\frac{(\mu+1)^2}{[x(t_0)-v(t)]^2}\,,\quad B=\frac{\gamma^2}{[x(t_0)-u(t)]^2}$$

В силу второго неравенства (I3.7) $A>B$. Принимая во внимание неравенство (I5.7), получим из (I2.7)

$$\left\{2+\frac{x(t_0)(\mu+1)^2}{[x(t_0)-v(t)]^3}\right\}v'(t)>-\sqrt{1+\frac{(\mu+1)^2}{[x(t_0)-v(t)]^2}} \tag{I6.7}$$

Применим полученное неравенство (I6.7) к оценке $f'(t)$ снизу. В силу (I4.7) первое слагаемое в правой части (II.7) всегда положительно (условие (7.I) обеспечивает неравенство $\tau_0 > -2M-1$). Если при некоторых t множитедь перед $v'(t)$ во втором слагаемом в правой части (II.7) не положитнлен, то в силу неравенства $v'(t)<0$ (см. (I2.7)) $f'(t)>0$

Осталось рассмотреть те t, для которых множитель перед $v'(t)$ во втором слагаемом в правой части (II.7) положителен. Принимая во внимание (I6.7), (I4.7) и (7.I), получим из (II.7)

$$\frac{1}{2} f'(t) > t + \frac{M^2-\tau_0}{4t} - v(t)\sqrt{1+\frac{(M+1)^2}{[x(t_0)-v(t)]^2}} - \frac{M^2-\tau_0}{4t^2}\Big[x(t_0) - 2v(t)\Big]\sqrt{1+\frac{(M+1)^2}{[x(t_0)-v(t)]^2}} \geq$$

$$\geq t_0 + \frac{M^2-\tau_0}{4t_0} - \sqrt{1+\frac{(M+1)^2}{[x(t_0)-v(t_0)]^2}}\left[x(t_0)\frac{M^2-\tau_0}{4t_0^2} - v(t_0)\left(\frac{M^2-\tau_0}{2t_0^2}-1\right)\right] \geq 0$$

Теорема доказана I' .

8. Докажем справедливость теоремы I для областей (9.I). Как следует из доказательства теоремы II в (3) для этого достаточно установить следующее: точки K_1 и K_2 , для которых

$$K_{10} = \frac{M^2-\tau}{4t}, \quad K_{20} = \frac{M^2-\tau+2K}{4t}, \quad \vec{K}_1^2 = t^2 - \frac{M^2-\tau}{2} + \left(\frac{M^2-\tau^2}{4t}\right)^2$$

$$\vec{K}_2^2 = t^2 - \frac{M^2+\tau-2K}{2} + \left(\frac{M^2-\tau+2K}{4t}\right)^2, \quad (\vec{K}_1 - \vec{K}_2)^2 = \alpha^2 + \frac{K^2}{4t^2}; \tag{I.8}$$

вместе со своими $1/t$ -окрестностями принадлежат области G_t , если параметры α, τ и t изменяются в соответствующих промежутках.

Пользуясь (I.8), как и в (3), представим векторы $\vec{K_1}$ и $\vec{K_2}$ в виде

$$\vec{K_1} = A(t;\alpha,\tau)\vec{e_1} + C(t;\alpha,\tau)\vec{e_2}\,, \quad \vec{K_2} = B(t;\alpha,\tau)\vec{e_1} - C(t;\alpha,\tau)\vec{e_2} \qquad (2.8)$$

где $\vec{e_1}$ и $\vec{e_2}$ -произвольные ортонормальные векторы. Из (I.8) и (2.8) имеем

$$A^2 + C^2 = t^2 - \frac{\mu^2+\tau}{2} + \left(\frac{\mu^2-\tau}{4t}\right)^2 = \left(t + \frac{\mu^2-\tau}{4t}\right)^2 - \mu^2 \geq 0$$

$$B^2 + C^2 = t^2 - \frac{\mu^2-\tau-2K}{2} + \left(\frac{\mu^2-\tau+2K}{4t}\right)^2 = \left(t + \frac{\mu^2-\tau+2K}{4t}\right)^2 - \mu^2 > 0$$

$$(A-B)^2 + 4C^2 = \alpha^2 + \frac{K^2}{4t^2} \qquad (3.8)$$

Откуда получаем

$$A(t;\alpha,\tau) = \frac{1}{N}\left[\left(t + \frac{\mu^2-\tau+K/2}{4t}\right)^2 - \mu^2 - \alpha^2/4 - \frac{K^2}{64t^2}\right] = N - \frac{K}{4N}\left(1 + \frac{\mu^2-\tau+K}{4t^2}\right)$$

$$B(t;\alpha,\tau) = \frac{1}{N}\left[\left(t + \frac{\mu^2-\tau+3K/2}{4t}\right)^2 - \mu^2 - \frac{\alpha^2}{4} - \frac{K^2}{64t^2}\right] = N + \frac{K}{4N}\left(1 + \frac{\mu^2-\tau+K}{4t^2}\right) \qquad (4.8)$$

$$C(t;\alpha,\tau) = \frac{1}{2N}\sqrt{\alpha^2 N^2 - \frac{K^2}{4t^2}\left(\mu^2 + \frac{\alpha^2}{4}\right)}$$

где обозначено

$$N^2 = \left(t + \frac{\mu^2-\tau+K}{4t}\right)^2 - \mu^2 - \frac{\alpha^2}{4} \qquad (5.8)$$

I. Пусть

$$\alpha^2 N^2 - \frac{K^2}{4t^2}\left(\mu^2+\frac{\alpha^2}{4}\right) \ge 0$$

Тогда $N^2 > 0$. Следовательно, в силу (4.8) векторы $\vec{K}_1$ и $\vec{K}_2$ вещественны. Поэтому, повторяя рассуждения п.5, заключаем, что область G_t содержит точки K_1 и K_2 вместе со своими h/t - окрестностями.

2. Пусть

$$\alpha^2 N^2 - \frac{K^2}{4t^2}\left(\mu^2+\frac{\alpha^2}{4}\right) \le 0, \quad 0 \le \alpha^2 \le \frac{2\mu K}{\mu+1}$$

Тогда

$$N^2 \ge \frac{\mu K}{2\mu+2} + \left(\frac{K}{2\mu+2}\right)^2; \quad \left(t + \frac{\mu^2-\tau+K/2}{4t}\right)^2 - \mu^2 - \frac{\alpha^2}{4} - \frac{K^2}{16t^2} \ge 0$$

Отсюда и из (2.8)-(4.8) имеем:

$$|Re\,\vec{K}_1| = A(t,\alpha,\tau), \quad |Re\,\vec{K}_2| = B(t,\alpha,\tau) > A(t;\alpha,\tau)$$

$$|Im\,\vec{K}_i| = |C(t;\alpha,\tau)| = \frac{1}{2N}\sqrt{\frac{K^2}{4t^2}\left(\mu^2+\frac{\alpha^2}{4}\right) - \alpha^2 N^2}$$

$$|Re\,\vec{K}_i| - |Im\,\vec{K}_i| \ge 0 \qquad i = 1,2$$

Воспользуемся следствием 2 к теореме 2. В силу (8.2) достаточно доказать неравенства

$$\begin{aligned}
&\left(t + \frac{\mu^2-\tau}{4t} + |C| + \frac{h}{t}\right)^2 < (\mu+1)^2 + \left(A - |C| - \frac{2h}{t}\right)^2 \\
&\left(t - \frac{\mu^2-\tau}{4t} - |C| \pm \frac{h}{t}\right)^2 < \gamma^2 + \left(A - |C| - \frac{2h}{t}\right)^2 \\
&\left(t + \frac{\mu^2-\tau+2K}{4t} + |C| + \frac{h}{t}\right)^2 < (\mu+1)^2 + \left(B - |C| - \frac{2h}{t}\right)^2 \\
&\left(t - \frac{\mu^2-\tau+2K}{4t} - |C| \pm \frac{h}{t}\right) < \gamma^2 + \left(B - |C| - \frac{2h}{t}\right)^2
\end{aligned} \qquad (6.8)$$

при всех рассматриваемых t,α и τ и при достаточно малых ξ. Но при больших t $A=O(t)$, $B=O(t)$, $|C|=O(t^{-1})$. Поэтому достаточно доказать неравенства (6.8) при $\xi=0$. Доказательство неравенств (6.8) сводится поэтому к установлению неравенств:

$$2|C(t;\alpha,\tau)|\Big/\Big[t+\frac{\mu^2-\tau+2k}{4t}+B(t;\alpha,\tau)\Big]<(\mu+1)^2-\mu^2-\frac{\alpha^2}{4},$$

$$2|C(t;\alpha,\tau)|\Big/\Big[-t+\frac{\mu^2-\tau}{4t}+A(t;\alpha,\tau)\Big]<\gamma^2-\tau-\frac{\alpha^2}{4},$$

$$2|C(t;\alpha,\tau)|\Big/\Big[-t+\frac{\mu^2-\tau+2k}{4t}+B(t;\alpha,\tau)\Big]<\gamma^2-\tau+2k-\frac{\alpha^2}{4}; \tag{7.8}$$

Докажем, что функции A, B и $|C|$ монотонно убывают с возрастанием α. Действительно, дифференцируя равенства (3.8) по α^2, получим

$$AA'-|C||C|'=0 \qquad BB'-|C||C|'=0$$

$$(A-B)(A'-B')-4|C||C|'=\frac{1}{2}$$

Откуда

$$AA'=BB'=|C||C|'=-\frac{AB}{2(A+B)^2}<0$$

Поэтому для доказательства неравенств (7.8) достаточно доказать неравенства, которые получатся из (7.8), если положить $\alpha=0$ в левой части и $\alpha^2=\frac{2\mu k}{\mu+k}$ – в правой части:

$$\frac{1}{t}+\frac{1+\frac{\mu^2-\tau+2k}{4t^2}}{\sqrt{\left(t+\frac{\mu^2-\tau+k}{4t}\right)^2-\mu^2}}+\frac{\frac{k}{4t}\left(1+\frac{\mu^2-\tau+k}{4t^2}\right)}{\left(t+\frac{\mu^2-\tau+k}{4t}\right)^2-\mu^2}<\frac{2}{k\mu}\left[(\mu+1)^2-\mu^2\right]-\frac{1}{\mu+1} \tag{8.8}$$

$$\frac{1}{t}+\frac{-1+\frac{\mu^2-\tau+k}{4t^2}}{\sqrt{\left(t+\frac{\mu^2-\tau+k}{4t}\right)^2-\mu^2}}<\frac{2}{k\mu}\left(\gamma^2-\tau\right)-\frac{1}{\mu+1};$$

При написании неравенств (8.8) мы объединили второе и третье из неравенств (7.8), воспользовавшись неравенством

$$t+\frac{\mu^2-\tau+k}{4t}+\sqrt{\left(t+\frac{\mu^2-\tau+k}{4t}\right)^2-\mu^2}<\frac{16t^2}{k\mu}\left[\left(t+\frac{\mu^2-\tau+k}{4t}\right)^2-\mu^2\right] \quad (9.8)$$

Докажем неравенство (9.8). Замечая, что функция

$$\frac{x}{\sqrt{x^2-\mu^2}}, \quad x>\mu \quad (10.8)$$

убывает с увеличением x, заключаем, что неравенство (9.8) достаточно доказать для того случая, когда величина

$$x=t+\frac{\mu^2-\tau+k}{4t}$$

принимает наименьшее значение, т.е. при $\tau=1$ и $t=\frac{\mu+1}{2}$. В силу сказанного неравенство (9.8) сводится к

$$\mu+\frac{k}{2\mu+2}+\sqrt{\frac{\mu k}{\mu+1}+\left(\frac{k}{2\mu+2}\right)^2}<4(\mu+1)^2$$

которое выполнено во всяком случае при $k\in[0,2\mu+2]$

Докажем первое из неравенств (8.8). В силу свойств функции (10.8) первое неравенство (8.8) достаточно доказать при $\tau=1$ и $t=\frac{\mu+1}{2}$. Это дает

$$\sqrt{\frac{\mu+1}{\mu k}}\left(\mu+\frac{k}{\mu+1}\right)+\frac{k}{4\mu(\mu+1)}<\frac{\mu+1}{\mu k}(2\mu+1)-2$$

которое будет удовлетворено при $\mu=7$ и $0\le k\le 2$

Докажем второе из неравенств (8.8). Введем функцию

$$f(t,\tau)=\frac{2}{k\mu}(\gamma^2-\tau)-\frac{1}{\mu+1}-\frac{1}{t}+\frac{1-\frac{\mu^2-\tau+k}{4t^2}}{\sqrt{\left(t+\frac{\mu^2-\tau+k}{4t}\right)^2-\mu^2}}$$

Необходимо доказать, что $f>0$ при всех $t \geq \frac{\mu+1}{2}$ и $\tau \leq 1$. Если

$$\tau \geq \mu^2+k-4t^2$$

то неравенство $f>0$ выполнено при $\mu=7$, $\gamma=2$ и $0 \leq k \leq 2$

Пусть теперь

$$\tau \leq \mu^2+k-4t^2$$

Имеем

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\frac{1-\frac{\mu^2-\tau+k}{4t^2}}{\sqrt{\left(t+\frac{\mu^2-\tau+k}{4t}\right)^2-\mu^2}}=\frac{1-\frac{\mu^2-\tau-k}{4t^2}}{2\left[\left(t+\frac{\mu^2-\tau+k}{4t}\right)^2-\mu^2\right]^{3/2}}\geq\frac{1-\frac{\mu^2}{4t^2}}{\left[\left(t+\frac{\mu^2-\tau+k}{4t}\right)^2-\mu^2\right]^{3/2}}>0$$

Поэтому

$$f(t,\tau)>\frac{2}{k\mu}\left(\gamma^2-\mu^2-k+4t^2\right)-\frac{1}{\mu+1}-\frac{2}{t}\geq\frac{2}{k\mu}\left(\gamma^2-k+2\mu+1\right)-\frac{5}{\mu+1}>0$$

9. Пусть теперь

$$\alpha^2N^2-\frac{k^2}{4t^2}\left(49+\frac{\alpha^2}{4}\right)\leq 0,\ \frac{7}{4}k\leq\alpha^2\leq 2+\frac{7}{4}k-\frac{k^2}{32}+\sqrt{4+7k-\frac{k^2}{16}-\frac{7}{64}k^3}=$$
$$=x_0$$

Представим векторы $\vec{K}_1$ и $\vec{K}_2$ в виде

$$\vec{K}_1=A(t;\alpha,\tau)\vec{e}_1+iC(t;\alpha,\tau)\vec{e}_2,\ \vec{K}_2=B(t;\alpha,\tau)\vec{e}_1+iC(t;\alpha,\tau)\vec{e}_2$$

Тогда в силу (I.8)

$$A^2-C^2=\left(t+\frac{49-\tau}{4t}\right)^2-49\geq 0,\quad B^2-C^2=\left(t+\frac{49-\tau+2k}{4t}\right)^2-49>0 \qquad (2.9)$$
$$A-B^2=\alpha^2+\frac{k^2}{4t^2};$$

Откуда получаем

$$A(t;\alpha,\tau)=\frac{k\left(1+\frac{49-\tau}{4t^2}\right)-\alpha^2}{2\sqrt{\alpha^2+\frac{k^2}{4t^2}}},\quad B(t;\alpha,\tau)=\frac{k\left(1+\frac{49-\tau+2k}{4t^2}\right)+\alpha^2}{2\sqrt{\alpha^2+\frac{k^2}{4t^2}}},$$

$$C(t;\alpha,\tau)=\frac{\sqrt{\frac{K^2}{4t^2}\left(49+\frac{\alpha^2}{4}\right)-\alpha^2N^2}}{\sqrt{\alpha^2+\frac{K^2}{4t^2}}} \qquad (3.9)$$

Воспользуемся следствием I к теореме 2. В силу (7.2) условия аналитичности примут следующий вид

$$\frac{K^2}{4t^2}\left(49+\frac{\alpha^2}{4}\right)-\alpha^2N^2<\left(\alpha^2+\frac{K^2}{4t^2}\right)\left(\frac{49-\tau}{4t}-t+2\right)\left(8-t-\frac{49-\tau}{4t}\right), \qquad (4.9)$$

$$\frac{K^2}{4t^2}\left(49+\frac{\alpha^2}{4}\right)-\alpha^2N^2<\left(\alpha^2+\frac{K^2}{4t^2}\right)\left(\frac{49-\tau+2K}{4t}-t+2\right)\left(8-t-\frac{49-\tau+2K}{4t}\right) \qquad (5.9)$$

Введем функцию

$$f(t,\tau,\alpha^2,\mu)=\left(1+\frac{K^2}{4t^2\alpha^2}\right)\left(\frac{49-\tau+\mu}{4t}-t+2\right)\left(8-t-\frac{49-\tau+\mu}{4t}\right)-$$

$$-\frac{K^2}{4t^2}\left(\frac{49}{\alpha^2}+\frac{1}{4}\right)+\left(t+\frac{49-\tau+K}{4t}\right)^2-49-\frac{\alpha^2}{4}$$

где μ изменяется в промежутке $[0,2K]$. Для доказательства неравенств (4.9) и (5.9) достаточно доказать неравенство $f>0$ при условиях (I.9), а также при всех t,τ и μ из промежутков $4\le t$, $V\le\tau\le 1$ и $0\le\mu\le 2K$. Имеем

$$\frac{\partial f}{\partial\tau}=-\frac{1}{2t}\left[t+\frac{49-\tau+K}{4t}+\left(1+\frac{K^2}{4t^2\alpha^2}\right)\left(3-\frac{49-\tau+\mu}{4t}\right)\right]\le$$

$$\le-\frac{1}{2t}\left(7-\frac{K}{4t}-\frac{K^2}{4t^2\alpha^2}\cdot\frac{49-\tau+2K}{4t}\right); \qquad (6.9)$$

Но из первого неравенства (I.9) получаем

$$\frac{49-\tau+2k}{4t} \le \sqrt{49+\frac{\alpha^2}{4}+\frac{k^2}{4t^2}\left(\frac{49}{\alpha^2}+\frac{1}{4}\right)}-t+\frac{k}{4t} < 7{,}2-t+\frac{k}{4t}, \quad t<4{,}6$$

Принимая во внимание (6.9), получаем отсюда $\frac{\partial f}{\partial \tau}>0$

Поэтому для доказательства (4.9) и (5.9) достаточно доказать неравенство $f(t,1,\alpha^2,\mu)>0$

Имеем

$$\frac{\partial f(t,1,\alpha^2,\mu)}{\partial \alpha^2}=-\frac{1}{4}+\frac{k^2}{4\alpha^4t^2}\left[1-\left(\frac{48+\mu}{4t}-t+2\right)\left(8-t-\frac{48+\mu}{4t}\right)\right]\le$$

$$\le -\frac{1}{4}+\frac{k^2}{4\alpha^4t^2}<0$$

Следовательно, осталось доказать неравенство $f(t,1,x_0,\mu)>0$ где x_0 определяется формулой (I.9)

Принимая во внимание неравенства

$$f(4,1,x_0,\mu)=\left(1+\frac{k^2}{64x_0}\right)\left(1-\frac{\mu^2}{256}\right)-\frac{k^2}{64}\left(\frac{49}{x_0}+\frac{1}{4}\right)+\left(7+\frac{k}{16}\right)^2-49-\frac{x_0}{4}\geqslant$$

$$\geqslant\left(1+\frac{k^2}{64x_0}\right)\left(1-\frac{k^2}{64}\right)-\frac{49k^2}{64x_0}+\frac{7k}{8}-\frac{x_0}{4}=0$$

$$\frac{\partial f(t,1,x_0,\mu)}{\partial t}=4t-10-\frac{144-3\mu}{2t^2}+\frac{k^2}{4t^2x_0}\left[-5+\frac{3t}{2}+\frac{33+x_0}{2t}-\right.$$

$$\left.-\frac{9(48+\mu)}{4t^2}+\frac{5(48+\mu)^2}{32t^3}\right]>0$$

заключаем, что $f>0$, кроме точки $t=4,\ \tau=1,\ \alpha^2=x_0$ и $\mu=2k$, где $f(4,1,x_0,2k)=0$

Однако, если обратиться к определению области G в теореме 2, то увидим, что точка K_2 (см. (I.8)), соответствующая параметрам $t=4$, $\tau=1$, $\alpha^2=\varkappa_0$ и $0 \le k \le 2$, вместе с некоторой своей окрестностью будут принадлежать области G_4.

Этим заканчивается доказательство того, что область (9.I) есть область аналитичности.

Пользуясь случаем, выражаю благодарность Н.Н. Боголюбову и А.А. Логунову за ценные обсуждения результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н.Н. Боголюбов и Д.В. Ширков, Введение в теорию квантованных полей, Гостехиздат, 1957.
2. Н.Н. Боголюбов, Б.В. Медведев и М.К. Поливанов, Вопросы теории дисперсионных соотношений, 1958.
3. Н.Н. Боголюбов и В.С. Владимиров, Об аналитическом продолжении обобщенных функций, Изв. Ак. Наук СССР, серия математич., 1958.
4. С. Бохнер и У.Т. Мартин, Функции многих комплексных переменных, ИИЛ, 1951.
5. А.А. Логунов и П.С. Исаев, К теории дисперсионных соотношений для рассеяния γ -квантов на нуклонах, Nuovo Cimento (в печати), 1958.
6. H.J. Bremermann, R. Oehme and J.G. Taylor, A Proof of Dispersion Relations in Quantized Field Theories (1957), стр. 1-26 , A.1-A.10.
7. А.А. Логунов , К теории дисперсионных соотношений для виртуальных процессов , Nuclear Physics (в печати), 1958г.