

С323.4
Ф-181

14/1111-65

ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

P-2219

Дубна



ЛАБОРАТОРИЯ ГЕОРЕИТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Д.Г. Факиров

БАРИОННЫЕ И МЕЗОННЫЕ МУЛЬТИПЛЕТЫ
В ГРУППЕ $SU(12)$, ОБЪЕДИНЯЮЩЕЙ
СИМПЛЕКТИЧЕСКУЮ И СПИНОВУЮ СИММЕТРИИ

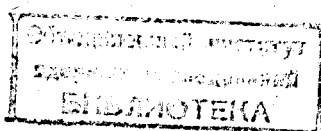
1965

P-2219

Д.Г. Факиров

БАРИОННЫЕ И МЕЗОННЫЕ МУЛЬТИПЛЕТЫ
В ГРУППЕ $SU(12)$, ОБЪЕДИНЯЮЩЕЙ
СИМПЛЕКТИЧЕСКУЮ И СПИНОВУЮ СИММЕТРИИ

mp. 3445/2



Ниже приводятся главным образом таблицы квантовых чисел компонент мультиплетов барионов (симметричный по всем трем индексам тензор), составляющие 364-плет группы $SU(12)$, полученной как объединение симплектической группы $Sp(6)$ (дополненной до $SU(6)$ и группы обычного спина $SU(2)$) и таблицы компонент мультиплетов мезонов (тензор с одним верхним и одним нижним значком и со шпуром, равным нулю), составляющие 143-плет той же $SU(12)$ группы. Объединенная таким образом группа $SU(12)$ обсуждается подробно в работе ^{/1/}. В группе $Sp(6)$, которая рассмотрена в работах ^{/2,3,4/}, частицы обладают новым квантовым числом Z , являющимся собственным значением оператора

$$\hat{Z}_b^a = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 (\delta_i^a \delta_b^i - \delta_{i+3}^a \delta_b^{i+3}) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где $a, b = 1, 2, \dots, 6$ - симплектические индексы.

Заряд частиц определяется по формуле

$$Q = I_3 + \frac{1}{2}(Y + B - Z) = I_3 + \frac{1}{2}(B + S), \quad (2)$$

в которой $S = Y - Z$ - странность, B - барионное число, Y - гиперзаряд, I_3 - третья компонента изотопического спина. Барионное число в группе $Sp(6)$ не входит и задается типом трионов, составляющих мультиплет, а Y и I_3 определены в ^{/2/} как

$$Y_{SU(3)} \times \sigma_3 = Y_{Sp(6)}; \quad I_{3SU(3)} \times \sigma_3 = I_{3Sp(6)}; \quad (3)$$

$$\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что прямое умножение на паулевскую матрицу σ_3 в (3) не связано с третьей проекцией обычного спина, который в $Sp(6)$ не содержится. На практике приходится пользоваться еще квадратичным оператором Казимира $C_2^{(3)}$ группы $SU(3)$

$$C_2^{(3)} = \frac{3}{2} Y^2 + 2 I_3(I_3 + 1) + K_+ K_- + K_- K_+ + L_+ L_- + L_- L_+ \quad (4)$$

Этот оператор строится как шпур квадрата генераторной матрицы $SU(3)$ /5,8/, которая в данном случае имеет вид:

$$A_B^A = \begin{pmatrix} I_3 + \frac{1}{2} Y & I_- & K_- \\ I_+ & -I_3 + \frac{1}{2} Y & L_- \\ K_+ & L_+ & -Y \end{pmatrix} \quad (5)$$

Элементы матрицы A_B^A надо брать из группы $Sp(6)$.

Частицы классифицируются по аддитивному в $Sp(6)$ квантовому числу Z , по квадратичному оператору Казимира группы $SU(3)$ $C_2^{(3)}$ и по квантовым числам Y, I_3, I , которые имеют соответствующие аналоги и в $SU(3)$. При вычислении I (точнее $I^2 = I_1^2 + I_2^2 + I_3^2$) необходимо иметь I_1 и I_2 , которые определяются аналогично I_3 (см. формулу (3)).

Так как мультиплеты барионов и мезонов принадлежат группе $SU(12) \rightarrow Sp(6) \times SU(2)$ ($SU(2)$ - спиновая), то частицы, естественно, обладают полным спином S и третьей проекцией спина S_3 так же, как и в $SU(6)$ /8/.

Барионы

Рассмотрим сначала мультиплет барионов

$$\Psi^{ABC} = \Psi^{\alpha a, \beta b, \gamma c} \quad (A, B, C = 1, 2, \dots, 12; \alpha, \beta, \gamma = 1, 2, \dots)$$

... 8 - симплектические (или унитарные) индексы; $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2$ - спиновые индексы). Он составляет 364-плет группы $SU(12)$ в силу своей симметрии по трем простым индексам A, B, C (или все равно по трем тензорным (парным) индексам $\alpha a, \beta b, \gamma c$). Два из индексов тензора Ψ^{ABC} относятся к трионам с барионным числом $B=1$, а третий - к триону с $B=-1$, так что точнее можно было бы написать $\Psi^{\overline{ABC}}$, например, где индекс с чертой над ним относится к

триону с $B=-1$. Трион с чертой над индексом во всем остальном имеет свойства обычного триона и поэтому мультиплет барионов сохраняет все свои свойства за исключением того, что у всех его компонент барионный заряд уже равен единице, как должно и быть. Вопрос о том, как включить барионный заряд в группу, здесь не обсуждается.

Для большей компактности записи введем несколько обозначений и запишем некоторые полезные для дальнейшего рассмотрения соотношения

$$\Phi_{(3)}^{abc} = 2\Psi^{1a, 1b, 2c} - \Psi^{1b, 1c, 2a} - \Psi^{1a, 1c, 2b} \quad (6)$$

$$\Phi_{(-3)}^{abc} = 2\Psi^{2a, 2b, 1c} - \Psi^{2b, 2c, 1a} - \Psi^{2a, 2c, 1b} \quad (7)$$

$$\Phi_{(3)}^{aab} = \Psi^{1a, 1a, 2b} - \Psi^{1b, 1a, 2a} \quad (8)$$

$$\Phi_{(-3)}^{aab} = \Psi^{2a, 2a, 1b} - \Psi^{2b, 2a, 1a} \quad (9)$$

$$\chi_{(3/2)}^{abc} = \Psi^{1a, 1b, 1c} \quad (10)$$

$$\chi_{(3/2)}^{abc} = \Psi^{1a, 1b, 2c} + \Psi^{1b, 1c, 2a} + \Psi^{1a, 1c, 2b} \quad (11)$$

$$\chi_{(-3/2)}^{abc} = \Psi^{2a, 2b, 1c} + \Psi^{2b, 2c, 1a} + \Psi^{2a, 2c, 1b} \quad (12)$$

$$\chi_{(-3/2)}^{abc} = \Psi^{2a, 2b, 2c} \quad (13)$$

причем

$$\Phi_{(+3/2)}^{aab} = -\Phi_{(+3/2)}^{baa} \quad (14)$$

$$\Phi_{(+3/2)}^{abc} = \Phi_{(+3/2)}^{bac} \quad (15)$$

$$\Phi_{(+\frac{1}{2})}^{abc} + \Phi_{(+\frac{1}{2})}^{boa} + \Phi_{(+\frac{1}{2})}^{cab} = 0 \quad (16)$$

$$\Psi_{ABC} = \Psi_{BCA} = \Psi_{CAB} = \Psi_{ACB} = \Psi_{CBA} = \Psi_{BAC} \quad (17)$$

Соотношения (8), (9) и (14-16) легко получить, имея в виду (6) и (7). Нижние значки $(+\frac{1}{2}), (+\frac{3}{2})$ во всех формулах (6-16) указывают на проекцию обычного спина данной компоненты мультиплетта. Пространство каждого из тензоров $\Phi_{(+\frac{1}{2})}^{abc}$ (их, очевидно, два) имеет размерность 70, а пространство тензоров $\chi_{(+\frac{1}{2}), (+\frac{3}{2})}^{abc}$ (их четыре) имеет размерность 56. Ясно, что эти подпространства 364-плетта относятся к отдельным проекциям обычного спина. Из каждого 70 плета (в $SU(6)$) $\Phi_{(+\frac{1}{2})}^{abc}$ строится 64-плет и 6 плет в $Sp(6)$. $SU(6)$ 56-плеты $\chi_{(+\frac{1}{2}), (+\frac{3}{2})}^{abc}$ являются неприводимыми в $Sp(6)$. Все эти неприводимые в $Sp(6)$ представления разлагаются дальше на S_3 -субмультиплеты по схемам (у представления с чертой над цифрой Z имеет противоположный знак)

$$\begin{aligned} \underline{6} &= \overline{3} + \overline{3} \\ \underline{56} &= \overline{3} + \overline{10} + \overline{15} + \overline{15} + \overline{10} + \overline{3} \\ \underline{64} &= \overline{3} + \overline{6} + \overline{8} + \overline{15} + \overline{8} + \overline{6} + \overline{3}, \end{aligned} \quad (18)$$

причем каждый из них имеет определенное собственное значение операторов Z и $C_2^{(3)}$.

Отметим еще, что операторы $I_{\pm} = (I_1 \pm iI_2)$, $K_{\pm} = (K_1 \pm iK_2)$, $L_{\pm} = (L_1 \pm iL_2)$, входящие в выражение для $C_2^{(3)}$, действуют на функции $\Phi_{(+\frac{1}{2})}^{abc}$ в принципе так же, как и на $\Psi^{a\alpha, \beta\gamma, \gamma\alpha}$, только надо иметь в виду следующие особенности:

а) Когда при действии на $\Phi_{(+\frac{1}{2})}^{abc}$ ($a/b \neq c$), получим $a=b$ вместо $\Phi_{(+\frac{1}{2})}^{aac}$, то надо писать $2\Phi_{(+\frac{1}{2})}^{aac}$; если получим $a=c$ или $b=c$, пишем просто

$$\Phi_{(+\frac{1}{2})}^{aba} \quad \text{или} \quad \Phi_{(+\frac{1}{2})}^{abb}$$

б) Действуя на $\Phi_{(+\frac{1}{2})}^{abc}$, мы учитываем индекс a только один раз и пишем $\Phi_{(+\frac{1}{2})}^{abc}$ (значок a при действии соответствующего оператора перешел в b).

в) Если встречаются функции типа $\Phi_{(+\frac{1}{2})}^{abc} = \Phi_{(+\frac{1}{2})}^{baa}$, записываем их в виде $\Phi_{(+\frac{1}{2})}^{aab}$ при помощи равенства (14). При этом повторяющиеся симплектические индексы становятся равноправными, ибо спиновые индексы a, β, γ расположены в фиксированном порядке (1,1,2 для $s_3 = +\frac{1}{2}$ и 2,1 для $s_3 = -\frac{1}{2}$), а приведенное правило б) для действия операторов $I_{\pm}, K_{\pm}, L_{\pm}$ на повторяющиеся индексы имеет место для принятого нами порядка спиновых значков.

Эти правила не относятся к функциям $\chi_{(+\frac{1}{2}), (+\frac{3}{2})}^{abc}$, так как последние обладают полной симметрией по всем трем симплектическим и спиновым индексам в силу "большой" симметрии 364-компонентного тензора Ψ^{ABC} (см. равенство (17)).

Имея в виду соотношение (16), легко записать компоненты двух $SU(6)$ 70-плетов. В качестве примера приведем первые 10 компонент 70-плета с третьей проекцией обычного спина $S_3 = \frac{1}{2}$.

1. $\Phi_{(+\frac{1}{2})}^{112} = \Psi^{11, 11, 22} - \Psi^{12, 11, 21}$
2. $\Phi_{(+\frac{1}{2})}^{113} = \Psi^{11, 11, 23} - \Psi^{13, 11, 21}$
3. $\Phi_{(+\frac{1}{2})}^{114} = \Psi^{11, 11, 24} - \Psi^{14, 11, 21}$
4. $\Phi_{(+\frac{1}{2})}^{115} = \Psi^{11, 11, 25} - \Psi^{15, 11, 21}$
5. $\Phi_{(+\frac{1}{2})}^{116} = \Psi^{11, 11, 26} - \Psi^{16, 11, 21}$
6. $\Phi_{(+\frac{1}{2})}^{122} = \Psi^{11, 12, 22} - \Psi^{12, 12, 21}$
7. $\Phi_{(+\frac{1}{2})}^{123} = 2\Psi^{11, 12, 23} - \Psi^{11, 13, 22} - \Psi^{12, 13, 21}$
8. $\Phi_{(+\frac{1}{2})}^{132} = 2\Psi^{11, 13, 22} - \Psi^{11, 12, 23} - \Psi^{12, 13, 21}$
9. $\Phi_{(+\frac{1}{2})}^{124} = 2\Psi^{11, 12, 24} - \Psi^{11, 14, 22} - \Psi^{12, 14, 21}$
10. $\Phi_{(+\frac{1}{2})}^{142} = 2\Psi^{11, 14, 22} - \Psi^{11, 12, 24} - \Psi^{12, 14, 21}$

Аналогично можно записать все компоненты рассматриваемого 364-плета барионов, но мы этого не будем делать, а приведем прямо часть его $SU(3)$ субмультиплетов. Далее следуют таблицы $SU(3)$ - субмультиплетов барионного 364-плета. Они содержат только компоненты соответствующих субмультиплетов с максимальной проекцией обычного спина - для остальных проекций все можно получить просто заменой спинового (нижнего) значка.

Таблица I

Октет обычных барионов с $Z = I$

($S = \frac{1}{2}, S_3 = \frac{1}{2}$)

Волновая функция	Частица	I	I_3	Y	S
1. $\Phi_{\left(\frac{1}{2}\right)}^{112}$	p	1/2	1/2	1	0
2. $\Phi_{\left(\frac{1}{2}\right)}^{122}$	n	1/2	-1/2	1	0
3. $\Phi_{\left(\frac{1}{2}\right)}^{123} + 2\Phi_{\left(\frac{1}{2}\right)}^{132}$	Λ	0	0	0	-1
4. $\Phi_{\left(\frac{1}{2}\right)}^{113}$	Σ^+	1	1	0	-1
5. $\Phi_{\left(\frac{1}{2}\right)}^{123}$	Σ^0	1	0	0	-1
6. $\Phi_{\left(\frac{1}{2}\right)}^{223}$	Σ^-	1	-1	0	-1
7. $\Phi_{\left(\frac{1}{2}\right)}^{133}$	Ξ^0	1/2	1/2	-1	-2
8. $\Phi_{\left(\frac{1}{2}\right)}^{233}$	Ξ^-	1/2	-1/2	-1	-2

Приведем для этого октета в качестве примера нормированные волновые функции. Мы получим их, принимая, например, что

$$|\Psi_{\left(\frac{1}{2}\right)}^{ABC2}\rangle = \begin{cases} 1 & \text{если } A \neq B \neq C \\ 2 & \text{если } A = B \neq C, A \neq B = C, \\ & A = C \neq B \\ 6 & \text{если } A = B = C. \end{cases}$$

В таком случае

$$p = \frac{1}{\sqrt{3}} (\Psi^{11,11,22} - \Psi^{11,12,21})$$

$$n = \frac{1}{\sqrt{3}} (\Psi^{11,12,22} - \Psi^{12,12,21})$$

$$\Lambda = \frac{1}{\sqrt{2}} (\Psi^{11,13,22} - \Psi^{12,13,21})$$

$$\Sigma = \frac{1}{\sqrt{3}} (\Psi^{11,11,23} - \Psi^{11,13,21})$$

$$\Sigma^0 = \frac{1}{\sqrt{6}} (2\Psi^{11,12,23} - \Psi^{11,13,22} - \Psi^{12,13,21})$$

$$\Sigma^- = \frac{1}{\sqrt{3}} (\Psi^{12,12,23} - \Psi^{12,13,22})$$

$$\Xi^0 = \frac{1}{\sqrt{3}} (\Psi^{11,13,23} - \Psi^{13,13,21})$$

$$\Xi^- = \frac{1}{\sqrt{3}} (\Psi^{12,13,23} - \Psi^{13,13,22})$$

При написании этих волновых функций мы, однако, не учли $Sp(6)$ структуру барионов, о которой говорилось выше. Для получения правильно нормированных волновых функций, в которых содержалось бы и нужное барионное число, можно поступить следующим образом. Поставим над каким-нибудь из индексов черту (у соответствующего триона $B = -1$) и произведем симметризацию по этому индексу. При этой операции 364-plet рассматриваемой $SU(12)$ группы, конечно, не разрушится, так как у помеченного чертой индекса все квантовые числа, кроме B , такие же как и у обычного триона (без черты). Если примем, как и выше (причем надо считать, что $\bar{A} \neq A$),

$$|\Psi_{\left(\frac{1}{2}\right)}^{\bar{A}BC}\rangle = \begin{cases} 1 & B \neq C \\ 2 & B = C \end{cases}$$

получим следующие нормированные волновые функции обычных барионов в $Sp(6)$:

$$p = \frac{1}{3} (2 \Psi^{11, 1\bar{1}, 2\bar{2}} + \Psi^{11, 11, 2\bar{2}} - \Psi^{1\bar{1}, 1\bar{2}, 21} - \Psi^{11, 1\bar{2}, 21} - \Psi^{11, 12, 2\bar{1}})$$

$$n = \frac{1}{3} (2 \Psi^{12, 1\bar{2}, 21} + \Psi^{12, 12, 2\bar{1}} - \Psi^{11, 12, 2\bar{2}} - \Psi^{11, 1\bar{2}, 22} - \Psi^{11, 12, 2\bar{2}})$$

$$\Lambda = \frac{1}{\sqrt{6}} (\Psi^{1\bar{1}, 1\bar{3}, 2\bar{2}} + \Psi^{11, 1\bar{3}, 2\bar{2}} + \Psi^{11, 1\bar{3}, 2\bar{2}} - \Psi^{1\bar{2}, 1\bar{3}, 21} - \Psi^{12, 1\bar{3}, 21} - \Psi^{12, 1\bar{3}, 2\bar{1}})$$

$$\Sigma^+ = \frac{1}{3} (2 \Psi^{11, 1\bar{1}, 2\bar{3}} + \Psi^{11, 11, 2\bar{3}} - \Psi^{1\bar{1}, 1\bar{3}, 21} - \Psi^{11, 1\bar{3}, 21} - \Psi^{11, 1\bar{3}, 2\bar{1}})$$

$$\Sigma^0 = \frac{1}{3\sqrt{2}} (2 \Psi^{1\bar{1}, 1\bar{2}, 2\bar{3}} + 2 \Psi^{11, 1\bar{2}, 2\bar{3}} + 2 \Psi^{11, 12, 2\bar{3}} - \Psi^{1\bar{1}, 1\bar{3}, 2\bar{2}} - \Psi^{11, 1\bar{3}, 2\bar{2}} - \Psi^{11, 1\bar{3}, 2\bar{2}} - \Psi^{1\bar{2}, 1\bar{3}, 21} - \Psi^{12, 1\bar{3}, 21} - \Psi^{11, 1\bar{3}, 2\bar{1}})$$

$$\Sigma^- = \frac{1}{3} (2 \Psi^{12, 1\bar{2}, 2\bar{3}} + \Psi^{12, 12, 2\bar{3}} - \Psi^{1\bar{2}, 1\bar{3}, 2\bar{2}} - \Psi^{12, 1\bar{3}, 2\bar{2}} - \Psi^{12, 1\bar{3}, 2\bar{2}})$$

$$\Xi^0 = \frac{1}{3} (2 \Psi^{1\bar{3}, 1\bar{3}, 21} + \Psi^{1\bar{3}, 1\bar{3}, 2\bar{1}} - \Psi^{1\bar{1}, 1\bar{3}, 2\bar{3}} - \Psi^{11, 1\bar{3}, 2\bar{3}} - \Psi^{11, 1\bar{3}, 2\bar{3}})$$

$$\Xi^- = \frac{1}{3} (2 \Psi^{1\bar{3}, 1\bar{3}, 2\bar{2}} + \Psi^{1\bar{3}, 1\bar{3}, 2\bar{2}} - \Psi^{1\bar{2}, 1\bar{3}, 2\bar{3}} - \Psi^{12, 1\bar{3}, 2\bar{3}} - \Psi^{12, 1\bar{3}, 2\bar{3}})$$

Мы могли бы выбрать условие нормировки в виде:

$$|\Psi^{ABC}|^2 = \frac{1}{6} (1 + \delta^{BC}),$$

как это сделано в [1], что приведет только к изменению общих числовых множителей в волновых функциях, а это несущественно. (Примечание к табл. II: значок " - " над данным символом означает не античастицу соответствующей частицы, а другую частицу. У анти-частиц в $Sp(6)$, как и во всех группах, все аддитивные квантовые числа, а не только

Таблица II

Октет барионов с $z = -1$
($S = \frac{1}{2}, S_3 = \frac{1}{2}$)

Волновая функция	Частица	I	I ₃	Y	S
1. $\Phi_{\frac{1}{2}}^{455}$	\bar{p}	I/2	I/2	-1	0
2. $\Phi_{\frac{1}{2}}^{445}$	\bar{n}	I/2	-I/2	-1	0
3. $\Phi_{\frac{1}{2}}^{455} + 2\Phi_{\frac{1}{2}}^{455}$	$\bar{\Lambda}^+$	0	0	0	I
4. $\Phi_{\frac{1}{2}}^{440}$	$\bar{\Sigma}^0$	I	-I	0	I
5. $\Phi_{\frac{1}{2}}^{455}$	$\bar{\Sigma}^+$	I	0	0	I
6. $\Phi_{\frac{1}{2}}^{555}$	$\bar{\Sigma}^+$	I	I	0	I
7. $\Phi_{\frac{1}{2}}^{555}$	$\bar{\Xi}^+$	I/2	I/2	I	2
8. $\Phi_{\frac{1}{2}}^{455}$	$\bar{\Xi}^+$	I/2	-I/2	I	2

Z и Y должны иметь обратные знаки, что в случае таблицы II не так: у \bar{p} заряд равен +1 у \bar{n} - нулю, а заряды остальных частиц указаны значками "0" и "+". Отметим еще, что для выписанных двух октетов нам не понадобилось использовать оператор Казимира $C_2^{(3)}$.

Таблица III

Триплет барионов с $z = 1/3$ и $C_2^{(3)} = \frac{8}{3}$
($S = \frac{1}{2}, S_3 = \frac{1}{2}$)

Волновая функция	Q	I	I ₃	Y	S
1. $\Phi_{\frac{1}{2}}^{135} + \Phi_{\frac{1}{2}}^{125} + 2\Phi_{\frac{1}{2}}^{114}$	I	I/2	I/2	I/3	0
2. $\Phi_{\frac{1}{2}}^{235} + \Phi_{\frac{1}{2}}^{124} + 2\Phi_{\frac{1}{2}}^{225}$	0	I/2	-I/2	I/3	0
3. $\Phi_{\frac{1}{2}}^{134} + \Phi_{\frac{1}{2}}^{235} + \Phi_{\frac{1}{2}}^{336}$	0	0	0	-2/3	-I

Таблица IV
Триплет барионов с $z = -1/3$ и $c_2^{(3)} = \frac{8}{3}$
($s = \frac{1}{2}, s_3 = \frac{1}{2}$)

Волновая функция	Q	I	I ₃	Y	S
1. $\Phi_{\frac{1}{2}}^{264} + \Phi_{\frac{1}{2}}^{348} + \Phi_{\frac{1}{2}}^{254} + \Phi_{\frac{1}{2}}^{248} + 2\Phi_{\frac{1}{2}}^{144}$	0	1/2	-1/2	-1/3	0
2. $\Phi_{\frac{1}{2}}^{388} + \Phi_{\frac{1}{2}}^{358} + \Phi_{\frac{1}{2}}^{134} + \Phi_{\frac{1}{2}}^{148} + 2\Phi_{\frac{1}{2}}^{288}$	I	1/2	1/2	-1/3	0
3. $\Phi_{\frac{1}{2}}^{184} + \Phi_{\frac{1}{2}}^{148} + \Phi_{\frac{1}{2}}^{288} + \Phi_{\frac{1}{2}}^{258} + 2\Phi_{\frac{1}{2}}^{368}$	I	0	0	2/3	I

Таблица V
Секстет барионов с $z = 1/3$ и $c_2^{(3)} = \frac{20}{2}$
($s = \frac{1}{2}, s_3 = \frac{1}{2}$)

Волновая функция	Q	I	I ₃	Y	S
1. $\Phi_{\frac{1}{2}}^{188} + 2\Phi_{\frac{1}{2}}^{188}$	I	I	I	-2/3	-I
2. $\Phi_{\frac{1}{2}}^{288} - \Phi_{\frac{1}{2}}^{184} + 2(\Phi_{\frac{1}{2}}^{258} - \Phi_{\frac{1}{2}}^{148})$	0	I	0	-2/3	-I
3. $\Phi_{\frac{1}{2}}^{234} + 2\Phi_{\frac{1}{2}}^{248}$	-I	I	-I	-2/3	-I
4. $\Phi_{\frac{1}{2}}^{188} - \Phi_{\frac{1}{2}}^{128} + 2(\Phi_{\frac{1}{2}}^{188} - \Phi_{\frac{1}{2}}^{152})$	I	1/2	1/2	1/3	0
5. $\Phi_{\frac{1}{2}}^{288} - \Phi_{\frac{1}{2}}^{124} + 2(\Phi_{\frac{1}{2}}^{268} - \Phi_{\frac{1}{2}}^{241})$	0	1/2	-1/2	1/3	0
6. $\Phi_{\frac{1}{2}}^{128} + 2\Phi_{\frac{1}{2}}^{162}$	I	0	0	4/3	I

Таблица VI
Секстет барионов с $z = -1/3$ и $c_2^{(3)} = \frac{20}{3}$
($s = \frac{1}{2}, s_3 = \frac{1}{2}$)

Волновая функция	Q	I	I ₃	Y	S
1. $\Phi_{\frac{1}{2}}^{264} - \Phi_{\frac{1}{2}}^{248}$	0	I	-I	2/3	I
2. $\Phi_{\frac{1}{2}}^{184} - \Phi_{\frac{1}{2}}^{148} + \Phi_{\frac{1}{2}}^{268} - \Phi_{\frac{1}{2}}^{258}$	I	I	0	2/3	I
3. $\Phi_{\frac{1}{2}}^{188} - \Phi_{\frac{1}{2}}^{158}$	2	I	I	2/3	I
4. $\Phi_{\frac{1}{2}}^{234} - \Phi_{\frac{1}{2}}^{248} + \Phi_{\frac{1}{2}}^{348} - \Phi_{\frac{1}{2}}^{364}$	0	1/2	-1/2	-1/3	0
5. $\Phi_{\frac{1}{2}}^{148} - \Phi_{\frac{1}{2}}^{154} + \Phi_{\frac{1}{2}}^{388} - \Phi_{\frac{1}{2}}^{388}$	I	1/2	+1/2	-1/3	0
6. $\Phi_{\frac{1}{2}}^{348} - \Phi_{\frac{1}{2}}^{364}$	0	0	0	-4/3	-I

Таблица VII
15-плет барионов с $z = 1/3$ и $c_2^{(3)} = \frac{32}{3}$
($s = \frac{1}{2}, s_3 = \frac{1}{2}$)

Волновая функция	Q	I	I ₃	Y	S
1. $\Phi_{\frac{1}{2}}^{155}$	2	3/2	3/2	1/3	0
2. $\Phi_{\frac{1}{2}}^{125} - \Phi_{\frac{1}{2}}^{114}$	I	3/2	1/2	1/3	0
3. $\Phi_{\frac{1}{2}}^{225} - \Phi_{\frac{1}{2}}^{124}$	0	3/2	-1/2	1/3	0
4. $\Phi_{\frac{1}{2}}^{224}$	-I	3/2	-3/2	1/3	0
5. $\Phi_{\frac{1}{2}}^{116}$	2	I	I	4/3	I
6. $\Phi_{\frac{1}{2}}^{128}$	I	I	0	4/3	I
7. $\Phi_{\frac{1}{2}}^{226}$	0	I	-I	4/3	I
8. $\Phi_{\frac{1}{2}}^{188}$	I	I	I	-2/3	-I
9. $\Phi_{\frac{1}{2}}^{284} - \Phi_{\frac{1}{2}}^{184}$	0	I	0	-2/3	-I
10. $\Phi_{\frac{1}{2}}^{284}$	-I	I	-I	-2/3	-I
11. $\Phi_{\frac{1}{2}}^{388}$	0	1/2	1/2	-5/3	-2
12. $\Phi_{\frac{1}{2}}^{384}$	-I	1/2	-1/2	-5/3	-2
13. $\Phi_{\frac{1}{2}}^{125} + 2\Phi_{\frac{1}{2}}^{114} - 3\Phi_{\frac{1}{2}}^{136}$	I	1/2	1/2	1/3	0
14. $\Phi_{\frac{1}{2}}^{124} + 2\Phi_{\frac{1}{2}}^{225} - 3\Phi_{\frac{1}{2}}^{226}$	0	1/2	-1/2	1/3	0
15. $\Phi_{\frac{1}{2}}^{184} + \Phi_{\frac{1}{2}}^{285} - 2\Phi_{\frac{1}{2}}^{388}$	0	0	0	-2/3	-I

Таблица УШ
 I5-плет барионов с $z = -1/3$ и $c_2^{(3)} = \frac{32}{3}$
 ($s = \frac{1}{2}, s_3 = \frac{1}{2}$)

Волновая функция	Q	I	I ₃	Y	S
1. $\Phi_{\frac{1}{2}}^{244}$	-1	3/2	-3/2	-1/3	0
2. $\Phi_{\frac{1}{2}}^{144} + \Phi_{\frac{1}{2}}^{452}$	0	3/2	-1/2	-1/3	0
3. $\Phi_{\frac{1}{2}}^{255} + \Phi_{\frac{1}{2}}^{451}$	1	3/2	1/2	-1/3	0
4. $\Phi_{\frac{1}{2}}^{155}$	2	3/2	3/2	-1/3	0
5. $\Phi_{\frac{1}{2}}^{344}$	-1	1	-1	-4/3	-1
6. $\Phi_{\frac{1}{2}}^{554} + \Phi_{\frac{1}{2}}^{346}$	0	1	0	-4/3	-1
7. $\Phi_{\frac{1}{2}}^{355}$	1	1	1	-4/3	-1
8. $\Phi_{\frac{1}{2}}^{246} + \Phi_{\frac{1}{2}}^{264}$	0	1	-1	2/3	1
9. $\Phi_{\frac{1}{2}}^{146} + \Phi_{\frac{1}{2}}^{164} - (\Phi_{\frac{1}{2}}^{255} + \Phi_{\frac{1}{2}}^{255})$	1	1	0	2/3	1
10. $\Phi_{\frac{1}{2}}^{155} + \Phi_{\frac{1}{2}}^{155}$	2	1	1	2/3	1
11. $\Phi_{\frac{1}{2}}^{266}$	1	1/2	+1/2	5/3	2
12. $\Phi_{\frac{1}{2}}^{166}$	2	1/2	+1/2	5/3	2
13. $\Phi_{\frac{1}{2}}^{254} + \Phi_{\frac{1}{2}}^{245} + 2\Phi_{\frac{1}{2}}^{144} - 2(\Phi_{\frac{1}{2}}^{364} + \Phi_{\frac{1}{2}}^{346})$	0	1/2	-1/2	-1/3	0
14. $\Phi_{\frac{1}{2}}^{154} + \Phi_{\frac{1}{2}}^{145} + 2\Phi_{\frac{1}{2}}^{255} - 3(\Phi_{\frac{1}{2}}^{355} + \Phi_{\frac{1}{2}}^{355})$	1	1/2	+1/2	-1/3	0
15. $\Phi_{\frac{1}{2}}^{164} + \Phi_{\frac{1}{2}}^{146} + \Phi_{\frac{1}{2}}^{256} + \Phi_{\frac{1}{2}}^{255} - 2\Phi_{\frac{1}{2}}^{366}$	1	0	0	2/3	1

Приведенные до сих пор восемь SU(3) субмультиплетов барионов образуют мультиплет группы Sp(6) размерности 64. Для барионов с $Z = +1$, как уже было отмечено, не понадобилось использовать квадратичный оператор Казимира $C_2^{(3)}$ — одного только Z оказалось достаточно для идентификации соответствующих октетов. Из SU(6) — семидесятка барионов выделяется прямым способом неприводимое в Sp(6) представление размерности 6. Этот Sp(6) — секстет разбивается далее на два SU(3) субмультиплета, которые приведены в таблицах IX и X.

Таблица IX
 Триплет барионов с $z = 1/3$ ($c_2^{(3)} = 8/3$,
 $s = 1/2, s_3 = 1/2$, не входящий в Sp(6) 64-плет

Волновая функция	Q	I	I ₃	Y	S
1. $3\Phi_{\frac{1}{2}}^{114} + \Phi_{\frac{1}{2}}^{125} + \Phi_{\frac{1}{2}}^{166} - \Phi_{\frac{1}{2}}^{163} - \Phi_{\frac{1}{2}}^{152}$	1	1/2	1/2	1/3	0
2. $3\Phi_{\frac{1}{2}}^{225} + \Phi_{\frac{1}{2}}^{124} + \Phi_{\frac{1}{2}}^{236} - \Phi_{\frac{1}{2}}^{263} - \Phi_{\frac{1}{2}}^{241}$	0	1/2	-1/2	1/3	0
3. $3\Phi_{\frac{1}{2}}^{336} + \Phi_{\frac{1}{2}}^{143} + \Phi_{\frac{1}{2}}^{253} + 2(\Phi_{\frac{1}{2}}^{134} + \Phi_{\frac{1}{2}}^{285})$	0	0	0	-2/3	0

Таблица X
 Триплет барионов с $z = -1/3$ ($c_2^{(3)} = 8/3, s = 1/2, s_3 = 1/2$),
 не входящий в Sp(6) 64-плет

Волновая функция	Q	I	I ₃	Y	S
1. $3\Phi_{\frac{1}{2}}^{144} + \Phi_{\frac{1}{2}}^{425} + \Phi_{\frac{1}{2}}^{436} - \Phi_{\frac{1}{2}}^{452} - \Phi_{\frac{1}{2}}^{463}$	0	1/2	-1/2	-1/3	0
2. $3\Phi_{\frac{1}{2}}^{255} + \Phi_{\frac{1}{2}}^{134} + \Phi_{\frac{1}{2}}^{356} - \Phi_{\frac{1}{2}}^{451} - \Phi_{\frac{1}{2}}^{568}$	1	1/2	1/2	-1/3	0
3. $3\Phi_{\frac{1}{2}}^{366} + \Phi_{\frac{1}{2}}^{164} + \Phi_{\frac{1}{2}}^{265} - \Phi_{\frac{1}{2}}^{461} - \Phi_{\frac{1}{2}}^{562}$	1	0	0	2/3	1

Таким образом, все десять SU(3) субмультиплетов с третьей проекцией обычного спина. $S_3 = 1/2$ из SU(6) -семидесятиплета барионов у нас выписаны. Аналогичную семидесятку с $S_3 = -1/2$ получим, если везде подставим $\Phi_{(-1/2)}^{abc}$ вместо $\Phi_{(1/2)}^{abc}$. Имея в виду формулы (6) и (7), можем выразить все компоненты явно через компоненты тензора Ψ^{ABC} , причем отнормировать эти функции легко, аналогично тому, как выше были отнормированы волновые функции для октета обычных барионов.

Теперь рассмотрим барионные SU(3) субмультиплеты из неприводимого представления $\mathbb{S}_p(6)$ размерности 56 (размерность этого представления в SU(6) совпадает с размерностью барионного мультиплета в SU(6), так как оба представления соответствуют одной и той же схеме Юнга, хотя у них природа совершенно разная). Как и для рассмотренной семидесятки, мы выпишем SU(3) -субмультиплеты только для 56-плета $\chi_{(3/2)}^{abc}$ ($S = +3/2$), а субмультиплеты для остальных трех 56-плетов ($S = +1/2, -3/2$) можно получить просто заменой нижнего знака; при этом в окончательных расчетах надо иметь в виду формулы (10-13). Далее следуют таблицы для барионов с обычным спином 3/2.

Таблица XI

Декуплет барионов (известных резонансов) с $Z = 1$ ($S = 3/2, S_3 = 3/2$)

Волновая функция	Частица	Q	I	I_3	Y	S
1. $\chi_{(3/2)}^{111}$	$\Delta_{(3/2)}^{(++)}$	2	3/2	3/2	1	0
2. $\chi_{(3/2)}^{112}$	$\Delta_{(3/2)}^{(+)}$	1	3/2	1/2	1	0
3. $\chi_{(3/2)}^{122}$	$\Delta_{(3/2)}^{(0)}$	0	3/2	-1/2	1	0
4. $\chi_{(3/2)}^{222}$	$\Delta_{(3/2)}^{(-)}$	-1	3/2	-3/2	1	0
5. $\chi_{(3/2)}^{118}$	$\Sigma_{(3/2)}^{*(+)}$	1	1	1	0	-1
6. $\chi_{(3/2)}^{128}$	$\Sigma_{(3/2)}^{*(0)}$	0	1	0	0	-1
7. $\chi_{(3/2)}^{228}$	$\Sigma_{(3/2)}^{*(-)}$	-1	1	-1	0	-1
8. $\chi_{(3/2)}^{188}$	$\Xi_{(3/2)}^{*(0)}$	0	1/2	1/2	-1	-2
9. $\chi_{(3/2)}^{288}$	$\Xi_{(3/2)}^{*(-)}$	-1	1/2	-1/2	-1	-2
10. $\chi_{(3/2)}^{388}$	$\Omega_{(3/2)}^{-}$	-1	0	0	-2	-3

Таблица XII
Декуплет барионов с $Z = -1$ ($S = 3/2, S_3 = 3/2$)

Волновая функция	Частица	Q	I	I_3	Y	S
1. $\chi_{(3/2)}^{444}$	$\bar{\Delta}_{(3/2)}^{(-)}$	-1	3/2	-3/2	-1	0
2. $\chi_{(3/2)}^{445}$	$\bar{\Delta}_{(3/2)}^{(0)}$	0	3/2	-1/2	-1	0
3. $\chi_{(3/2)}^{445}$	$\bar{\Delta}_{(3/2)}^{(+)}$	1	3/2	1/2	-1	0
4. $\chi_{(3/2)}^{555}$	$\bar{\Delta}_{(3/2)}^{(++)}$	2	3/2	3/2	-1	0
5. $\chi_{(3/2)}^{446}$	$\bar{\Sigma}_{(3/2)}^{*(0)}$	0	1	-1	0	1
6. $\chi_{(3/2)}^{466}$	$\bar{\Sigma}_{(3/2)}^{*(+)}$	1	1	0	0	1
7. $\chi_{(3/2)}^{566}$	$\bar{\Sigma}_{(3/2)}^{*(++)}$	2	1	1	0	1
8. $\chi_{(3/2)}^{446}$	$\bar{\Xi}_{(3/2)}^{*(+)}$	1	1/2	-1/2	1	2
9. $\chi_{(3/2)}^{566}$	$\bar{\Xi}_{(3/2)}^{*(++)}$	2	1/2	1/2	1	2
10. $\chi_{(3/2)}^{666}$	$\bar{\Omega}_{(3/2)}^{(++)}$	2	0	0	2	3

(Значок "-" над символом частицы означает, как и раньше, новую частицу).

Таблица XIII

Триплет барионов с $Z = 1/3$ ($S = 3/2, S_3 = 3/2$) $C_2^{(3)} = 8/3$

Волновая функция	Q	I	I_3	Y	S
1. $\chi_{(3/2)}^{114} + \chi_{(3/2)}^{125} + \chi_{(3/2)}^{136}$	1	1/2	1/2	1/3	0
2. $\chi_{(3/2)}^{124} + \chi_{(3/2)}^{225} + \chi_{(3/2)}^{236}$	0	1/2	-1/2	1/3	0
3. $\chi_{(3/2)}^{134} + \chi_{(3/2)}^{235} + \chi_{(3/2)}^{336}$	0	0	-2/3	-2/3	-1

Таблица XIV

Триплет барионов с $Z = -1/3$ $c_2^{(8)} = 8/3$ $(s = 3/2, s_3 = 3/2)$

Волновая функция	Q	I	I_3	Y	S
1. $X_{(8/2)}^{144} + X_{(8/2)}^{245} + X_{(8/2)}^{345}$	0	1/2	-1/2	-1/3	0
2. $X_{(8/2)}^{145} + X_{(8/2)}^{255} + X_{(8/2)}^{355}$	I	1/2	1/2	-1/3	0
3. $X_{(8/2)}^{146} + X_{(8/2)}^{256} + X_{(8/2)}^{366}$	I	0	0	2/3	I

Таблица XV

15-плет барионов с $Z = 1/3$ $c_2^{(8)} = 32/3$ $(s = 3/2, s_3 = 3/2)$

Волновая функция	Q	I	I_3	Y	S
1. $X_{(8/2)}^{114} + X_{(8/2)}^{125} - 3X_{(8/2)}^{186}$	I	1/2	1/2	1/3	0
2. $X_{(8/2)}^{124} + X_{(8/2)}^{225} - 3X_{(8/2)}^{286}$	0	1/2	-1/2	1/3	0
3. $X_{(8/2)}^{184} + X_{(8/2)}^{285} - 3X_{(8/2)}^{386}$	0	0	0	-2/3	-I
4. $X_{(8/2)}^{115}$	2	3/2	3/2	1/3	0
5. $X_{(8/2)}^{114} - 2X_{(8/2)}^{125}$	I	3/2	1/2	1/3	0
6. $X_{(8/2)}^{225} - 2X_{(8/2)}^{124}$	0	3/2	-1/2	1/3	0
7. $X_{(8/2)}^{234}$	-I	3/2	-3/2	1/3	0
8. $X_{(8/2)}^{116}$	2	I	I	4/3	I
9. $X_{(8/2)}^{123}$	I	I	0	4/3	I
10. $X_{(8/2)}^{236}$	0	I	-I	4/3	I
11. $X_{(8/2)}^{135}$	I	I	I	-2/3	-I
12. $X_{(8/2)}^{134} - X_{(8/2)}^{285}$	0	I	0	-2/3	-I
13. $X_{(8/2)}^{234}$	-I	I	-I	-2/3	-I
14. $X_{(8/2)}^{385}$	0	1/2	1/2	-5/3	-2
15. $X_{(8/2)}^{354}$	-I	1/2	-1/2	-5/3	-2

Таблица XVI

15-плет барионов с $Z = -1/3$ $c_2^{(8)} = -32/3$ $(s = 3/2, s_3 = 3/2)$

Волновая функция	Q	I	I_3	Y	S
1. $X_{(8/2)}^{144} + X_{(8/2)}^{245} - 3X_{(8/2)}^{346}$	0	1/2	-1/2	-1/3	0
2. $X_{(8/2)}^{145} + X_{(8/2)}^{255} - 3X_{(8/2)}^{356}$	I	1/2	1/2	-1/3	0
3. $X_{(8/2)}^{146} + X_{(8/2)}^{256} - X_{(8/2)}^{366}$	I	0	0	2/3	I
4. $X_{(8/2)}^{244}$	-I	3/2	-3/2	-1/3	0
5. $X_{(8/2)}^{144} - 2X_{(8/2)}^{245}$	0	3/2	-1/2	-1/3	0
6. $X_{(8/2)}^{255} - 2X_{(8/2)}^{145}$	I	3/2	1/2	-1/3	0
7. $X_{(8/2)}^{155}$	2	3/2	3/2	-1/3	0
8. $X_{(8/2)}^{344}$	-I	I	-I	-4/3	-I
9. $X_{(8/2)}^{345}$	0	I	0	-4/3	-I
10. $X_{(8/2)}^{355}$	I	I	I	-4/3	-I
11. $X_{(8/2)}^{346}$	0	I	-I	2/3	I
12. $X_{(8/2)}^{146} - X_{(8/2)}^{256}$	I	I	0	2/3	I
13. $X_{(8/2)}^{156}$	2	I	I	2/3	I
14. $X_{(8/2)}^{266}$	I	1/2	-1/2	5/3	2
15. $X_{(8/2)}^{166}$	2	1/2	1/2	5/3	2

Это все $su(3)$ -субмультиплеты для 56-плета с $s_3 = +3/2$

Мезоны

Мультиплет мезонов $\Psi_B^A = \Psi_{\beta b}^{\alpha a}$ (значки A, B, αa , βb принимают те же значения как и для барионов) составляет 143-плет группы SU(12) в силу того, что

$$\text{Sp } \Psi = \sum_{A=1}^{12} \Psi_A^A - \sum_{\alpha=1}^3 \sum_{a=1}^6 \Psi_{\alpha a}^{\alpha a} = 0. \quad (19)$$

В тензоре Ψ_B^A верхний индекс относится к триону, а нижний - к антитриону, так что барионное число мезонов заведомо равно нулю.

143-плет мезонов разлагается на неприводимые представления группы SU(6) x SU(2) по схеме (первая цифра обозначает размерность представления SU(6), вторая - размерность представления SU(2))

$$\underline{143} = (1,3) + (35,3) + (35,1),$$

т.е. содержит векторный синглет, векторный 35-плет и псевдоскалярный 35-плет. Векторный синглет, естественно, неприводим в Sp(6), а все четыре 35-плета разлагаются на неприводимые представления группы SP(6) по схеме

$$(35, i) = (21, i) + (14, i)$$

$$(i = 1 \text{ или } 3).$$

Неприводимые в Sp(6) представления размерности 14 и 21 раскладываются далее на SU(3)-субмультиплеты по схемам:

$$14 = 8 + 3 + \bar{3}$$

$$21 = 8 + 6 + \bar{6} + 1.$$

Заметим, что известные 9 векторных мезонов заполняют представления размерности 8 и 1 в SU(3), входящие в векторный 21-плет Sp(6), а известные 8 псевдоскалярных мезонов заполняют SU(3)-октет, принадлежащий 14-плету с S=0.

Ниже следуют таблицы SU(3)-субмультиплетов 143-плета мезонов.

Таблица I

Векторный синглет $\xi_{\beta b}^{\alpha a} = \delta_b^a \sum_{\alpha=1}^6 \Psi_{\beta \alpha}^{\alpha \alpha} (S=1)$

Волновая функция	S ₃	Q	Z	I	I ₃	Y	S
1. ξ_{1b}^{1a}	0	0	0	0	0	0	0
2. ξ_{2b}^{1a}	I	0	0	0	0	0	0
3. ξ_{1b}^{2a}	-I	0	0	0	0	0	0

Как видно из таблицы, любая из трех приведенных функций $\xi_{\beta b}^{\alpha a}$ есть SU(3)-синглет с определенной третьей проекцией обычного спина. Нормированную функцию написать в этом случае очень просто, если принять например, что

$$(\Psi_{\beta b}^{\alpha a}, \Psi_{\beta b}^{\alpha a}) = 1 \quad (\alpha \neq \beta, a \neq b)$$

$$(\Psi_{\alpha a}^{\alpha a}, \Psi_{\alpha a}^{\alpha a}) = 1$$

$$(\Psi_{\alpha a}^{\alpha a}, \Psi_{\beta b}^{\beta b}) = -\frac{1}{11}.$$

(По повторяющимся индексам суммы нет).

Последнее условие является следствием (19). Тогда имеем

$$\xi_{1b}^{1a} = \frac{\sqrt{11}}{6} \delta_b^a \sum_{\alpha=1}^6 \Psi_{1\alpha}^{1\alpha}$$

$$\xi_{2b}^{1a} = \frac{\delta_b^a}{\sqrt{6}} \sum_{\alpha=1}^6 \Psi_{2\alpha}^{1\alpha}$$

$$\xi_{1b}^{2a} = \frac{\delta_b^a}{\sqrt{6}} \sum_{\alpha=1}^6 \Psi_{1\alpha}^{2\alpha}$$

Волновая функция псевдоскалярных мезонов из Sp(6) 21-плета имеет вид:

$$S^{ab} = \sum_{\alpha=1}^2 (\Psi_{\alpha b}^{\alpha a}, h^{b'b} + \Psi_{\alpha a}^{\alpha b}, h^{a'a}) = S^{ba} \quad (20)$$

(индекс "1" слева внизу указывает на синглетность по обычному спину, т.е. $S = 0$),
 где h^{ab} - метрический тензор симплектической группы $Sp(6)$:

$$h^{ab} = \begin{pmatrix} 0 & I & \\ -I & P & \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad h_{ab} = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad (21)$$

причем

$$\begin{aligned} {}_1 S_b^a &= {}_1 S^{ab'} h_{b'b} \\ {}_1 S^{ab} &= {}_1 S_b^a h^{b'b} \end{aligned} \quad (22)$$

Теперь запишем в виде таблиц $SU(3)$ - субмультиплетов содержание этого 21-плета.
 Отметим, что для рассматриваемых мезонов с $Z = \pm \frac{2}{3}$, как и для барионов с $Z = \pm 1$ можно идентифицировать $SU(3)$ - субмультиплеты без наличия квадратичного оператора Казимира $C_2^{(3)}$; таких случаев будет еще несколько.

Таблица II

Синглет псевдоскалярных мезонов с $Z = 2/3$

Волновая функция	Q	I	I_3	Y	S
1. ${}_1 S_4^1$	I	I	I	2/3	0
2. ${}_1 S_5^1$	0	I	0	2/3	0
3. ${}_1 S_6^2$	-I	I	-I	2/3	0
4. ${}_1 S_6^2$	-I	I/2	-I/2	-I/3	-I
5. ${}_1 S_6^1$	I	I/2	I/2	-I/3	-I
6. ${}_1 S_6^3$	-I	0	0	-4/3	-2

Таблица III

Секстет псевдоскалярных мезонов с $Z = -2/3$

Волновая функция	Q	I	I_3	Y	S
1. ${}_1 S_2^5$	I	I	I	-2/3	0
2. ${}_1 S_2^4$	0	I	0	-2/3	0
3. ${}_1 S_1^4$	-I	I	-I	-2/3	0
4. ${}_1 S_3^4$	0	I/2	-I/2	I/3	I
5. ${}_1 S_3^5$	I	I/2	I/2	I/3	I
6. ${}_1 S_3^6$	I	0	0	4/3	2

Таблица IV

Октет псевдоскалярных мезонов с $Z = 0$ ($C_2^{(8)} = 6$).

Волновая функция	Q	I	I_3	Y	S
1. ${}_1 S_1^1 + {}_1 S_2^2 - 2 {}_1 S_3^3$	0	0	0	0	0
2. ${}_1 S_1^2$	I	I	I	0	0
3. ${}_1 S_1^1 - 6 {}_1 S_2^2$	0	I	0	0	0
4. ${}_1 S_1^2$	-I	I	-I	0	0
5. ${}_1 S_2^3$	0	I/2	I/2	-I	-I
6. ${}_1 S_1^3$	-I	I/2	-I/2	-I	-I
7. ${}_1 S_3^1$	I	I/2	I/2	I	I
8. ${}_1 S_3^2$	0	I/2	-I/2	I	2

Таблица У

Синглет псевдоскалярных мезонов с $Z=0 (C=0)$

Волновая функция	Q	I	I ₃	Y	S
I. ${}_1S_1^1 + {}_1S_2^2 + {}_1S_3^3$	0	0	0	0	0

Волновую функцию Sp(6) 14-плета псевдоскалярных мезонов запишем в виде:

$${}_1A^{ab} = -{}_1A^{ba} = \sum_{\alpha=1}^2 (\Psi_{\alpha b}^{a\alpha} h^{b\alpha} - \Psi_{\alpha a}^{b\alpha} h^{a\alpha}), \quad (23)$$

или

$${}_1A_{ab}^{\alpha} = {}_1A^{ab\alpha} h_{b\alpha}. \quad (24)$$

При этом

$$\sum_{i=1}^3 ({}_1A_{i1}^i) = \sum_{i=1}^3 ({}_1A^{1,i+i}) = \sum_{A=1}^{12} \Psi_A^A = 0. \quad (25)$$

Имея в виду последнее соотношение, надо, как и выше, позаботиться о правильной норме функций частиц. Так как (25) дает нам

$$\sum_{i=1}^3 |{}_1A^{1,i+i}|^2 + 2|({}_1A^{14}, {}_1A^{25})| + ({}_1A^{14}, {}_1A^{36}) + ({}_1A^{25}, {}_1A^{36}) = 0. \quad (26)$$

мы можем принять

$$|{}_1A^{1,i+i}|^2 = \frac{2}{3} \quad (i=1, 2, 3) \quad (27)$$

$$({}_1A^{1,i+i}, {}_1A^{j,i+i}) = -\frac{1}{3} \quad (i \neq j).$$

Тогда легко можно получить нормированные волновые функции. Ниже следуют SU(3)-субмультиплеты рассматриваемого Sp(6) мультиплета.

Таблица УI

Октет известных псевдоскалярных мезонов с $Z=0$

Волновая функция	Частица	Q	I	I ₃	Y	S
1. $\frac{\sqrt{3}}{2} ({}_1A^{14} + {}_1A^{25})$	$\eta^{(0)}$	0	0	0	0	0
2. ${}_1A^{24}$	$\pi^{(-)}$	-1	1	-1	0	0
3. $\frac{1}{\sqrt{2}} ({}_1A^{14} - {}_1A^{25})$	$\pi^{(0)}$	0	1	0	0	0
4. ${}_1A^{16}$	$\pi^{(+)}$	1	1	1	0	0
5. ${}_1A^{16}$	$K^{(+)}$	1	1/2	1/2	1	1
6. ${}_1A^{26}$	$K^{(0)}$	0	1/2	-1/2	1	1
7. ${}_1A^{34}$	$K^{(-)}$	-1	1/2	-1/2	-1	-1
8. ${}_1A^{35}$	$\bar{K}^{(0)}$	0	1/2	1/2	-1	-1

Таблица УII

Триплет псевдоскалярных мезонов с $Z=2/3$

Волновая функция	Q	I	I ₃	Y	S
1. ${}_1A^{12}$	0	0	0	2/3	0
2. ${}_1A^{13}$	0	1/2	1/2	-1/3	-1
3. ${}_1A^{23}$	-1	1/2	-1/2	-1/3	-1

Таблица УШ

Триплет псевдоскалярных мезонов с $Z = -2/3$

Волновая функция	Q	I	I_3	Y	S
1. ${}_1 A^{45}$	0	0	0	-2/3	0
2. ${}_1 A^{46}$	0	1/2	-1/2	1/3	I
3. ${}_1 A^{56}$	I	1/2	1/2	1/3	I

Таким образом мы имеем все компоненты псевдоскалярных мезонов.

Перейдем к рассмотрению $SU(6)$ 35-плета векторных мезонов. Этот 35-плет, как уже было отмечено, раскладывается по $Sp(6)$ на 21-плет (здесь входит нечет известных векторных мезонов) и на 14-плет. Далее эти $Sp(6)$ мультиплеты раскладываются на $SU(3)$ -субмультиплеты как и псевдоскалярные 14 и 21-плета. Введем следующие обозначения для компонент 21-плета:

$$({}_0) S^{ab} = (\Psi_{1b}^{1a} - \Psi_{2b}^{2a}) h^{b'b} + (\Psi_{1a}^{1b} - \Psi_{2a}^{2b}) h^{a'a} = ({}_0) S^{ba} \quad (28)$$

$$({}_1) S^{ab} = \Psi_{2b}^{1a} h^{b'b} + \Psi_{2a}^{1b} h^{a'a} = ({}_1) S^{ba} \quad (29)$$

$$({}_{-1}) S^{ab} = \Psi_{1b}^{2a} h^{b'b} + \Psi_{1a}^{2b} h^{a'a} = ({}_{-1}) S^{ba} \quad (30)$$

с проекцией спина $S_3 = 0, \pm 1$ соответственно и аналогичные обозначения для компонент 14-плета векторных мезонов

$$({}_0) A^{ab} = (\Psi_{1b}^{1a} - \Psi_{2b}^{2a}) h^{b'b} - (\Psi_{1a}^{1b} - \Psi_{2a}^{2b}) h^{a'a} - \frac{2}{3} h^{ab} \Psi_{1c}^{1c} = ({}_0) A^{ba} \quad (31)$$

$$({}_1) A^{ab} = \Psi_{2b}^{1a} h^{b'b} - \Psi_{2a}^{1b} h^{a'a} - \frac{1}{3} h^{ab} \Psi_{2c}^{2c} = ({}_1) A^{ba} \quad (32)$$

$$({}_{-1}) A^{ab} = \Psi_{1b}^{2a} h^{b'b} - \Psi_{1a}^{2b} h^{a'a} - \frac{1}{3} h^{ab} \Psi_{1c}^{1c} = ({}_{-1}) A^{ba} \quad (33)$$

причем

$$\sum_{k=1}^3 ({}_k) A^{i, i+k} = 0 \quad (34)$$

$$(k=0, \pm 1)$$

в силу условия (19). Отметим, что при помощи h_{ab} можно один из верхних индексов опустить вниз.

Имея в виду формулы (28-34), мы запишем $SU(3)$ - субмультиплеты только для проекции обычного спина $S_3 = 0$, а для остальных двух их можно получить простой подстановкой значка k у функций $({}_k) S^{ab}$ и $({}_k) A^{ab}$.

Таблица IX

Секстет векторных мезонов с $Z = 2/3$

Волновая функция	Q	I	I_3	Y	S
1. $({}_0) S_4^1$	I	I	I	2/3	0
2. $({}_0) S_5^1$	0	I	0	2/3	0
3. $({}_0) S_5^2$	-I	I	-I	2/3	0
4. $({}_0) S_6^2$	-I	I/2	-I/2	-1/3	-I
5. $({}_0) S_6^1$	0	I/2	I/2	-1/3	-I
6. $({}_0) S_6^3$	-I	0	0	-4/3	-2

Таблица X

Секстет векторных мезонов с $z = -2/3$

Волновая функция	q	l	l_3	Y	s
1. ${}_{(0)}S_2^5$	1	1	1	-2/3	0
2. ${}_{(0)}S_2^4$	0	1	0	-2/3	0
3. ${}_{(0)}S_1^4$	-1	1	-1	-2/3	0
4. ${}_{(0)}S_3^4$	0	1/2	-1/2	1/3	1
5. ${}_{(0)}S_3^5$	1	1/2	1/2	1/3	1
6. ${}_{(0)}S_3^6$	1	0	0	4/3	2

Таблица XI

Синглет векторного мезона с $z = 0$ и $c_2^{(3)} = 0$

Волновая функция	q	l	l_3	Y	s
${}_{(0)}S_1^1 + {}_{(0)}S_2^2 + {}_{(0)}S_3^3 = \Phi_U$	0	0	0	0	0

Таблица XII

Октет векторных мезонов с $z = 0$ и $c_2^{(3)} = 6$

Волновая функция	q	l	l_3	Y	s
1. ${}_{(0)}S_1^1 + {}_{(0)}S_2^2 - 2{}_{(0)}S_3^3 = \omega_U$	0	0	0	0	0
2. ${}_{(0)}S_2^1$	1	1	1	0	0
3. ${}_{(0)}S_1^1 - S_2^2$	0	1	0	0	0
4. ${}_{(0)}S_1^2$	-1	1	-1	0	0
5. ${}_{(0)}S_2^3$	0	1/2	1/2	-1	-1
6. ${}_{(0)}S_1^3$	-1	1/2	-1/2	-1	-1
7. ${}_{(0)}S_3^1$	1	1/2	1/2	1	1
8. ${}_{(0)}S_3^2$	0	1/2	-1/2	1	1

В таблицы XI и XII на самом деле входят все девять известных векторных мезонов, причем векторный синглет Φ_U и первая компонента октета ω_U , которые дают нам нефизические "фи" и "омега", смешиваясь дают физические Φ_P и ω_P . Приведем нормированные волновые функции нонета векторных мезонов в обычном виде:

1. $\omega_P = \frac{1}{\sqrt{2}} [{}_{(0)}S^{14} + {}_{(0)}S^{25}]$
2. $\Phi_P = {}_{(0)}S^{36}$
3. $\rho^{(-)} = {}_{(0)}S^{24}$
4. $\rho^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{2}} [{}_{(0)}S^{14} - {}_{(0)}S^{25}]$
5. $\rho^{(+)} = {}_{(0)}S^{15}$
6. $K^{*(+)} = {}_{(0)}S^{16}$
7. $K^{-(0)} = {}_{(0)}S^{26}$
8. $K^{*(0)} = {}_{(0)}S^{34}$
9. $K^{*(0)} = {}_{(0)}S^{35}$

Этим $Sp(6)$ 21-плет векторных мезонов исчерпан.

Таблица XIII

Октет векторных мезонов с $z = 0$

Волновая функция	q	l	l_3	Y	s
1. ${}_{(0)}A^{36}$	0	0	0	0	0
2. ${}_{(0)}A^{15}$	1	1	1	0	0
3. ${}_{(0)}A^{14} - {}_{(0)}A^{25}$	0	1	0	0	0
4. ${}_{(0)}A^{24}$	-1	1	-1	0	0
5. ${}_{(0)}A^{35}$	0	1/2	1/2	-1	-1
6. ${}_{(0)}A^{34}$	-1	1/2	-1/2	-1	-1
7. ${}_{(0)}A^{16}$	1	1/2	1/2	1	1
8. ${}_{(0)}A^{26}$	0	1/2	-1/2	1	1

Таблица XIV

Триплет векторных мезонов с $z = 2/3$

Волновая функция	Q	I	I_3	Y	S
1. $(0) A^{12}$	0	0	0	2/3	0
2. $(0) A^{13}$	0	1/2	1/2	-1/3	-1
3. $(0) A^{23}$	-1	1/2	-1/2	-1/3	-1

Таблица XV

Триплет векторных мезонов с $z = -2/3$

1. $(0) A^{45}$	0	0	0	-2/3	0
2. $(0) A^{56}$	1	1/2	1/2	1/3	1
3. $(0) A^{46}$	0	1/2	-1/2	1/3	1

Последние три таблицы дают нам компоненты векторных мезонов с нулевой проекцией обычного спина $S_3 = 0$, заполняющие $Sp(6)$ 14-плет. Для остальных проекций спина субмультиплеты записываются аналогично. Таким образом, мы имеем все компоненты мезонного мультиплета Ψ_V^A размерности 143.

В заключение автор выражает искреннюю благодарность И.Т.Тодорову и Б.В.Струминскому за полезные обсуждения и интерес к работе.

Л и т е р а т у р а

1. Б.В.Струминский, И.Т.Тодоров и Д.Г.Факиров. Группа $SU(12)$ как объединение симплектической и спиновой симметрии. Препринт ОИЯИ Р-2175, Дубна, 1965.
2. H.Vacry, J.Nuyts and L.Van Hove. Phys. Lett., 9, 279 (1964).
3. H.Vacry, J.Nuyts and L.Van Hove. Nuovo Cim., 35, 510 (1965).
4. H.Vacry, J.Nuyts and L.Van Hove. Phys. Lett., 12, 285 (1964).
5. Я.А.Сморodinский. УФН 84, 3 (1964).
6. В.Г.Кадышевский, Р.М.Мурадян, Я.А.Сморodinский. $SU(6)$ -симметрия в сильных и электромагнитных взаимодействиях элементарных частиц; Препринт ОИЯИ Р-2061, Дубна (1965).

Рукопись поступила в издательский отдел
15 июня 1965 г.