ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
Лаборатория теоретической физики

Р-220

А. А. Логунов и И. Т. Тодоров

О доказательстве дисперсионных соотношений для неупругих процессов

Nucl. Phys., 1959, v 10, n 5, c 552-563.

г. Дубна, 1958 год

ОБЪЕДИНЕННЫЙ ИНСТИТУТ ЯДЕРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ
Лаборатория теоретической физики

P-220

А. А. Логунов и И. Т. Тодоров

О доказательстве дисперсионных соотношений для неупругих процессов

г. Дубна, 1958 год

ВВЕДЕНИЕ

В работах[1-3] были получены дисперсионные соотношения для реакций типа ($a+b\to a'+c+d$). Для процессов ($N+a\to N'+\gamma+\gamma'$), в которых ненаблюдаемая область при определенных условиях отсутствует, в работе[4] было дано доказательство дисперсионных соотношений.

В работе *Kibble* [1] сделана попытка обосновать дисперсионные соотношения в общем случае на основании некоторой теоремы об аналитическом продолжении, которая принята без доказательства. Однако, при выводе дисперсионных соотношений для мнимой массы в работе *Kibble* делается необоснованное утверждение о области аналитичности выражения (6.2). В связи с этим рассуждения об аналитическом продолжении дисперсионных соотношений теряют доказательную силу (*Kibble* § 7).

Настоящая работа посвящена последовательному рассмотрению данного вопроса. При этом для определенности мы будем рассматривать процесс $(\pi+p\to\pi'+\pi''+p')$. Рассмотрение других процессов типа $(a+b\to a'+c+d)$ вполне аналогично. В дальнейшем мы будем использовать обозначения, принятые в работах[2-4].

§ I. Кинематика фиктивного процесса

Пусть p и p' 4-импульсы нуклона в начальном и конечном состояниях, а q , q' , q'' – 4-импульсы падающего и уходящих мезонов соответственно. Будем работать в системе Breit'a для нуклонов

$$\vec{p} + \vec{p}' = 0. \tag{I.I}$$

В этой системе положим

$$q'_0 = e^{\xi}\omega, \qquad q''_0 = e^{-\xi}\omega. \tag{I.2}$$

Введем вектор

$$\Delta = \frac{1}{2}\left(e^{-\xi}q' - e^{\xi}q''\right) = \left(0, \vec{\Delta}\right), \tag{I.3}$$

$$\Delta^2 = -\vec{\Delta}^2 = -m_\Delta^2 . \tag{I.4}$$

Для изучения аналитических свойств амплитуды процесса $(\pi + p \to \pi' + \pi'' + p')$ нам будет необходимо рассмотреть кинематику фиктивного процесса, когда 4-импульсы частиц определены следующими соотношениями:

$$q'^2 = q''^2 = \frac{\tau - m_\Delta^2}{ch^2\xi}, \quad q^2 = 4\tau - 4M_\Delta^2, \quad p^2 = p'^2 = M^2 \tag{I.5}$$

$$M_\Delta^2 = \mu^2 ch^2\xi + m_\Delta^2 - \mu^2/4, \tag{I.6}$$

где τ - некоторый параметр, который будет определен ниже. Для реального процесса неупругого рассеяния $(\pi + p \to \pi' + \pi'' + p')$

$$\tau = \tau_0 \equiv m^2 ch^2 \xi + m_\Delta^2$$

Введем вектор Q следующим образом:

$$Q = 1/2 \left[(1-\eta) e^{-\xi} q' + (1+\eta) e^{\xi} q'' \right] , \tag{I.7}$$

где

$$\eta = \left(\frac{\tau}{m_\Delta^2} - 1 \right) th\, \xi \tag{I.8}$$

Легко видеть, что

$$Q\Delta = -\vec{Q}\vec{\Delta} = 0 \tag{I.9}$$

$$ch^2 \xi\, Q^2 = \tau + \frac{\tau^2}{m_\Delta^2} sh^2 \xi \tag{I.10}$$

В дальнейшем вместо векторов q' и q'' будем пользоваться векторами Q и Δ :

$$q' = e^{\xi} \left[Q + (1+\eta) \Delta \right], \quad q'' = e^{-\xi} \left[Q - (1-\eta) \Delta \right] \tag{I.11}$$

Будем считать, что векторы p, q, p', q', q'' связаны законом сохранения

$$p + q = p' + q' + q'' \tag{I.12}$$

В переменных p, q, Q и Δ (I.12) может быть преобразован к виду

$$1/2 \left(\vec{q} - 2\, ch\, \xi \vec{Q} \right) 1/2 \left(\vec{q} + 2\, ch\, \xi \vec{Q} \right) = \frac{\tau^2}{m_\Delta^2} sh^2 \xi + M_\Delta^2 \tag{I.13}$$

$$1/2 \left(\vec{q} - 2\, ch\, \xi \vec{Q} \right) = -\vec{p} + \frac{\tau}{m_\Delta^2} sh\, \xi \cdot \vec{\Delta} .$$

Отсюда после элементарных вычислений находим:

$$\tfrac{1}{2}\vec{q} = ch\,\xi\,\lambda\vec{e} + t\vec{\Delta} + s\vec{\tau},$$

$$\vec{Q} = \lambda\vec{e} + L\vec{\tau}, \qquad \text{(I.I4)}$$

где

$$m_\Delta^2 t = \tau\, sh\,\xi - \tilde{p}\, m_\Delta \cos\alpha$$

$$-2s\tilde{p}\sin\alpha = M_\Delta^2 - \tilde{p}^2 + 2\tilde{p}\frac{\tau}{m_\Delta} sh\,\xi\cos\alpha$$

$$-2L\,ch\,\xi\,\tilde{p}\sin\alpha = M_\Delta^2 - \tilde{p}^2 + 2\tilde{p}\frac{\tau}{m_\Delta} sh\,\xi\cos\alpha$$

$$\tilde{p} \equiv |\vec{p}|\,, \quad \tilde{p}\, m_\Delta \cos\alpha \equiv (\vec{p}\vec{\Delta}). \qquad \text{(I.I5)}$$

$$\lambda^2 = \omega^2 - Q^2 - L^2$$

$\vec{e}, \frac{\vec{\Delta}}{m_\Delta}, \vec{\tau}$ – взаимноортогональные единичные орты.

Для дальнейшего нам будет необходимо выбрать τ таким образом, чтобы выражение $\vec{Q} + L^2$ было меньше нуля:

$$Q^2 + L^2 \equiv$$

$$\equiv \tau\,\frac{m_\Delta^2 + \tau\, sh^2\xi}{m_\Delta^2\, ch^2\xi} + \left[\frac{M_\Delta^2 - \tilde{p}^2 + 2p\frac{\tau}{m_\Delta} sh\,\xi\cos\alpha}{2\tilde{p}\,ch\,\xi\sin\alpha}\right]^2 < 0. \qquad \text{(I.I6)}$$

Это условие может быть переписано в виде

$$\left(\frac{\tau}{m_\Delta}\right)^2 sh^2\xi + \left[\frac{M_\Delta^2-\tilde{p}^2}{\tilde{p}} sh\,\xi \cos\alpha + m_\Delta \sin^2\alpha\right]\frac{\tau}{m_\Delta} + $$
$$+ \frac{(M_\Delta^2-\tilde{p}^2)^2}{4\tilde{p}^2} < 0 \qquad (I.17)$$

Чтобы существовал интервал значений τ, при которых выполнялось неравенство (I.17), необходимо и достаточно чтобы

$$(\tilde{p} < M_\Delta)$$

$$(M_\Delta^2-\tilde{p}^2)\,sh\,\xi < 2m_\Delta \tilde{p}\cos^2\frac{\alpha}{2} \quad \text{для} \quad \xi > 0$$
$$(I.18)$$
$$(M_\Delta^2-\tilde{p}^2)\,sh|\xi| < 2m_\Delta \tilde{p}\sin^2\frac{\alpha}{2} \quad \text{для} \quad \xi < 0 \ .$$

Условие (I.16) выполняется, когда τ лежит между корнями левой части (I.17)

$$\tau_1 < \tau < \tau_2 \ . \qquad (I.19)$$

В этом случае величина λ будет вещественной для любых действительных значений ω .

§ 2. Дисперсионные соотношения для фиктивного процесса

Фурье-образы запаздывающего и опережающего матричных элементов процесса $(p+\pi \to p'+\pi'+\pi'')$ могут быть записаны /I,2/ в виде:

$$T^{ret}(Q,\Delta) = \iint_G e^{i(Qx+\Delta y)} F^{ret}(x,y)\,dx\,dy$$
$$T^{adv}(Q,\Delta) = \iint_{G'} e^{i(Qx+\Delta y)} F^{adv}(x,y)\,dx\,dy \qquad (2.I)$$

где области интегрирования G и G' определяются неравенствами:

$$G: \quad x > 0 \quad , \quad -(1-\eta)x < y < (1+\eta)x$$

$$G': \quad x < 0 \quad , \quad (1+\eta)x < y < -(1-\eta)x \qquad (2.2)$$

Для рассматриваемого в предыдущем параграфе фиктивного процесса ,эти амплитуды принимают вид:

$$T^{ret}(\omega,\tau) = \iint_G \exp\left\{ i\left(\omega x_0 - \sqrt{\omega^2-Q^2-L^2}\,\vec{e}\vec{x} - L\vec{\tau}\vec{x} - \vec{\Delta}\vec{y}\right)\right\} F^{ret}(x,y)\,dx\,dy$$

$$T^{adv}(\omega,\tau) = \iint_{G'} \exp\left\{ i\left(\omega x_0 - \sqrt{\omega^2-Q^2-L^2}\,\vec{e}\vec{x} - L\vec{\tau}\vec{x} - \vec{\Delta}\vec{y}\right)\right\} F^{adv}(x,y)\,dx\,dy \qquad (2.3)$$

Когда τ изменяется в интервале (I.I9) x)

$$|\mathrm{Im}\,\omega| > |\mathrm{Im}\sqrt{\omega^2-Q^2-L^2}| \qquad (2.4)$$

и,следовательно,функции xx) $S_\pm T^{ret}(\omega,\lambda\vec{e},\tau)$ будут аналитическими в верхней полуплоскости комплексной переменной ω ,а $S_\pm T^{adv}(\omega,\lambda\vec{e},\tau)$ - в нижней полуплоскости.

---

x) В работе Kibble /I/ сделано утверждение,что выражение (6.2) (аналогичное выражению (2.3) в данной работе) является аналитической функцией ω и τ в области ,где имеет место неравенство

$$\mathrm{Im}\,\omega > |\mathrm{Im}\sqrt{\omega^2-\tau}|$$

Это утверждение является неочевидным и требует специального исследования,поскольку в указанной области интеграл (6.2) может терять смысл .Область аналитичности выражения (6.2) на самом деле определяется неравенством $\mathrm{Im}\,\omega > |\mathrm{Im}\,\lambda(\omega,\tau)|$.
(В данном примечании мы пользуемся обозначениями Kibble)

xx) $S_\pm$ -операция симметризации или антисимметризации по вектору $\vec{e}$.

Покажем, что функции $ST^{ret}(\omega,\lambda\vec{e},\tau)$ и $ST^{adv}(\omega,\lambda\vec{e},\tau)$ представляют одну и ту же аналитическую функцию, т.е. что функция:

$$ST(\omega,\tau)=\begin{matrix} ST^{ret}(\omega,\lambda\vec{e},\tau) & \quad \mathrm{Im}\,\omega>0 \\ ST^{adv}(\omega,\lambda\vec{e},\tau) & \quad \mathrm{Im}\,\omega<0 \end{matrix} \tag{2.5}$$

является аналитической функцией на всей комплексной плоскости ω за исключением конечного числа точек и линий разреза на действительной оси. Для этой цели рассмотрим разность

$$2iSA(\omega,\tau)=ST^{ret}(\omega,\lambda\vec{e},\tau)-ST^{adv}(\omega,\lambda\vec{e},\tau) \tag{2.6}$$

при вещественных значениях ω .

Повторяя рассуждения работы [2], получим

$$\begin{aligned} SA(\omega,\tau)=\pi\sum_n S\Big\{ & V_{q'}(n,p')D_{q,q''}(p,n)\,\delta\big(p_0+e^{\xi}\omega-\sqrt{M_n^2+(\vec{p}-\vec{q}\,')^2}\big)- \\ & -D_{q,q''}(n,p')V_{q'}(p,n)\,\delta\big(p_0-e^{\xi}\omega-\sqrt{M_n^2+(\vec{p}-\vec{q}\,')^2}\big)+ \\ & +V_{q''}(n,p')D_{q,q'}(p,n)\,\delta\big(p_0+e^{-\xi}\omega-\sqrt{M_n^2+(\vec{p}-\vec{q}\,'')^2}\big)- \\ & -D_{q,q'}(n,p')V_{q''}(p,n)\,\delta\big(p_0-e^{-\xi}\omega-\sqrt{M_n^2+(\vec{p}-\vec{q}\,'')^2}\big)+ \\ & +D_{-q'q''}(n,p')V_q(p,n)\,\delta\big(p_0+2\,\mathrm{ch}\,\xi\,\omega-\sqrt{M_n^2+(\vec{p}-\vec{q}\,'-\vec{q}\,'')^2}\big)- \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$-V_q(n,p')D_{-q',q''}(p,n)\,\delta\big(p_0-2\,\mathrm{ch}\,\xi\,\omega-\sqrt{M_n^2+(\vec{p}-\vec{q}\,'-\vec{q}\,'')^2}\big)\Big\}$$

Используя кинематические формулы § I, легко показать, что особенности δ -функций выражения (2.7) будут в точках

$$\pm 2\,\mathrm{ch}\,\xi\sqrt{M^2+\tilde{p}^2}\,\omega_1(n)=e^{-\xi}\mathrm{ch}\,\xi\,(M_n^2-M^2)+(1-\mathrm{th}\,\xi)(m_\Delta^2-\tau)+ \\ +M_\Delta^2-\tilde{p}^2-2e^{-\xi}m_\Delta\tilde{p}\cos\alpha,$$

$$\pm 2\,\mathrm{ch}\,\xi\sqrt{M^2+\tilde{p}^2}\,\omega_2(n)=e^{\xi}\mathrm{ch}\,\xi\,(M_n^2-M^2)+(1+\mathrm{th}\,\xi)(m_\Delta^2-\tau)+ \\ +M_\Delta^2-\tilde{p}^2+2e^{\xi}m_\Delta\tilde{p}\cos\alpha \qquad (2.8)$$

$$\pm 2\,\mathrm{ch}\,\xi\sqrt{M^2+\tilde{p}^2}\,\omega_3(n)=1/2\,(M_n^2-M^2)-2\tau+M_\Delta^2-\tilde{p}^2$$

(верхний знак (+) соответствует δ -функциям I,Ш,У, а нижний (-) δ -функциям П,IУ,УI). При $M_n=M$ отсюда находим шесть полюсов $\pm\omega_1$, $\pm\omega_2$, $\pm\omega_3$, которые возникают из однонуклонных состояний. Границы непрерывных спектров соответствующих δ - функций получаются из (2.8) при $M_n=M+\mu$.

Можно показать, что для некоторой области значений ξ $\alpha,\tilde{p},m_\Delta$ величина $\omega_c\equiv\omega_{c_3}$

$$2\,\mathrm{ch}\,\xi\sqrt{M^2+\tilde{p}^2}\,\omega_c=M\mu+1/2\,\mu^2+M_\Delta^2-\tilde{p}^2-2\tau \qquad (2.9)$$

является нижней границей непрерывного спектра выражения (2.7), а полюса однонуклонных состояний лежат до непрерывного спектра

$$|\omega_\ell|<\omega_c\,,\quad \ell=1,2,3$$

Отделяя вклад однонуклонных состояний, выражение для антиэрмитовой части (2.7) можно представить в виде:

$$SA(\omega,\tau) = \pi \sum_{\ell=1}^{3} \left\{ g_\ell(\tau)\,\delta(\omega-\omega_\ell) - h_\ell(\tau)\,\delta(\omega+\omega_\ell) \right\} + \mathcal{F}(\omega,\tau) \qquad (2.10)$$

где

$$\begin{aligned}
g_1(\tau) &= S\left|e^{-\xi} + \frac{\omega_1}{P_0}\right| V_{q'}(p'',p')\, D_{q,q''}(p,p''),\\
g_2(\tau) &= S\left|e^{\xi} + \frac{\omega_2}{P_0}\right| V_{q''}(p'',p')\, D_{q,q'}(p,p''),\\
g_3(\tau) &= S\left|\frac{1}{2ch\xi} + \frac{\omega_3}{P_0}\right| D_{-q',q''}(p'',p')\, V_q(p,p'')\\
h_1(\tau) &= S\left|e^{-\xi} + \frac{\omega_1}{P_0}\right| D_{q,q''}(p'',p')\, V_{q'}(p,p'')\\
h_2(\tau) &= S\left|e^{\xi} + \frac{\omega_2}{P_0}\right| D_{q,q'}(p'',p')\, V_{q''}(p,p'')\\
h_3(\tau) &= S\left|\frac{1}{2ch\xi} + \frac{\omega_3}{P_0}\right| V_q(p'',p')\, D_{-q',q''}(p,p'').
\end{aligned} \qquad (2.11)$$

Теперь ясно, что $ST^{ret}(\omega,\lambda\vec{e},\tau)$ и $ST^{adv}(\omega,\lambda\vec{e},\tau)$ действительно представляют собой одну и ту же аналитическую функцию $ST(\omega,\tau)$ (2.5), регулярную в области $\mathcal{Y}_m\,\omega \neq 0$ с линиями разреза вдоль действительной оси при $-\infty < \omega < -\omega_c$ и $\omega_c < \omega < \infty$ и полюсами первого порядка в точках $\pm\omega_\ell$

В работе [5] показано, что функции типа (2.3) возрастают на бесконечности $(|\omega| \to \infty)$ не быстрее полинома. Обозначим через   степень этого полинома. Тогда, применяя теорему Коши с контуром   (рис. I) к функции

$$\frac{-1}{(\omega-\omega_0)^{n+1}}\ ST(\omega,\tau),\quad |\omega_0|<\omega_c,\quad \omega_0\neq\pm\omega_\ell;$$

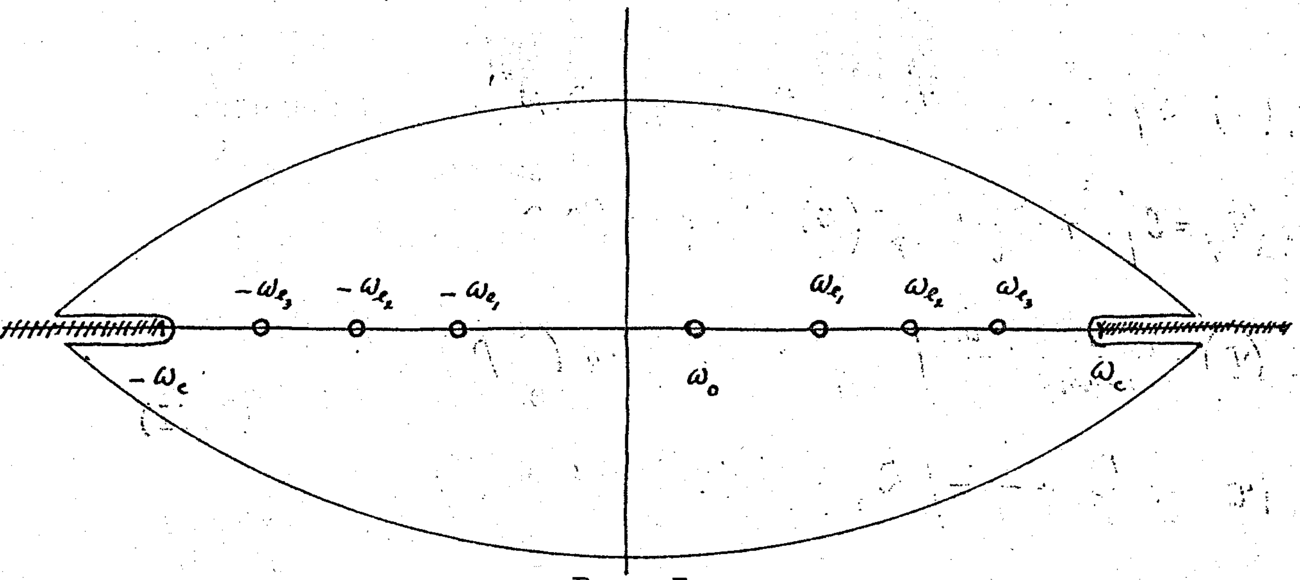

Рис. I

и устремляя радиус большой окружности к бесконечности, а радиусн малых – к нулю, получим

$$ST(\omega,\tau)=\frac{1}{\pi}(\omega-\omega_0)^{n+1}\int\limits_{|\omega'|>\omega_c}^{\infty}\frac{\mathcal{F}(\omega',\tau)}{(\omega'-\omega_0)^{n+1}(\omega'-\omega)}\,d\omega'+\left\{\prod_{\ell=1}^{3}(\omega_\ell^2-\omega^2)\right\}^{-1}\mathcal{P}(\omega,\tau) \tag{2,I2}$$

где $\mathcal{P}(\omega,\tau)$ полином от ω $n+6$ степени:

$$\left\{\prod_{\ell=1}^{3}(\omega_\ell^2-\omega^2)\right\}^{-1}\mathcal{P}(\omega,\tau)=$$
$$=\sum_{\ell=1}^{3}\left\{\left(\frac{\omega_0-\omega}{\omega_0-\omega_\ell}\right)^{n+1}\frac{g_\ell(\tau)}{\omega_\ell-\omega}+\frac{\omega_0-\omega}{\omega_0+\omega_\ell}\ \frac{h_\ell(\tau)}{\omega_\ell+\omega}\right\}+$$
$$+\sum_{k=0}^{n}C_k(\omega_0,\tau)\,\omega^k \tag{2.I3}$$

§ 3. Аналитическое продолжение дисперсионных соотношений

Чтобы осуществить переход в (2.12) от значений τ определяемых (1.19) к значению $\tau = \tau_0 \equiv \mu^2 ch^2 \xi + m_\Delta^2$ (реальный случай), необходимо совершить аналитическое продолжение по переменной τ. Для этой цели мы воспользуемся следующей теоремой[x)].

ТЕОРЕМА. Для вещественных ω, τ и $\lambda(\omega,\tau)$ /см.(1.15)/ функция $\mathcal{F}(\omega,\tau)$ /определяемая выражением (2.10)/ может быть представлена в виде

$$\mathcal{F}(\omega,\tau) = \sum_{\ell=1}^{3} \left\{ F_{\ell+}(\tau_{\ell+},\tau) + F_{\ell-}(\tau_{\ell-},\tau) \right\} \tag{3.1}$$

где

$$\tau_{\ell\pm} = \beta_\ell \tau \pm 2ch\,\xi\, p_0\, \omega, \tag{3.2}$$

$$\beta_1 = 1 - th\,\xi, \quad \beta_2 = 1 + th\,\xi, \quad \beta_3 = 2$$

Функции $F_{\ell\pm}(\zeta,\tau)$ удовлетворяют следующим свойствам:

а) $F_{\ell\pm}(\zeta,\tau)$ – обобщенные функции переменной ζ.

в) $F_{\ell\pm}(\zeta,\tau)$ – аналитические функции переменной ζ, регулярные в области:

---

x) Аналогичная теорема выдвигается в качестве гипотезы и в работе Kibble /1/.

$$\mathcal{E}: \quad \tau_1 < Re\,\tau < \tau_0 + \rho\mu^2, \quad |\mathcal{I}_m \tau| < \rho\mu^2 \tag{3.3}$$

a) $F_{\ell\pm}(\zeta_\ell, \tau) = 0$ если $\zeta_\ell < \nu_\ell (2M\mu + \mu^2) + M_\Delta^2 - \tilde{p}^2 + \gamma_\ell$

(3.4)

где

$$\nu_1 = e^{-\xi} ch\,\xi \;, \quad \nu_2 = e^{\xi} ch\,\xi \;, \quad \nu_3 = 1/2$$

$$\gamma_1 = (1 - th\,\xi)\, m_\Delta^2 - 2e^{-\xi} m_\Delta \tilde{p} \cos\alpha, \quad \gamma_2 = (1 + th\,\xi)\, m_\Delta^2 + 2e^{\xi} m_\Delta \tilde{p} \cos\alpha, \quad \gamma_3 = 0 \tag{3.5}$$

Отметим, что неравенства (3.4) эквивалентны следующим неравенствам для ω :

$$\omega < \omega_{c\ell}$$

где ω_{c_ℓ} являются границами непрерывных спектров δ -функций выражения (2.7).

Воспользуемся сформулированной теоремой и подставим (3.I) в (2.I2). После замены переменных получим

$$\left\{ ST(\omega,\tau) - N(\omega,\tau) \right\} \prod_{\ell=1}^{3} (\omega_\ell^2 - \omega^2) = P(\omega,\tau) \tag{3.6}$$

где

$$N(\omega,\tau) = \frac{(ch\,\xi \cdot P_0)^{n+1}}{\pi} (\omega - \omega_0)^{n+1} \sum_{\ell=1}^{3} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_{\ell+}(\zeta,\tau)\, d\zeta}{(\zeta - \beta_\ell \tau + 2\, ch\,\xi\, P_0 \omega_0)^{n+1} (\zeta - \beta_\ell \tau - 2 ch\,\xi\, P_0 \omega)} + \right.$$

$$\left. + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F_{\ell-}(\zeta,\tau)\, d\zeta}{(\zeta - \beta_\ell \tau + 2\, ch\,\xi\, P_0 \omega_0)^{n+1} (\zeta - \beta_\ell \tau + 2 ch\,\xi\, P_0 \omega)} \right\}$$

(3.7)

Функция $N(\omega,\tau)$ является аналитической функцией ω и τ (при нашем выборе ω_0) в пересечении областей $g \cap \mathcal{E}$, где $\mathcal{E}$ дается (3.3), а область g определяется неравенством

$$g: \qquad |\mathrm{Im}\,\tau| < ch\,\xi\, \rho_0\, |\mathrm{Im}\,\omega| \tag{3.8}$$

С другой стороны, мы установили ранее, что функция ST регулярна в области

$$\mathcal{D}: \qquad |\mathrm{Im}\,\omega| > |\mathrm{Im}\,\lambda(\omega,\tau)| \tag{3.9}$$

Следовательно, функция

$$\left\{ ST(\omega,\tau) - N(\omega,\tau) \right\} \prod_{\ell=1}^{3} (\omega_\ell^2 - \omega^2)$$

аналитичная в пересечении $\mathcal{E} \cap g \cap \mathcal{D}$. Но для вещественных значений τ , ограниченных неравенством

$$\tau_1 < \tau < \tau_2$$

она согласно дисперсионному соотношению (3.6) является полиномом по ω . В силу единственности аналитического продолжения она будет полиномом по ω и во всей области аналитичности $\mathcal{E} \cap g \cap \mathcal{D}$. Следовательно, коэффициенты полинома $\mathcal{P}(\omega,\tau)$ могут быть аналитически продолжены на некоторую область комплексных значений τ . Покажем, что эта область включает в себя область $\mathcal{E}$.

Возьмем любое $\tau_\pm$ из области $\mathcal{E}$, для которого $\mathrm{Im}\,\tau \neq 0$

$$\tau_\pm = \tau_r \pm i\delta$$

$$0 < \delta < \rho\mu^2, \quad \tau_1 < \tau_r < \mu^2 ch^2\xi + m_\Delta^2 + \rho\mu^2 \tag{3.10}$$

Для данного $\tau_\pm$ выберем $\omega_\pm$ следующим образом

$$\omega_\pm = \omega_\tau \pm i\, b/c\, \omega_\tau \delta,$$

где (3.11)

$$b \equiv \frac{1}{ch^2\xi \sin^2\alpha}\left\{\frac{sh^2\xi}{m_\Delta^2}\tau_\tau + \frac{\sin^2\alpha}{2} + \frac{M_\Delta^2-\tilde{p}^2}{2\tilde{p}m_\Delta}\, sh\xi \cos\alpha\right\}$$

$$ch^2\xi \cdot \sin^2\alpha \cdot c = \frac{sh^2\xi}{m_\Delta^2}\left(\tau_\tau^2-\delta^2\right) + \left(\sin^2\alpha + \frac{M_\Delta^2-\tilde{p}^2}{\tilde{p}m_\Delta}\, sh\xi \cos\alpha\right)\tau_\tau +$$

$$+\frac{(M_\Delta^2-\tilde{p}^2)^2}{4\tilde{p}^2}, \qquad c<\omega_\tau^2<b^2(\tilde{p}^2+M^2)ch^2\xi\ ^{*)} \tag{3.12}$$

Покажем, что при таком выборе $\omega_\pm$ точки ($\omega_\pm, \tau_\pm$) принадлежат пересечению $\mathcal{E} \cap \mathcal{G} \cap \mathcal{D}$. $\tau_\pm$ принадлежат области $\mathcal{E}$ по построению. Проверим сначала, что например (ω_+, τ_+) лежит в области $\mathcal{D}$. Согласно (3.9) область $\mathcal{D}$ определяется неравенством:

$$(\mathrm{Im}\ \omega)^2 > (\mathrm{Im}\ \lambda\ (\omega,\tau))^2 \tag{3.13}$$

Принимая во внимание соотношение

$$2\left(\mathrm{Im}\sqrt{u+iv}\right)^2 = \sqrt{u^2+v^2} - u$$

и учитывая, что

$$\mathrm{Re}\,\lambda^2 = \omega_\tau^2\left(1-\frac{b^2}{c^2}\right)\delta^2 - c$$

$$\mathrm{Im}\,\lambda^2 = 2b\delta\left(\frac{\omega_\tau^2}{c}-1\right)$$

из (3.13) получим:

$$\omega_r^2\left(1+{b^2}/{c^2\delta^2}\right)-c > \sqrt{\left[\omega_r^2\left(1+{b^2}/{c^2\delta^2}\right)-b\right]^2-4b^2\delta^2\left(\frac{\omega_r^2}{c}-1\right)} \qquad (3.14)$$

Легко видеть, что неравенство (3.I4) имеет место тогда и только тогда, когда

$$\omega_r^2 > c \qquad (3.15)$$

что совпадает с первым неравенством (3.I2). (ω_+, τ_+)

Таким образом, мы показали, что пара принадлежит области $\mathcal{D}$. Аналогично можно показать, что $(\omega_-, \tau_-) \in \mathcal{D}$ Проверим, что $(\omega_\pm, \tau_\pm) \in g$. В силу (3.8) это означает, что

$$c < \rho_0 \, ch\,\xi \, b\,\omega_r \qquad (3.16)$$

Но так как согласно (3.I5)

$$\omega_r/c > 1/\omega_r$$

неравенство (3.I6) можно заменить более сильным неравенством

$$\omega_r < b\rho_0\, ch\,\xi$$

что тождествено второму неравенству (3.I2).

---

x) Сноска к стр. I6.
Можно показать, что существует некоторая область значений параметров ξ , α, $\tilde{\rho}$, m_Δ , при которых

$$c < b^2(\tilde{\rho}^2+M^2)\,ch^2\xi, \quad \omega_c^2 < b^2(\tilde{\rho}^2+M^2)\,ch^2\xi$$

и вместе с этим однонуклонные полюса $\pm\,\omega_e$ лежат до непрерывного спектра ω_c (2.9).

Как известно, аналогичные ограничения возникают и при доказательстве дисперсионных соотношений для упругого рассеяния.

Итак, мы показали, что точки $(\omega_\pm, \tau_\pm) \in \mathcal{E} \cap g \cap \mathcal{D}$. Отсюда следует, что коэффициенты полинома $\mathcal{P}(\omega, \tau)$ будут аналитическими по τ во всей области $\mathcal{E}$ с возможной линией разреза вдоль вещественной оси τ. Покажем, что такая линия разреза на самом деле не существует. Для этого заметим, что в силу (3.7)

$$\lim_{\delta \to +0} N(\omega_\pm, \tau_\pm) = \lim_{\epsilon \to +0} N(\omega_r \pm i\epsilon, \tau_r) \tag{3.17}$$

Используя (3.7) и (3.17), получим:

$$\lim_{\delta \to +0} \left[N(\omega_+, \tau_+) - N(\omega_-, \tau_-)\right] = 2i \sum_{\ell=1}^{3} \left[F_{\ell+}(\beta_\ell \tau_r + 2\rho_0 \omega_r \operatorname{ch}\xi, \tau_r) + \right.$$
$$\left. + F_{\ell-}(\beta_\ell \tau_r - 2\rho_0 \omega_r \operatorname{ch}\xi, \tau_r)\right] = 2i\,\mathcal{F}(\omega_r, \tau_r) \tag{3.18}$$

С другой стороны, так как $(\omega_\pm, \tau_\pm) \in \mathcal{D}$, то на основании (2.3) имеем

$$\lim_{\delta \to +0} \left[ST(\omega_+, \tau_+) - ST(\omega_-, \tau_-)\right] = \left[ST^{ret}(\omega_r, \tau_r) - ST^{adv}(\omega_r, \tau_r)\right] = 2i\,\mathcal{F}(\omega_r, \tau_r) \tag{3.19}$$

Комбинируя (3.18) и (3.19) получим:

$$\lim_{\delta \to +0} \left[ST(\omega_+, \tau_+) - N(\omega_+, \tau_+)\right] = \lim_{\delta \to +0} \left[ST(\omega_-, \tau_-) - N(\omega_-, \tau_-)\right]$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{\delta \to +0} \mathcal{P}(\omega_r, \tau_+) = \lim_{\delta \to +0} \mathcal{P}(\omega_r, \tau_-), \tag{3.20}$$

т.е. что функция $\mathcal{P}(\omega, \tau)$ непрерывна при переходе τ через вещественную ось. Из этого следует, что линия разреза вдоль вещественной оси τ отсутствует, и значит $\mathcal{P}(\omega,\tau)$ является аналитической функцией τ во всей области $\mathcal{E}$.

Ранее было установлено, что функция $N(\omega,\tau)$ аналитична в области $\mathcal{E}\cap\mathcal{G}$. Теперь мы показали, что вся правая часть (2.12) также является аналитической функцией в этой области. Это означает, что мы можем расширить область определения функции $ST(\omega,\tau)$ так, чтобы она совпадала с правой частью (2.12) во всей области $\mathcal{E}\cap\mathcal{G}$. В эту область входит и значение $\tau=\tau_0=\mu^2 ch^2\xi+m_\Delta^2$, отвечающее реальному процессу $(p+\pi\to p'+\pi'+\pi'')$, и, следовательно, дисперсионные соотношения (2.12) имеют место и при $\tau=\tau_0$. Определяя (как обычно) эрмитову часть амплитуды равенством

$$D(\omega)=\tfrac{1}{2}\left(T^{ret}(\omega)+T^{adv}(\omega)\right) \tag{3.21}$$

и учитывая, что

$$\lim_{\epsilon\to+0} ST(\omega\pm i\epsilon,\tau)=ST^{ret}_{adv}(\omega,\tau) \tag{3.22}$$

получим дисперсионные соотношения:

$$SD(\omega)=\frac{(\omega-\omega_0)^{n+1}}{\pi}\mathcal{P}\int\limits_{\substack{|\omega|>\omega_c\\ \mathrm{Im}\,\omega=0}}\frac{SA(\omega')}{(\omega'-\omega)(\omega'-\omega_0)^{n+1}}d\omega'+\left\{\prod_{\ell=1}^{3}(\omega_\ell^2-\omega^2)\right\}^{-1}\mathcal{P}(\omega,\tau) \tag{3.23}$$

§ 4. Анализ однонуклонных членов

В настоящем параграфе мы покажем как можно вычислить коэффициенты $g_1(\tau_0)$, $g_2(\tau_0)$, $h_1(\tau_0)$, $h_2(\tau_0)$ разложения (2.I0), исходя из дисперсионных соотношения для упругого рассеяния. Для этой цели мы исследуем аналитические свойства вершинных частей $V_{q'}(p'',p')$, $V_{q''}(p'',p')$, $V_{q'}(p,p'')$, $V_{q''}(p,p'')$ и операторов $D_{q,q''}(p,p'')$, $D_{q,q'}(p,p'')$, $D_{q,q''}(p'',p')$, $D_{q,q'}(p'',p')$.

Так как исследование перечисленных выше вершинных частей аналогично, мы ограничимся рассмотрением лишь одной из них, например

$$V_{q'}(p,p'') = \langle p''/j_{\rho'}(0)/p\rangle \tag{4.I}$$

Согласно (2.I0) и (2.II)

$$p'' = p - q', \quad \omega = -\omega_1 \tag{4.2}$$

$$2\,ch\,\xi\, P_0\,\omega_1 = (1-th\,\xi)(m_\Delta^2-\tau) + M_\Delta^2 - \tilde{p}^2 - 2\ell^{-\xi} m_\Delta\, \tilde{p}\cos\alpha \tag{4.3}$$

Так как при $\tau_1 < \tau < \tau_2$ 4-вектор p'' вещественен, а $p_0'' > 0$, $p''^2 = M^2$, его можно рассматривать как 4-импульс реального нуклона, и, следовательно,

$$V_{q'}(p,p'') = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\,\bar{u}(p'')\,t^{ret}(p'') \tag{4.4}$$

где

$$t^{ret}_{(p'')} \equiv \int \langle 0 \left| \frac{\delta j_{\rho'}(0)}{\delta\bar{\varphi}(x)} \right| p\rangle e^{ip''x}\,dx \tag{4.5}$$

Кроме запаздывающей амплитуды (4.5) нам понадобится опережающая амплитуда

$$t^{adv}(p'') = \int \langle 0 \left| \frac{\delta J(x)}{\delta \varphi_{p'}(0)} \right| p \rangle e^{ip''x} dx \tag{4.6}$$

где $J(x)$ – фермионный ток:

$$J(x) = i \frac{\delta S}{\delta \bar{\varphi}(x)} S^+, \quad \bar{J}(x) = i \frac{\delta S}{\delta \varphi(x)} S^+ \tag{4.7}$$

(вариационная производная по $\bar{\varphi}(x)$ берется слева, а по $\varphi(x)$ справа).

Имея в виду, что

$$\frac{\delta j_{p'}(0)}{\delta \bar{\varphi}(x)} - \frac{\delta J(x)}{\delta \varphi_{p'}(0)} = i \left[j_{p'}(0), J(x) \right]$$

легко показать, что

$$t^{ret}(p'') = t^{adv}(p'') \tag{4.8}$$

если

$$\alpha_1 \equiv p_0 - 3\mu < p_0'' < M + \mu \equiv \alpha_2 \tag{4.9}$$

В дальнейшем мы воспользуемся следующей теоремой Н.Н.Боголюбова и В.С.Владимирова /6/.

Пусть обобщенные функции $\mathcal{F}^{ret}(x)$ и $\mathcal{F}^{adv}(x)$ обладают свойствами:

$$\mathcal{F}^{ret}(x) = 0 \qquad \text{если} \quad x \leq 0$$

$$\mathcal{F}^{adv}(x) = 0 \qquad \text{если} \quad x \geq 0$$

а их Фурье-образы $\tilde{\mathcal{F}}^{ret}(p)$ и $\tilde{\mathcal{F}}^{adv}(p)$ совпадают при вещественных значениях p, для которых

$$\alpha_1 < p_0 < \alpha_2$$

Тогда существует функция $\tilde{\phi}(p)$ комплексного 4-вектора, аналитическая в области

$$\left| \mathcal{I}_m \vec{p} \right| < \left| \mathcal{I}_m \sqrt{(p^0-\alpha_1)(p^0-\alpha_2)} \right| \qquad (4.10)$$

такая, что при вещественных p, для которых $\alpha_1 < p_0 < \alpha_2$

$$\tilde{\phi}(p) = \tilde{\mathcal{F}}^{ret}(p) = \tilde{\mathcal{F}}^{adv}(p)$$

Неравенство (4.10), примененное к вектору p'', может быть записано в виде

$$e^{\xi} \left| \mathcal{I}_m \lambda(\omega, \tau) \right| < \left| \mathcal{I}_m \sqrt{(p_0 + e^{\xi}\omega_1 - M - \mu)(e^{\xi}\omega_1 + 3\mu)} \right|$$

При $\tau = \tau_0$ это неравенство принимает вид

$$e^{2\xi}(Q^2+L^2) < 3\mu(M+\mu-p_0) + e^{\xi}(M-2\mu-p_0)\,\omega_1 \qquad (4.11)$$

Легко проверить, что (4.11) на самом деле имеет место при соответствующих ограничениях на параметры ξ, α, m_Δ и $\tilde{p}$, совместимых с наложенными раньше (см. подстрочное замечание к формуле (3.12)). Следовательно, функция $t^{ret}(p'')$ может быть аналитически продолжена по τ до $\tau = \tau_0$. Из соображений релятивистской инвариантности оператор $V_{q'''}(p, p'')$ имеет следующий вид:

$$V_{q'}(p,p'') = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \bar{u}(p'')\gamma_5 \tau_{\rho'} g(q'^2) u(p)$$

$$q'^2 = \frac{\tau - m_\Delta^2}{ch^2 \xi} \qquad (4.I2)$$

Сравнивая (4.4) с (4.I2), находим

$$t^{ret}(p'') = \gamma_5 \tau_{\rho'} g(q'^2) u(p) \qquad (4.I3)$$

Так как мы установили, что левую часть (4.I3) можно аналитически продолжить до $\tau = \tau_0$, отсюда следует, что функция $g(q'^2)$ также может быть аналитически продолжена до $\tau = \tau_0$. Так как в силу эрмитовости тока $j_{\rho'}$ функция $g(q'^2)$ является вещественной для $\tau_1 < \tau < \tau_2$, то она будет вещественной и при $\tau = \tau_0$. Величина $g(\mu^2)$ может быть отождествлена с мезонным зарядом g (см. Боголюбов и Ширков[7]).

Перейдем к исследованию аналитических свойств операторов $\mathcal{D}$. Рассмотрим например оператор

$$\mathcal{D}_{q,q''}(p'',p') = 2^{-4}\int e^{i\frac{q+q''}{2}x} \left\langle p' \left| \frac{\delta j_\rho(-\frac{x}{2})}{\delta \varphi_{\rho'}(\frac{x}{2})} + \frac{\delta j_{\rho'}(\frac{x}{2})}{\delta \varphi_\rho(-\frac{x}{2})} \right| p'' \right\rangle dx$$

Импульсы p', p'' определяются законом сохранения (I.I2) и соотношением (4.2).

Выражение (4.I4) формально тождественно с эрмитовой частью амплитуды процесса $p'' + \pi \to p' + \pi''$. Из соображения релятивистской инвариантности оно может быть записано в виде:

$$\mathcal{D}_{q,q''}(p'',p') = \sum_s \bar{u}(p') R_s u(p'') \operatorname{Re}\Omega^s(\nu,\nu_1) \qquad (4.I5)$$

где
$$\nu = \tfrac{1}{2}(p' + p'')q'' , \quad \nu_1 = -\left(\frac{q'' - q}{2}\right)^2$$

В нашем случае импульсы p'', p', q, q'' связаны не только законом сохранения

$$p'' + q = q'' + p'$$

но и соотношением (I.I2). Следовательно,

$$\nu = -e^{\xi} p_0 \omega_1 - \frac{m_\Delta^2 + ch 2\xi \tau}{2 ch^2 \xi} \qquad (4.16)$$

$$\nu_1 = \frac{m_\Delta^2 - \tau}{4 ch^2 \xi} + e^{\xi} \frac{ch^2 \xi - \frac{1}{4}}{2 ch \xi} \mu^2 + \frac{1}{2 ch \xi} \left(e^{\xi/2} \vec{\Delta} - e^{-\xi/2} \vec{p}\right)^2$$

Очевидно, что $\nu_1(\tau) > \nu_1(\tau_0)$, где

$$\nu_1(\tau_0) = \frac{e^{3\xi}}{8 ch \xi} \mu^2 + \frac{1}{2 ch \xi} \left(e^{\xi/2} \vec{\Delta} - e^{-\xi/2} \vec{p}\right)^2 > 0 \qquad (4.17)$$

Дисперсионные соотношения для процесса упругого рассеяния связывают $Re\,\Omega^s(\nu, \nu_1)$ с $Im\,\Omega^s(\nu, \nu_1)$. Обычно эти дисперсионные соотношения записываются в системе отсчета, в которой

$$\vec{p}_c' + \vec{p}_c'' = 0 \qquad (4.18)$$

В этой системе отсчета инварианты ν и ν_1 имеют следующий смысл:

$$\nu_1 = \vec{p}_c'^{\,2} , \qquad \nu = p_{c_0}' E \qquad (4.19)$$

где $E = q_{c_0} = q_{c_0}''$ – энергия мезонов в системе (4.I8).

Из формул (4.I6) и (4.I9) видно, что величина $\vec{p}_c'^{\,2}$ положительна для всех $\tau \le \tau_0$. Отсюда, по-видимому, можно заключить, что $\mathcal{D}$ может быть аналитически продолжена до $\tau = \tau_0$. Но так как при $\tau = \tau_0$ величина E лежит ниже порога упругого процесса, то ее следует вычислять через дисперсионный интеграл.

В заключение выражаем глубокую благодарность академику Н.Н.Боголюбову и В.С.Владимирову за ценные обсуждения работы.

x x

x

Литература

I. T.W.Kibble, Proc.Roy.Soc., 244, 355 (1958).

2. А.А.Логунов и А.Н.Тавхелидзе, Nuclear Physics (в печати).

3. А.А.Логунов и А.Н.Тавхелидзе, Nuovo Cimento (в печати).

4. А.А.Логунов, С.М.Биленький и А.Н.Тавхелидзе, Nuovo Cimento (в печати).

5. Н.Н.Боголюбов и В.С.Владимиров, Научные доклады высшей школы, (в печати).

6. Н.Н.Боголюбов и В.С.Владимиров, препринт ОИЯИ.

7. Н.Н.Боголюбов и Д.В.Ширков, Введение в теорию квантованных полей, Москва, 1957.

x x

x