ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р-2186

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

П.Н. Боголюбов

О СОСТАВНОЙ МОДЕЛИ БАРИОНОВ НА ОСНОВЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ТРЕХ ЧАСТИЦ

1965

3393/5 гр.

P - 2186

П.Н. Боголюбов

О СОСТАВНОЙ МОДЕЛИ БАРИОНОВ НА ОСНОВЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ТРЕХ ЧАСТИЦ

§ 1. Введение

В настоящей работе рассматриваются модели барионов как связанных состояний трех кварков. Главной задачей работы является получение уравнения БНССТШ [1], на основе уравнения для трех частиц:

$$\{(\partial_1 - M)(\partial_2 - M)(\partial_3 - M) + MV_{1,2,3}\}\psi = 0 . \tag{1.1}$$

Здесь $\psi = \psi_{a_1, a_2, a_3}(x_1, x_2, x_3)$ -спинор, зависящий от трех спинорных индексов a_1, a_2, a_3 = 1,2,3,4. Более детально можно написать: $\psi = \psi_{A_1 a_1, A_2 a_2, A_3 a_3}$, но здесь индексы кварков мы будем опускать. В уравнении (1.1)

$$\partial_j = \sum_{\nu=0}^{3} \gamma_j^{(\nu)} \left(i \frac{\partial}{\partial x_j^{\nu}} + e_j A_{\nu}(x_j) \right), \tag{1.2}$$

где $\gamma_j^{(\nu)}$ -обычные дираковские матрицы $\gamma^{(\nu)}$, действующие на спинорный индекс a_j, $A_{\nu}(x_j)$ -слабое внешнее электромагнитное поле, $V_{1,2,3}$ -член, представляющий взаимодействие между тремя кварками, зависящий от трех релятивистских скаляров:

$$R_1^2 = (\bar{x}_2 - \bar{x}_1)^2 - (x_2^0 - x_1^0)^2 ,$$

$$R_2^2 = (\bar{x}_3 - \bar{x}_1)^2 - (x_3^0 - x_1^0)^2 ,$$

$$R_3^2 = (\bar{x}_3 - \bar{x}_2)^2 - (x_3^0 - x_2^0)^2 ;$$

M -масса, которая принимается весьма большой. Как и в предыдущей работе [2], мы будем вводить в $V_{1,2,3}$ матричную структуру с помощью матриц $\gamma_j^{(5)}$. Здесь будет более удобно иметь дело с эрмитовскими матрицами $\rho_j = i\gamma_j^{(5)}$, для которых $\rho_j^2 = 1$. Так как в уравнонии (1.1) выражение

$$(\partial_1 - M)(\partial_2 - M)(\partial_3 - M)$$

преобразуется как скаляр, нужно, чтобы и $V_{1,2,3}$ было скаляром. Но нечетная форма из ρ_j будет, очевидно, псевдоскаляром. Поэтому для обеспечения правильных трансформационных свойств основного уравнения (1.1), можно вводить в $V_{1,2,3}$ только четные формы из ρ_j. В качестве простейшего варианта возьмем квадратичную форму и, из соображений симметрии кварков, положим:

$$V_{1,2,3} = (\rho_1\rho_2+\rho_1\rho_3+\rho_2\rho_3)\, W(R_1^2, R_2^2, R_3^2), \tag{1.3}$$

где W –симметричная функция трех переменных R_1^2, R_2^2, R_3^2. Подчеркнем, что, как и в работе /2/, мы будем рассматривать уравнение (1.1) не в связи с какой-либо схемой квантовой теории поля, а просто как релятивистски-инвариантное обобщение простейшей модели /3/, в которой один кварк находится в некоторой эффективной потенциальной яме, компенсирующей основную часть большой массы M. В уравнении (1.1) главный массовый член будет $-M^3$, максимальное собственное значение суммы

$$\rho_1\rho_2+\rho_1\rho_3+\rho_2\rho_3$$

равно трем, и потому, в соответствии с положением о компенсации массы, будем считать, что:

$$W = \frac{M^2 - U(R_1^2, R_2^2, R_3^2)}{3}. \tag{1.4}$$

Чтобы, грубо говоря, взаимодействие не компенсировало больше массы, чем ее есть, предположим, что

$$U(R_1^2, R_2^2, R_3^2) > 0 \quad \text{при} \quad R_j^2 > 0. \tag{1.5}$$

Итак, основное уравнение будет:

$$\{(\partial_1 - M)(\partial_2 - M)(\partial_3 - M) + \frac{\rho_1\rho_2+\rho_1\rho_3+\rho_2\rho_3}{3}(M^3 - MU(R_1^2, R_2^2, R_3^2))\}\psi = 0. \tag{1.6}$$

Для получения окончательных приближенных уравнений в наиболее простом виде мы также воспользуемся предельным переходом при $M \to \infty$.

§ 2. Связанные состояния в отсутствие внешнего электромагнитного поля

Рассмотрим случай отсутствия электромагнитного поля, когда $A_\nu = 0$. В этом случае в уравнении (1.6)

$$\partial_j = i \sum_{\nu=0}^{3} \gamma_j^{(\nu)} \left(\frac{\partial}{\partial x_j^\nu}\right). \tag{2.1}$$

Возьмем эрмитовский оператор пространственного отражения:

$$I_{1,2,3} = \gamma_1^{(0)}\gamma_2^{(0)}\gamma_3^{(0)}\Lambda_{x_1}\Lambda_{x_2}\Lambda_{x_3}.$$

Λ_{x_j} –оператор замены знака пространственных координат точки x_j. Как видно, $I^2_{1,2,3} = 1$, и поэтому собственные значения I равны ± 1. Рассмотрим соответствующие уравнения для собственных функций этого оператора:

$$\psi' = I_{1,2,3}\psi = \psi, \tag{2.2}$$

$$\psi' = I_{1,2,3}\psi = -\psi. \tag{2.3}$$

Так как оператор $I_{1,2,3}$ коммутирует с оператором

$$(\partial_1 - M)(\partial_2 - M)(\partial_3 - M) + \frac{\rho_1\rho_2+\rho_1\rho_3+\rho_2\rho_3}{3}(M^3 - MV),$$

то в рассматриваемом случае уравнение (1.6) будет совместно как с условием (2.2), так и с условием (2.3). Заметим, что для ψ с тремя спинорными индексами (в отличие от работы /2/) условия (2.2) и (2.3) по существу эквивалентны, так как знак ψ не фиксирован. Действительно, совершив поворот трех четырехвекторов вокруг одной пространственной оси на 2π, видим, что знак ψ меняется на обратный, т.е. условие (2.2) переходит в (2.3) и наоборот. Таким образом, мы можем произвольно принять (2.2) или (2.3). Примем для определенности (2.2). Тогда закон преобразования спинора ψ в общем случае будет:

$$\gamma_1^{(0)}\gamma_2^{(0)}\gamma_3^{(0)}\Lambda_{x_1}\Lambda_{x_2}\Lambda_{x_3}\psi = \psi'. \tag{2.4}$$

Перейдем теперь к упрощению уравнения (1.6) с помощью предельного перехода $M \to \infty$. Для этого запишем его более подробно:

$$\mathfrak{L}\psi = \{\partial_1\partial_2\partial_3 - M(\partial_1\partial_2+\partial_1\partial_3+\partial_2\partial_3) + M^2(\partial_1+\partial_2+\partial_3) - M^3 + \tag{2.5}$$

$$+\frac{M^3}{3}(\rho_1\rho_2+\rho_1\rho_3+\rho_2\rho_3)-\frac{M}{3}(\rho_1\rho_2+\rho_1\rho_3+\rho_2\rho_3)U(R_1^2,R_2^2,R_3^2)\}\psi=0.$$

Рассмотрим возможные собственные значения коммутирующих операторов:

$$(\rho_1\rho_2),\quad (\rho_1\rho_3),\quad (\rho_2\rho_3). \tag{2.6}$$

Заметим, что любой из этих операторов равен произведению двух остальных. Поэтому их возможные собственные значения или все равны 1, или два из них 1, а остальные −1.

(0)	$\rho_1\rho_2$	$\rho_1\rho_3$	$\rho_2\rho_3$
(0)	1	1	1
(1)	−1	−1	1
(2)	−1	1	−1
(3)	1	−1	−1

(2.7)

Представим произвольное ψ в виде суммы собственных функций системы операторов (2.6):

$$\psi=\psi_0+\psi_1+\psi_2+\psi_3. \tag{2.8}$$

Здесь ψ_j обозначает собственную функцию системы (2,6), соответствующую собственным значениям из строки (j) таблицы (2.7). Для этого введем проекционные операторы:

$$\begin{aligned}
\Gamma_0 &= \frac{1}{8}(1+\rho_1\rho_2)(1+\rho_1\rho_3)(1+\rho_2\rho_3),\\
\Gamma_1 &= \frac{1}{8}(1-\rho_1\rho_2)(1-\rho_1\rho_3)(1+\rho_2\rho_3),\\
\Gamma_2 &= \frac{1}{8}(1-\rho_1\rho_2)(1+\rho_1\rho_3)(1-\rho_2\rho_3),\\
\Gamma_3 &= \frac{1}{8}(1+\rho_1\rho_2)(1-\rho_1\rho_3)(1-\rho_2\rho_3).
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Проведя умножение, получим:

$$\begin{aligned}
\Gamma_0 &= \frac{1}{4}(1+\rho_1\rho_2+\rho_1\rho_3+\rho_2\rho_3),\\
\Gamma_1 &= \frac{1}{4}(1-\rho_1\rho_2-\rho_1\rho_3+\rho_2\rho_3),\\
\Gamma_2 &= \frac{1}{4}(1-\rho_1\rho_2+\rho_1\rho_3-\rho_2\rho_3),\\
\Gamma_3 &= \frac{1}{4}(1+\rho_1\rho_2-\rho_1\rho_3-\rho_2\rho_3),
\end{aligned} \tag{2.10}$$

откуда $\sum_{j=0}^{3}\Gamma_j=1$, и поэтому $\psi=\sum_{j=0}^{3}\Gamma_j\psi$. Покажем, что это и будет представление (2.8), т.е. что

$$\Gamma_j\psi=\psi_j.$$

Действительно, по самому определению операторов Γ (2,9), имеем

$$\begin{aligned}
&(1-\rho_1\rho_2)\Gamma_0=(1-\rho_1\rho_3)\Gamma_0=(1-\rho_2\rho_3)\Gamma_0=0,\\
&(1+\rho_1\rho_2)\Gamma_1=(1+\rho_1\rho_3)\Gamma_1=(1-\rho_2\rho_3)\Gamma_1=0,\\
&(1+\rho_1\rho_2)\Gamma_2=(1-\rho_1\rho_3)\Gamma_2=(1+\rho_2\rho_3)\Gamma_2=0,\\
&(1-\rho_1\rho_2)\Gamma_3=(1+\rho_1\rho_3)\Gamma_3=(1+\rho_2\rho_3)\Gamma_3=0.
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что для проекций (2.10)

$$\begin{aligned}
&\rho_1\rho_2\psi_0=\psi_0; &&\rho_1\rho_3\psi_0=\psi_0; &&\rho_2\rho_3\psi_0=\psi_0.\\
&\rho_1\rho_2\psi_1=-\psi_1; &&\rho_1\rho_3\psi_1=-\psi_1; &&\rho_2\rho_3\psi_1=\psi_1.\\
&\rho_1\rho_2\psi_2=-\psi_2; &&\rho_1\rho_3\psi_2=\psi_2; &&\rho_2\rho_3\psi_2=-\psi_2.\\
&\rho_1\rho_2\psi_3=\psi_3; &&\rho_1\rho_3\psi_3=-\psi_3; &&\rho_2\rho_3\psi_3=-\psi_3.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Возвратимся теперь к уравнению (2.5) и преобразуем его в уравнение для ψ_j. Для этого помножим (2.5) слева на Γ_j и передвинем его направо через операторы ∂ до ψ. При перестановке Γ_j с ∂_k знак ρ_k меняется на обратный. Так, например:

$$\Gamma_0\partial_1=\partial_1\Gamma_1;\qquad \Gamma_0\partial_1\partial_2=\partial_1\partial_2\Gamma_3;$$

$$\Gamma_0\partial_1\partial_2\partial_3=\partial_1\partial_2\partial_3\Gamma_0.$$

В результате указанной процедуры получим:

$$\begin{aligned}
&\partial_1\partial_2\partial_3\psi_0-M(\partial_1\partial_2\psi_3+\partial_1\partial_3\psi_2+\partial_2\partial_3\psi_1)+M^2(\partial_1\psi_1+\partial_2\psi_2+\partial_3\psi_3)-MV\psi_0=0,\\
&\partial_1\partial_2\partial_3\psi_1-M(\partial_1\partial_2\psi_2+\partial_1\partial_3\psi_3+\partial_2\partial_3\psi_0)+M^2(\partial_1\psi_0+\partial_2\psi_3+\partial_3\psi_2)-\frac{4}{3}M^3\psi_1+\frac{M}{3}U\psi_1=0,\\
&\partial_1\partial_2\partial_3\psi_2-M(\partial_1\partial_2\psi_1+\partial_1\partial_3\psi_0+\partial_2\partial_3\psi_3)+M^2(\partial_1\psi_3+\partial_2\psi_0+\partial_3\psi_1)-\frac{4}{3}M^3\psi_2+\frac{M}{3}V\psi_2=0,\\
&\partial_1\partial_2\partial_3\psi_3-M(\partial_1\partial_2\psi_0+\partial_1\partial_3\psi_1+\partial_2\partial_3\psi_2)+M^2(\partial_1\psi_2+\partial_2\psi_1+\partial_3\psi_0)-\frac{4}{3}M^3\psi_3+\frac{M}{3}V\psi_3=0,
\end{aligned}$$

Запишем первое из этих уравнений в форме:

$$M(\partial_1\psi_1+\partial_2\psi_2+\partial_3\psi_3)-U\psi_0-(\partial_1\partial_2\psi_3+\partial_1\partial_3\psi_2+\partial_2\partial_3\psi_1)+\frac{1}{M}\partial_1\partial_2\partial_3\psi_0=0, \qquad (2.12)$$

а остальные три в следующем виде:

$$\psi_1=\left(\frac{3}{4M}\partial_1\psi_0-\frac{3}{4M^2}\partial_2\partial_3\psi_0\right)+\frac{3}{4M}(\partial_2\psi_3+\partial_3\psi_2)-\frac{3}{4M^2}(\partial_1\partial_2\psi_2+\partial_1\partial_3\psi_3)+$$
$$+\frac{1}{4M^2}U\psi_1+\frac{3}{4M^3}\partial_1\partial_2\partial_3\psi_1,$$

$$\psi_2=\left(\frac{3}{4M}\partial_2\psi_0-\frac{3}{4M^2}\partial_1\partial_3\psi_0\right)+\frac{3}{4M}(\partial_1\psi_3+\partial_3\psi_1)-\frac{3}{4M^2}(\partial_1\partial_2\psi_1+\partial_2\partial_3\psi_3)+ \qquad (2.13)$$
$$+\frac{1}{4M^2}U\psi_2+\frac{3}{4M^3}\partial_1\partial_2\partial_3\psi_2,$$

$$\psi_3=\left(\frac{3}{4M}\partial_3\psi_0-\frac{3}{4M^2}\partial_1\partial_2\psi_0\right)+\frac{3}{4M}(\partial_1\psi_2+\partial_2\psi_1)-\frac{3}{4M^2}(\partial_1\partial_2\psi_1+\partial_2\partial_3\psi_2)+$$
$$+\frac{1}{4M^2}U\psi_3+\frac{3}{4M^3}\partial_1\partial_2\partial_3\psi_3.$$

Уравнения (2.13) показывают, что мы можем считать ψ_1, ψ_2, ψ_3 величинами первого порядка малости по отношению к $\frac{1}{M}$. Учитывая явно члены первого порядка, найдем

$$\psi_1=\frac{3}{4M}\partial_1\psi_0+\frac{1}{M^2}\ldots$$

$$\psi_2=\frac{3}{4M}\partial_2\psi_0+\frac{1}{M^2}\ldots$$

$$\psi_3=\frac{3}{4M}\partial_3\psi_0+\frac{1}{M^2}\ldots$$

Подставляя эти выражения в правую часть (2.13), получим члены второго порядка малости:

$$\psi_1=\frac{3}{4M}\partial_1\psi_0-\frac{3}{8M^2}\partial_2\partial_3\psi_0+\frac{1}{M^3}\ldots$$

$$\psi_2=\frac{3}{4M}\partial_2\psi_0-\frac{3}{8M^2}\partial_1\partial_3\psi_0+\frac{1}{M^3}\ldots$$

$$\psi_3=\frac{3}{4M}\partial_3\Psi_0-\frac{3}{8M^2}\partial_1\partial_2\psi_0+\frac{1}{M^3}\ldots \qquad (2.14)$$

Подставив (2.14) в уравнение (2.12), найдем:

$$\frac{3}{4}(\partial_1^2+\partial_2^2+\partial_3^2)\psi_0-U\psi_0-\frac{1}{8M}\partial_1\partial_2\partial_3\psi_0+\frac{1}{M^2}\ldots=0. \qquad (2.15)$$

Совершив здесь формальный переход к пределу при $M\to\infty$, получим:

$$(\partial_1^2+\partial_2^2+\partial_3^2)\psi_0-\frac{4}{3}U\psi_0=0,$$

$$\psi_1=\psi_2=\psi_3=0,$$

и потому $\psi=\psi_0$. Таким образом, получаем уравнение:

$$\left(\partial_1^2+\partial_2^2+\partial_3^2-\frac{4}{3}U\right)\psi=0 \qquad (2.16)$$

с дополнительными условиями

$$(1-\rho_1\rho_2)\psi=(1-\rho_1\rho_3)\psi=(1-\rho_2\rho_3)\psi=0. \qquad (2.17)$$

Заметим, что уравнение (2.16) имеет место для всех ∂_j как с электромагнитным полем, так и без него: (1.2) и (2.1).

В рассматриваемом случае (2.1)

$$\partial_j^2=-\Box_{x_j}=-\sum_{\alpha=0}^{3}g^{\alpha\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial x_j^\alpha}\right)^2.$$

Выделим теперь движение центра тяжести и относительное движение трех частиц. Произведем для этого замену переменных:

$$x_1=x+\frac{y_1}{3},\quad x_2=x+\frac{y_2}{3},\quad x_3=x-\frac{y_1+y_2}{3};$$

т.е. (2.18)

$$x=\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\quad y_1=2x_1-x_2-x_3,\quad y_2=2x_2-x_1-x_3.$$

Имеем

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial x} + 2\frac{\partial}{\partial y_1} - \frac{\partial}{\partial y_2},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} = \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y_1} + 2\frac{\partial}{\partial y_2}, \qquad (2.19)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3} = \frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y_1} - \frac{\partial}{\partial y_2}.$$

Откуда

$$\Box_{x_1} + \Box_{x_2} + \Box_{x_3} = \frac{1}{3}\Box_x + 3(\Box_1 + \Box_2 + \Box_2),$$

где

$$\Box_j = \sum_{\alpha=0}^{3} g^{\alpha\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial y_j^\alpha}\right)^2, \qquad j = 1,2,$$

$$\Box_3 = \sum_{\alpha=0}^{3} g^{\alpha\alpha}\left(\frac{\partial}{\partial y_1^\alpha} - \frac{\partial}{\partial y_2^\alpha}\right)^2.$$

Уравнение (2.16) принимает вид:

$$\{\Box_x + 9(\Box_1 + \Box_2 + \Box_3) + 4U(R_1^2, R_2^2, R_3^2)\}\,\psi = 0. \qquad (2.20)$$

Совершим здесь Виковский переход к чисто мнимым "относительным временам" $y_1^{(0)}$, $y_2^{(0)}$, положив

$$y_1^{(0)} = i\,y_1^{(4)}, \qquad y_2^{(0)} = i\,y_2^{(4)};$$

где $y_j^{(4)}$ -вещественные переменные. Тогда

$$\Box_1 = -\Delta_1, \qquad \Box_2 = -\Delta_2, \qquad \Box_3 = -\Delta_3;$$

где

$$\Delta_j = \sum_{\alpha=1}^{4}\left(\frac{\partial}{\partial y_j^\alpha}\right)^2, \quad j=1,2, \qquad \Delta_3 = \sum_{\alpha=1}^{4}\left(\frac{\partial}{\partial y_1^\alpha} - \frac{\partial}{\partial y_2^\alpha}\right)^2.$$

Выразим еще R_j^2 через y. Для симметрии записи удобно ввести

$$y_3 = -(y_1 + y_2).$$

Тогда на основании (2.18):

$$R_1^2 = \frac{1}{9}(y_1 - y_2)^2 = \frac{1}{9}(2y_1^2 + 2y_2^2 - 2y_3^2),$$

$$R_2^2 = \frac{1}{9}(y_1 - y_3)^2 = \frac{1}{9}(2y_1^2 + 2y_3^2 - y_2^2), \qquad (2.21)$$

$$R_3^2 = \frac{1}{9}(y_2 - y_3)^2 = \frac{1}{9}(2y_2^2 + 2y_3^2 - y_1^2),$$

где теперь и далее квадрат четырехвектора будет евклидовским:

$$y^2 = \sum_{\alpha=1}^{4}(y^\alpha)^2.$$

Положив

$$U(R_1^2, R_2^2, R_3^2) = U_y(y_1^2, y_2^2, y_3^2), \qquad (2.22)$$

заметим, что U_y является вещественной симметричной функцией трех переменных y_1^2, y_2^2, y_3^2. Поскольку пространство точек y -евклидовское, видно, что в силу (1.5) эта функция везде положительна. Сделав указанные преобразования, перепишем уравнение (2.20) в следующей окончательной форме:

$$\{\Box_x - 9(\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3) + 4U_y(y_1^2, y_2^2, y_3^2)\}\,\psi_{a_1,a_2,a_3}(y_1, y_2, y_3) = 0. \qquad (2.23)$$

Рассмотрим теперь вспомогательную задачу на собственные значения для скалярного уравнения типа Шредингера в 8-мерном евклидовском пространстве точек y_1, y_2.

$$\{-9(\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3) + 4U_y(y_1^2, y_2^2, y_3^2)\}\,\phi(y_1, y_2) = \epsilon\phi(y_1, y_2). \qquad (2.24)$$

В этом уравнении все $-\Delta_j$ положительно определены, положительна и функция U_y. Поэтому все собственные значения ϵ положительны. Предположим, что наименьшее собственное значение $\epsilon = \epsilon_0$ не вырождено и соответствует s-состоянию. Иначе говоря, предположим, что при $\epsilon = \epsilon_0$ имеется единственная собственная функция вида:

$$\phi_0(y_1, y_2) = \phi(y_1^2, y_2^2, y_3^2),$$

где ϕ -вещественная симметричная функция трех скалярных инвариантов y_1^2, y_2^2, y_3^2, удовлетворяющая условию нормировки:

$$\int \phi^2(y_1^2, y_2^2, y_3^2)\,d^4y_1\,d^4y_2 = 1, \qquad (2.25)$$

где

$$d^4 y_j = \prod_{\alpha=1}^{4} (d\, y_j^{(\alpha)})\,.$$

Выразив y_j^2 через R_j^2 с помощью формул (2.21), можем написать также:

$$\phi_0(y_1, y_2) = \phi(y_1^2, y_2^2, y_3^2) = f(R_1^2, R_2^2, R_3^2), \tag{2.26}$$

где f – вещественная симметричная функция трех скалярных инвариантов R_j^2. Так как, по определению, $\phi_0(y_1, y_2)$ удовлетворяет уравнению (2.24) при $\epsilon = \epsilon_0$, то ясно, что уравнение (2.23) имеет решение вида:

$$\psi_{a_1, a_2, a_3} = \phi(y_1^2, y_2^2, y_3^2)\, \Phi_{a_1, a_2, a_3}(x) = f(R_1^2, R_2^2, R_3^2)\, \Phi_{a_1, a_2, a_3}(x) \tag{2.27}$$

в котором

$$(\Box_x + m^2)\, \Phi = 0\,, \tag{2.28}$$

где $m^2 = \epsilon_0$. Таким образом, масса рассматриваемого связанного состояния трех кварков определяется собственными значениями ϵ_0 для уравнения (2.24). Используя (2.28), видим, что в фурье-представлении:

$$\Phi = \int e^{-i(p^0 x^0 - \bar p \bar x)}\, \tilde\Phi(\bar p)\, d\bar p \tag{2.29}$$

будет

$$p^0 = E = \sqrt{\bar p^2 + m^2}\,.$$

Рассмотрим теперь преобразование отражения (2.4). Вследствие четности функции f в формуле (2.28), из него вытекает, что

$$\gamma_1^0 \gamma_2^0 \gamma_3^0 \Lambda_x \Phi = \Phi'\,.$$

Но из (2.29) находим:

$$\Lambda_x \Phi = \int e^{-i(p^0 x^0 + \bar p \bar x)}\, \tilde\Phi(\bar p)\, d\bar p = \int e^{-i(p^0 x^0 - \bar p \bar x)}\, \tilde\Phi(-\bar p)\, d\bar p$$

и потому

$$\gamma_1^0 \gamma_2^0 \gamma_3^0\, \tilde\Phi(-\bar p) = \tilde\Phi'(\bar p)\,. \tag{2.30}$$

Рассмотрим систему центра масс, в которой пространственный импульс $\bar p$ равен нулю. Так как в этом случае преобразование отражения должно быть тождественным

$$\gamma_1^0 \gamma_2^0 \gamma_3^0 \tilde\Phi = \tilde\Phi\,, \qquad \tilde\Phi' = \tilde\Phi\,,$$

или

$$\gamma_1^0 p^0\, \gamma_2^0 p^0\, \gamma_3^0 p^0\, \tilde\Phi = m^3 \tilde\Phi\,. \tag{2.31}$$

Перейдем теперь к произвольной системе отсчета. Тогда ковариантным расширением этого условия будет:

$$(\gamma_1 p)(\gamma_2 p)(\gamma_3 p)\, \tilde\Phi = m^3 \tilde\Phi\,, \tag{2.32}$$

где

$$(\gamma_j p) = \sum_{\alpha=0}^{3} g^{\alpha\alpha} \gamma_j^{(\alpha)} p^{(\alpha)}\,.$$

Обратимся теперь к дополнительным условиям (2.17). Применив их к решению (2.27), найдем:

$$(1 - \rho_1 \rho_2)\Phi = (1 - \rho_1 \rho_3)\Phi = (1 - \rho_2 \rho_3)\Phi = 0\,. \tag{2.33}$$

То же самое будет и для фурье-образа:

$$(1 - \rho_1 \rho_2)\tilde\Phi = (1 - \rho_1 \rho_3)\tilde\Phi = (1 - \rho_2 \rho_3)\tilde\Phi = 0\,. \tag{2.33'}$$

Рассмотрим собственные значения коммутирующих эрмитовских операторов ρ_1, ρ_2, ρ_3. Из условий (2.33) следует, что для Φ или все эти собственные значения равны 1, или все – 1. Формально это следует из соотношения:

$$\begin{aligned} \tilde\Phi &= \tilde\Phi' + \tilde\Phi''\,, \\ \tilde\Phi' &= \frac{(1+\rho_1)(1+\rho_2)(1+\rho_3)}{8}\, \tilde\Phi\,, \\ \tilde\Phi'' &= \frac{(1-\rho_1)(1-\rho_2)(1-\rho_3)}{8}\, \tilde\Phi\,, \end{aligned} \tag{2.34}$$

которое вытекает из (2.33). Действительно,

$$\begin{aligned} (1-\rho_1)\tilde\Phi' &= (1-\rho_2)\tilde\Phi' = (1-\rho_3)\tilde\Phi' = 0\,, \\ (1+\rho_1)\tilde\Phi'' &= (1+\rho_2)\tilde\Phi'' = (1+\rho_3)\tilde\Phi'' = 0\,. \end{aligned} \tag{2.35}$$

Отсюда, в частности, следует, что при действии на спинор Φ все ρ_j равны:

$$\rho_1\Phi = \rho_2\Phi = \rho_3\Phi \ . \qquad (2.36)$$

Эта форма дополнительных условий, по-видимому, наиболее удобна для применения. Прежде чем перейти к интересующему нас вопросу о выяснении спинорной структуры Φ, запишем возможное представление дираковских матриц $\gamma^{(\nu)}$. Рассмотрим сначала обычный спинор с одним индексом a и представим его в общепринятой форме:

$$\psi_a = \begin{vmatrix} \chi_{1j} \\ \chi_{2j} \end{vmatrix} ,$$

где $\chi_{a,j}$ –двумерные спиноры. Как известно,

$$\gamma^{(\nu)} = \gamma^{(0)}\ \rho\ \ \Sigma^{(\nu)} \ ; \qquad \nu = 1, 2, 3 \ . \qquad (2.37)$$

Действие соответствующих матриц ψ_a будет:

$$\gamma^0\psi = \begin{vmatrix} \chi_{1,j} \\ -\chi_{2,j} \end{vmatrix} , \qquad \rho\psi = \begin{vmatrix} \chi_{2,j} \\ \chi_{1,j} \end{vmatrix} ,$$

$$\Sigma^{(\nu)}\ \psi = \begin{vmatrix} (s^\nu\ \chi_1)_j \\ (s^\nu\ \chi_2)_j \end{vmatrix} ;$$

где s^ν –двумерные спиновые матрицы:

$$s^{(1)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} , \qquad s^{(2)} = \begin{vmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{vmatrix} , \qquad s^{(3)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} ,$$

действующие на индекс j. Мы можем поэтому полный спинорный индекс $a = 1,2,3,4$ разбить на два индекса: $a = (\alpha, j)$, где $\alpha = 1,2$ – индекс верхней-нижней компоненты, $j = 1,2$ –индекс спинового состояния. Тогда матрицы γ^0, ρ, $(\gamma^0\rho)$ будут действовать только на индекс α, а $\Sigma^{(\nu)}$ – только на индекс j, так что мы можем положить $\Sigma^{(\nu)} = s^{(\nu)}$ и написать (2.37) в виде:

$$\gamma^{(\nu)} = \gamma^{(0)}\ \rho\ \ s^{(\nu)} \ . \qquad (2.38)$$

В таком представлении γ^0, ρ, $(\gamma^0\rho)$ также выражаются двумерными матрицами, действующими на индекс α:

$$\gamma^0 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} , \qquad \rho = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} , \qquad \gamma^0\rho = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} .$$

Ввиду важной роли матриц ρ в дополнительных условиях удобно иметь дело с представлением, в котором диагональна не γ^0 а ρ. Чтобы найти соответствующую матрицу поворота осей, диагонализирующего ρ, запишем тождества:

$$\tfrac{1}{2}(\gamma^0+\rho)\gamma^0(\gamma^0+\rho) = \tfrac{1}{2}(\gamma^0+\rho)(\gamma^0-\rho)\gamma^0 = \frac{(\gamma^0)^2+\rho\gamma^0-\gamma^0\rho-\rho^2}{2}\gamma^0 = \rho\gamma^0\gamma^0 = \rho ,$$

$$(2.39)$$

$$\tfrac{1}{2}(\gamma^0+\rho)\rho(\gamma^0+\rho) = \tfrac{1}{2}(\gamma^0+\rho)(\gamma^0-\rho)\rho = \frac{\gamma^0\rho+\rho^2-(\gamma^0)^2-\rho\gamma^0}{2}\rho = \gamma^0\rho\rho = \gamma^0 .$$

Возьмем матрицу s, действующую на индекс α,

$$s = \frac{\gamma^0+\rho}{\sqrt{2}} = s^+ ,$$

являющуюся унитарной:

$$s^+ s = \frac{(\gamma^0+\rho)^2}{2} = \frac{(\gamma^0)^2+\gamma^0\rho+\rho\gamma^0+\rho^2}{2} = 1 .$$

Тогда тождества (2.39) можно записать в виде:

$$s^+\gamma^0 s = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} , \qquad s^+\rho s = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} .$$

Поэтому матрицей S мы и воспользуемся для диагонализации ρ. В новом представлении, получающемся с помощью поворота осей, осуществляемого s, мы будем иметь:

$$\gamma^0 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} , \qquad \rho = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} . \qquad (2.40)$$

Таким образом, теперь:

$$\rho\psi_{\alpha,j} = (-1)^{\alpha-1}\ \psi_{\alpha,j} \ ; \qquad \alpha = 1, 2 .$$

Перенесем это представление на спиноры Φ_{a_1,a_2,a_3}. В новых обозначениях запишем:

$$\Phi = \Phi_{(\alpha_1,j_1),(\alpha_2,j_2),(\alpha_3,j_3)} .$$

Вообще, при фиксированных j_1, j_2, j_3, Φ имеет $2^3 = 8$ компонент, однако, благодаря дополнительным условиям (2.36), остаются лишь две компоненты, а все остальные равны нулю. Действительно,

$$\rho_k\ \Phi = (-1)^{\alpha_k-1}\ \Phi , \qquad k = 1,2,3 \ , \qquad (2.41)$$

а исходя из (2.38), можно убедиться, что отличными от нуля могут быть лишь те компоненты Φ , у которых

$$a_1 = a_2 = a_3 = 1 ,$$

$$a_1 = a_2 = a_3 = 2 .$$

Таким образом, спинор Φ можно представить в форме:

$$\Phi = \begin{vmatrix} \Phi^{(1)}_{i_1, i_2, i_3} \\ \Phi^{(2)}_{i_1, i_2, i_3} \end{vmatrix} , \qquad (2.42)$$

где

$$\Phi^{(1)}_{i_1, i_2, i_3} = \Phi_{(1, i_1), (1, i_2), (1, i_3)} ,$$

$$\Phi^{(2)}_{i_1, i_2, i_3} = \Phi_{(2, i_1), (2, i_2), (2, i_3)} .$$

Посмотрим, как действуют на Φ в таком представлении матрицы ρ_k и $(\gamma^0_1 \gamma^0_2 \gamma^0_3)$. Поскольку при действии на Φ все ρ_k равны, мы будем опускать у них индекс k. Основываясь на (2.40), напишем:

$$\rho\Phi = \begin{vmatrix} \Phi^{(1)}_{i_1, i_2, i_3} \\ -\Phi^{(2)}_{i_1, i_2, i_3} \end{vmatrix} . \qquad (2.43)$$

Видно, что γ^0_k меняет индекс

$$(a_k = 1) \rightleftarrows (a_k = 2).$$

Поэтому $(\gamma^0_1 , \gamma^0_2 \gamma^0_3)$ заменит $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ на $a_1 = a_2 = a_3 = 2$ и обратно. Следовательно,

$$\gamma^0_1 \gamma^0_2 \gamma^0_3 \begin{vmatrix} \Phi^{(1)}_{i_1, i_2, i_3} \\ \Phi^{(2)}_{i_1, i_2, i_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \Phi^{(2)}_{i_1, i_2, i_3} \\ \Phi^{(1)}_{i_1, i_2, i_3} \end{vmatrix} . \qquad (2.44)$$

Рассмотрим еще дираковское сопряжение. Положим, как обычно,

$$\bar\Phi = \Phi^{+} \gamma^0_1 \gamma^0_2 \gamma^0_3 ,$$

или

$$\bar\Phi = \begin{vmatrix} \Phi^{+(1)}_{i_1, i_2, i_3} \\ \Phi^{+(2)}_{i_1, i_2, i_3} \end{vmatrix} \gamma^0_1 \gamma^0_2 \gamma^0_3 = \begin{vmatrix} \Phi^{+(2)}_{i_1, i_2, i_3} \\ \Phi^{+(1)}_{i_1, i_2, i_3} \end{vmatrix} . \qquad (2.45)$$

Таким образом, выражение инварианта $\bar\Phi\Phi$ будет:

$$\bar\Phi\,\Phi = \sum_{i_1, i_2, i_3} \left(\Phi^{+(2)}_{i_1, i_2, i_3} \Phi^{(1)}_{i_1, i_2, i_3} + \Phi^{+(1)}_{i_1, i_2, i_3} \Phi^{(2)}_{i_1, i_2, i_3} \right) . \qquad (2.46)$$

До сих пор мы использовали только дополнительные условия (2.38). Обратимся теперь к условию (2.32) для фурье-компонент. Напишем его с учетом (2.38):

$$(\gamma^0_1 p^0 - \gamma^0_1 \rho_1 \bar p \bar s_1)(\gamma^0_2 p^0 - \gamma^0_2 \rho_2 \bar p \bar s_2)(\gamma^0_3 p^0 - \gamma^0_3 \rho_3 \bar p \bar s_3)\tilde\Phi = m^3 \tilde\Phi ,$$

или

$$\gamma^0_1 \gamma^0_2 \gamma^0_3 (p^0 - \rho \bar p \bar s_1)(p^0 - \rho \bar p \bar s_2)(p^0 - \rho \bar p \bar s_3)\tilde\Phi = m^3 \Phi .$$

Переходя к представлению (2.42), найдем:

$$m^3 \begin{vmatrix} \tilde\Phi^{(1)} \\ \tilde\Phi^{(2)} \end{vmatrix} = \gamma^0_1 \gamma^0_2 \gamma^0_3 \begin{vmatrix} (p^0 - \bar p \bar s_1)(p^0 - \bar p \bar s_2)(p^0 - \bar p \bar s_3)\tilde\Phi^{(1)} \\ (p^0 - \bar p \bar s_1)(p^0 - \bar p \bar s_2)(p^0 - \bar p \bar s_3)\tilde\Phi^{(2)} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} (p^0 + \bar p \bar s_1)(p^0 + \bar p \bar s_2)(p^0 + p \bar s_3)\tilde\Phi^{(2)} \\ (p^0 - \bar p \bar s_1)(p^0 - \bar p \bar s_2)(p^0 - \bar p \bar s_3)\tilde\Phi^{(1)} \end{vmatrix} .$$

Следовательно,

$$(p^0 - \bar p \bar s_1)(p - \bar p \bar s_2)(p^0 - \bar p \bar s_3)\tilde\Phi^{(1)} = m^3 \tilde\Phi^{(2)} , \qquad (2.47)$$

$$(p^0 + \bar p \bar s_1)(p^0 + \bar p \bar s_2)(p^0 + \bar p \bar s_3)\tilde\Phi^{(2)} = m^3 \tilde\Phi^{(1)} .$$

С другой стороны, заметим, что тождественно:

$$(p^\circ - \bar{p}\bar{s})(p^\circ + m + \bar{p}\bar{s}) = m(p^\circ + m - \bar{p}\bar{s}),$$

$$(p^\circ + \bar{p}\bar{s})(p^\circ + m - \bar{p}\bar{s}) = m(p^\circ + m + \bar{p}\bar{s}).$$

Поэтому условиям (2.47) мы удовлетворим, положив:

$$\tilde{\Phi}^{(1)} = \{ \prod_{k=1}^{3} (m + p^\circ + \bar{p}\bar{s}_k) \} N B_{j_1, j_2, j_3},$$
$$\tilde{\Phi}^{(2)} = \{ \prod_{k=1}^{3} (m + p^\circ - \bar{p}\bar{s}_k) \} N B_{j_1, j_2, j_3}; \qquad (2.48)$$

где N -множитель нормировки, который подбирается так, чтобы

$$\tilde{\Phi}\tilde{\Phi} = 2 \sum_{j_1, j_2, j_3} B^{+}_{j_1, j_2, j_3} B_{j_1, j_2, j_3}. \qquad (2.49)$$

Подставив (2.48) в (2.46), получим:

$$2 \sum_{j_1, j_2, j_3} B^{+}_{j_1, j_2, j_3} B_{j_1, j_2, j_3} =$$
$$= N^2 \sum_{j_1, j_2, j_3} \{ B^{+}_{j_1, j_2, j_3} \prod_{k=1}^{3} (m + p^\circ - \bar{p}\bar{s}_k) \prod_{k=1}^{3} (m + p^\circ + \bar{p}\bar{s}_k) B_{j_1 j_2 j_3} \} +$$
$$+ N^2 \sum_{j,j,j} \{ B^{+}_{j_1, j_2, j_3} \prod_{k=1}^{3} (m + p^\circ + \bar{p}\bar{s}_k) \prod_{k=1}^{3} (m + p^\circ - \bar{p}\bar{s}_k) B_{j_1, j_2, j_3} \}.$$

Но

$$(m + p^\circ + \bar{p}\bar{s})(m + p^\circ - \bar{p}\bar{s}) = 2m^2 + 2mp^\circ = 2m(m + p^\circ),$$

и поэтому
$$N^2 = \frac{1}{\{2m(m + p^\circ)\}^3}.$$

Таким образом, (2.48) можно переписать в виде:

$$\tilde{\Phi}^{(1)} = \Delta^{(1)} B_{j_1, j_2, j_3},$$
$$\tilde{\Phi}^{(2)} = \Delta^{(2)} B_{j_1, j_2, j_3}, \qquad (2.50)$$

где

$$\Delta^{(1)} = \prod_{k=1}^{3} \{ \frac{m + E + \bar{p}\bar{s}_k}{\sqrt{2m(m + E)}} \},$$

$$(E = p^\circ = \sqrt{p^2 + m^2})$$

$$\Delta^{(2)} = \prod_{k=1}^{3} \{ \frac{m + E - \bar{p}\bar{s}_k}{\sqrt{2m(m + E)}} \}. \qquad (2.51)$$

Если явно учесть индексы кварков, можно написать (2.50) более детально:

$$\tilde{\Phi}^{(1)} = \Delta^{(1)} B_{(A_1, j_1), (A_2, j_2), (A_3, j_3)},$$
$$\tilde{\Phi}^{(2)} = \Delta^{(2)} B_{(A_1, j_1), (A_2, j_2), (A_3, j_3)}; \qquad (2.52)$$

$$A = 1,2,3; \qquad j = 1,2.$$

Мы пришли здесь к представлению Бега и Пайса [4]. В частности, в системе центра масс, когда пространственный импульс равен нулю, а $E = m$, имеем $\Delta^{(1)} = \Delta^{(2)} = 1$, и поэтому

$$\tilde{\Phi}^{(1)} = \tilde{\Phi}^{(2)} = B_{\nu_1, \nu_2, \nu_3}; \qquad \nu = (A, j). \qquad (2.53)$$

Запишем в этом случае полную волновую функцию

$$\psi_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3}(x_1, x_2, x_3), \qquad \lambda = (A, a) = (A, \alpha, j), \qquad (2.54)$$

для рассматриваемого связанного состояния (2.27) системы трех кварков. Для $a_1 = a_2 = a_3$ будет:

$$\psi_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3}(x_1, x_2, x_3) = f(R_1^2, R_2^2, R_3^2) e^{-iEt} B_{\nu_1, \nu_2, \nu_3}, \qquad (2.55)$$

$$t = \frac{1}{3}(x_1^\circ + x_2^\circ + x_3^\circ); \qquad E = m.$$

Компоненты ψ для других наборов a_1, a_2, a_3 равны нулю. Так как $f(R_1^2, R_2^2, R_3^2)$ является симметричной функцией x_1, x_2, x_3, мы видим, что если волновая функция (2.54) является симметричной по отношению к (x_1, λ_1), (x_2, λ_2), (x_3, λ_3), то B_{ν_1, ν_2, ν_3} будет симметрично по отношению к ν_1, ν_2, ν_3 и наоборот.

§ 3. Связанные состояния при наличии слабого электромагнитного поля

Рассмотрим вопрос о влиянии слабого внешнего электромагнитного поля. Для простоты будем считать его не зависящим от времени. $A_\nu(x) = A_\nu(\bar{x})$. В этом случае в уравнении (1.6) операторы ∂_j представляются формулами (1.2). Как уже отмечалось, это не изменит наших рассуждений, с помощью которых было упрощено основное уравнение за счет предельного перехода $M \to \infty$. Мы получили уравнение:

$$(\partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2 - \frac{4}{3} U)\,\psi = 0 \tag{3.1}$$

с дополнительными условиями:

$$(1 - \rho_1 \rho_2)\,\psi = (1 - \rho_1 \rho_3)\,\psi = (1 - \rho_2 \rho_3)\,\psi = 0 \ . \tag{3.2}$$

Единственное отличие уравнения (3.1) от (2.16) состоит в том, что теперь выражения ∂_j даются не формулами (2.1), а формулами (1.2). Получим поэтому:

$$\partial_j^2 = -\Box_{x_j} + e_j \; S_{x_j} \ ,$$

где

$$S_{x_j} = \sum_{\nu=0}^{3} g^{\nu\nu}\, i\left(\frac{\partial}{\partial x_j^\nu} A_\nu(\bar{x}_j) + A_\nu(\bar{x}_j)\frac{\partial}{\partial x_j^\nu}\right) + \tfrac{1}{2} \sum_{\nu,\mu} \sigma_j^{\nu,\mu} F^{\nu,\mu}(\bar{x}_j),$$

причем

$$\sigma^{\nu,\mu} = \frac{i}{2}\left(\gamma^\nu \gamma^\mu - \gamma^\mu \gamma^\nu\right),$$

$$F^{\nu,\mu} = \frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x^\nu} - \frac{\partial A_\nu(x)}{\partial x^\mu} \ . \tag{3.3}$$

Мы учитываем здесь, разумеется, лишь члены первого порядка малости по отношению к $A_\nu(\bar{x})$. Уравнение (3.1) запишется поэтому в виде:

$$(\Box_{x_1} + \Box_{x_2} + \Box_{x_3} - e_1 S_{x_1} - e_2 S_{x_2} - e_3 S_{x_3} + \frac{4}{3} U)\,\psi = 0 \ . \tag{3.4}$$

Как и в предыдущем §, совершим здесь замену переменных (2.18) и произведем виковский поворот к чисто мнимым "относительным временам". Получим:

$$\{\Box_x - 9(\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3) + 4U_y - L_{x,y_1,y_2}\}\,\psi_{a_1,a_2,a_3}(x, y_1, y_2) = 0, \tag{3.5}$$

где

$$L_{x,y_1,y_2} = 3 e_1 S_{x_1} + 3 e_2 S_{x_2} + 3 e_3 S_{x_3} =$$

$$= 3 e_1 i \sum_{\nu=0}^{3} g^{\nu\nu}\left\{\left(\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial x^\nu} + 2\frac{\partial}{\partial y_1^\nu} - \frac{\partial}{\partial y_2^\nu}\right) A_\nu(\bar{x} + \frac{\bar{y}_1}{3}) + A_\nu(\bar{x} + \frac{\bar{y}_1}{3}) \times \right.$$

$$\left.\times\left(\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial x^\nu} + 2\frac{\partial}{\partial y_1^\nu} - \frac{\partial}{\partial y_2^\nu}\right)\right\} + 3 e_2 i \sum_{\nu=0}^{3} g^{\nu\nu}\left\{\left(\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial x^\nu} - \frac{\partial}{\partial y_1^\nu} + 2\frac{\partial}{\partial y_2^\nu}\right) A_\nu(\bar{x} + \frac{\bar{y}_2}{3}) + A_\nu(\bar{x} + \frac{\bar{y}_2}{3})\left(\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial x^\nu} - \frac{\partial}{\partial y_1^\nu} + 2\frac{\partial}{\partial y_2^\nu}\right)\right\} +$$

$$+ 3 e_3 i \sum_{\nu=0}^{3} g^{\nu\nu}\left\{\left(\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial x^\nu} - \frac{\partial}{\partial y_1^\nu} - \frac{\partial}{\partial y_2^\nu}\right) A_\nu(\bar{x} + \frac{\bar{y}_3}{3}) + A_\nu(\bar{x} + \frac{\bar{y}_3}{3})\left(\frac{1}{3}\frac{\partial}{\partial x^\nu} - \frac{\partial}{\partial y_1^\nu} - \frac{\partial}{\partial y_2^\nu}\right)\right\} +$$

$$+ \frac{3}{2} \sum_{j=1}^{3} e_j \sum_{\nu,\mu} \sigma_j^{\nu,\mu} F^{\nu,\mu}(\bar{x} + \frac{\bar{y}_j}{3}) \ .$$

Здесь, как и в предыдущем §,

$$y_3 = -(y_1 + y_2), \qquad y_j^{(0)} = i\, y_j^{(4)} \ ,$$

где $y_j^{(4)}$ –вещественные переменные. Рассмотрим теперь систему собственных функций

$$\phi_n(y_1, y_2), \qquad n = (1, 2 \ldots),$$

для уравнения (2.24):

$$\{-9(\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3) + 4U_y\}\,\phi_n(y_1, y_2) = \epsilon_n \phi_n(y_1, y_2), \tag{3.7}$$

которая вместе с функцией $\phi_0(y_1, y_2)$ образует полную систему. Поскольку ϵ_0 не вырождено, все $\epsilon_n \neq \epsilon_0$, и поэтому имеют место условия ортогональности:

$$\int \phi_0(y_1, y_2)\,\phi_n(y_1, y_2)\, d^4y_1\, d^4y_2 = 0 \ ; \qquad n > 0 \ . \tag{3.8}$$

Разложим теперь $\psi_{a_1,a_2,a_3}(x, y_1, y_2)$ как функцию переменных y_1, y_2 по рассматриваемым собственным функциям:

$$\psi_{a_1,a_2,a_3}(x, y_1, y_2) = \phi_0(y_1, y_2)\,\Phi_{a_1,a_2,a_3}(x) + \sum_{n \geq 1} \phi_n(y_1, y_2)\,\Phi^{(n)}_{a_1,a_2,a_3}(x). \tag{3.9}$$

Как было показано в предыдущем §, в случае отсутствия электромагнитного поля, когда $L = 0$, имеется решение, для которого в разложении (3.9):

$$\Phi^{(n)}_{a_1, a_2, a_3} = 0 \; ; \qquad n \geq 1.$$

Проанализируем теперь влияние бесконечно малого внешнего электромагнитного поля на такое решение. Естественно считать, что $\Phi^{(n)}$ при $n \geq 1$ будут бесконечно малыми первого порядка по отношению к рассматриваемому полю. Подставим теперь разложение (3.9) в следующее соотношение, вытекающее из (3.5):

$$\int \phi_0 (y_1, y_2) \{ \Box_x - 9(\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3) + 4U_y - L_{x, y_1, y_2} \} \psi (x, y_1, y_2) d^4y_1 \, d^4y_2 = 0.$$

Найдем:

$$\int \phi_0 (y_1, y_2) \{ \Box_x - 9(\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3) + 4U_y - L_{x, y_1, y_2} \} \phi_0 (y_1, y_2) d^4y_1 \, d^4y_2 \, \Phi +$$

$$+ \sum_{n \geq 1} \int \phi_0 (y_1, y_2) \{ \Box_x - 9(\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3) + 4U_y - L_{x, y_1, y_2} \} \phi_n (y_1, y_2) d^4y_1 \, d^4y_2 \, \Phi^{(n)} = 0. \qquad (3.10)$$

Но, используя (3.7) и (3.8), получим:

$$\int \phi_0 (y_1, y_2) \{ \Box_x - 9(\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3) + 4U_y \} \phi_n (y_1, y_2) d^4y_1 \, d^4y_2 =$$

$$= \int \phi_0 (y_1, y_2) \phi_n (y_1, y_2) d^4y_1 \, d^4y_2 \, \Box_x + \epsilon_n \int \phi_0 (y_1, y_2) \phi_n (y_1, y_2) d^4y_1 \, d^4y_2 = 0.$$

Значит, с учетом (3.7) (3.10) может быть записано в виде:

$$(\Box_x + m^2) \Phi - \int \phi_0 (y_1, y_2) L_{x, y_1, y_2} \phi_0 (y_1, y_2) d^4y_1 \, d^4y_2 \, \Phi + \delta = 0 ,$$

где

$$\delta = - \sum_{n \geq 1} \int \phi_0 (y_1, y_2) L_{x, y_1, y_2} \phi_n (y_1, y_2) d^4y_1 \, d^4y_2 \, \Phi^{(n)} .$$

Так как L и $\Phi^{(n)}$ –величины первого порядка малости по отношению к полю, то δ будет величиной второго порядка малости, ей можно пренебречь в рассматриваемом приближении, в котором мы учитываем только линейные члены по отношению к электромагнитному полю. Получим:

$$\{ \Box_x + m^2 - \int \phi_0 (y_1, y_2) L_{x, y_1, y_2} \phi_0 (y_1, y_2) d^4y_1 \, d^4y_2 \} \Phi = 0 . \qquad (3.11)$$

Раскроем выражение интеграла:

$$I = \int \phi_0 (y_1, y_2) L_{x, y_1, y_2} \phi_0 (y_1, y_2) d^4y_1 \, d^4y_2 , \qquad (3.12)$$

подставив сюда значение L из (3.8). Заметим, что:

$$\int \phi_0 (y_1, y_2) \frac{\partial}{\partial y_j^\nu} A_\nu (\bar{x} + \frac{\bar{y}_k}{3}) \phi_0 (y_1, y_2) \, d^4y_1 \, d^4y_2 +$$

$$+ \int \phi_0 (y_1, y_2) A_\nu (\bar{x} + \frac{\bar{y}_k}{3}) \frac{\partial}{\partial y_j^\nu} \phi_0 (y_1, y_2) \, d^4y_1 \, d^4y_2 =$$

$$= - \int \frac{\partial \phi_0 (y_1, y_2)}{\partial y_j^\nu} A_\nu (\bar{x} + \frac{\bar{y}_k}{3}) \phi_0 (y_1, y_2) \, d^4y_1 \, d^4y_2 +$$

$$+ \int \phi_0 (y_1, y_2) A_\nu (\bar{x} + \frac{\bar{y}_k}{3}) \frac{\partial \phi_0 (y_1, y_2)}{\partial y_j^\nu} \, d^4y_1 \, d^4y_2 = 0 ;$$

$$j = 1, 2, \qquad k = 1, 2, 3 .$$

С другой стороны, используя (2.26), можно написать:

$$\int A_\nu (\bar{x} + \frac{\bar{y}_k}{3}) \phi_0^2 (y_1, y_2) d^4y_1 \, d^4y_2 = \int A_\nu (\bar{x} + \frac{\bar{y}_k}{3}) \phi^2 (y_1^2, y_2^2, y_3^2) d^4y_1 d^4y_2 =$$

$$= \int A_\nu (\bar{x} + \frac{\bar{y}_k}{3}) \phi^2 (y_1^2, y_2^2, y_3^2) \delta (y_1 + y_2 + y_3) d^4y_1 \, d^4y_2 \, d^4y_3 \qquad (3.13)$$

$$(k = 1, 2, 3) ,$$

где δ –четырехмерная δ-функция. Но $\phi^2(y_1^2, y_2^2, y_3^2)$ является симметричной функцией y_1, y_2, y_3. Поэтому, проведя в правой части формулы (3.13) замену переменных:

$$y_k \to y_1 , \qquad y_1 \to y_k ,$$

замечаем, что:

$$\int A_\nu (\bar{x} + \frac{\bar{y}_k}{3}) \phi_0^2 (y_1, y_2) d^4y_1 d^4y_2 = A'(x) , \quad k = 1, 2, 3 ;$$

где

$$A'(x) = \int A_\nu (\bar{x} + \frac{\bar{y}_k}{3}) \phi^2 (y_1^2, y_2^2, y_3^2) \delta (y_1 + y_2 + y_3) d^4y_1 \, d^4y_2 \, d^4y_3 . \qquad (3.14)$$

Аналогично получаем:

$$\int F^{\nu,\mu}\left(\bar{x}+\frac{\bar{y}_1}{3}\right)\phi_0^2(y_1,y_2)\,d^4y_1\,d^4y_2 = F'^{\nu,\mu}(\bar{x}) \qquad j=1,2,3 \;,$$

где

$$F'^{\nu,\mu}(x) = \int F^{\nu,\mu}\left(\bar{x}+\frac{\bar{y}_1}{3}\right)\phi^2(y_1^2,y_2^2,y_3^2)\delta(y_1+y_2+y_3)\,d^4y_1\,d^4y_2\,d^4y_3 \;. \tag{3.15}$$

Используя полученное для упрощения выражения (3.12), найдем:

$$I = (e_1+e_2+e_3)\sum_{\nu=0}^{3} g^{\nu\nu}\, i\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}A'_\nu(\bar{x}) + A'_\nu(\bar{x})\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right) +$$

$$+\frac{3}{2}\sum_{\nu,\mu}\left(e_1\sigma_1^{\nu,\mu}+e_2\sigma_2^{\nu,\mu}+e_3\sigma_3^{\nu,\mu}\right)F'^{\nu,\mu}(\bar{x})\,.$$

Таким образом, уравнение (3.11) преобразуется к виду уравнения БНССТШ:

$$\{\Box_x + m^2 - (e_1+e_2+e_3)\sum_{\nu=0}^{3} g^{\nu\nu}\, i\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}A'_\nu(\bar{x}) + A'_\nu(\bar{x})\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right) -$$

$$-\frac{3}{2}\sum_{\nu,\mu}\left(e_1\sigma_1^{\nu,\mu}+e_2\sigma_2^{\nu,\mu}+e_3\sigma_3^{\nu,\mu}\right)F'^{\nu,\mu}(\bar{x})\}\,\Phi_{a_1,a_2,a_3} = 0. \tag{3.16}$$

Упростим еще формулы (3.14),(3.15), для чего воспользуемся представлениями Фурье:

$$A_\nu(\bar{x}) = \int e^{i(\bar{q}\bar{x})}\tilde{A}_\nu(q)\,d\bar{q}\,,$$

$$F^{\nu,\mu} = \int e^{i(\bar{q}\bar{x})}\tilde{F}^{\nu,\mu}(q)\,d\bar{q}\,. \tag{3.17}$$

Получим:

$$A'_\nu(\bar{x}) = \int A_\nu\left(\bar{x}+\frac{\bar{y}_1}{3}\right)\phi^2(y_1^2,y_2^2,y_3^2)\,\delta(y_1+y_2+y_3)\,d^4y_1\,d^4y_2\,d^4y_3 =$$

$$= \int e^{i(\bar{q}\bar{x})}\{\int e^{\frac{i(\bar{q}\bar{y})}{3}}\phi^2(y_1^2,y_2^2,y_3^2)\,\delta(y_1+y_2+y_3)\,d^4y_1\,d^4y_2\,d^4y_3\}\,\tilde{A}_\nu(q)\,d\bar{q}\,.$$

Но ввиду радиальной симметрии ϕ^2 входящий сюда интеграл в фигурных скобках зависит лишь от $\bar{q}^2$. Поэтому

$$\int e^{\frac{i(\bar{q}\bar{y}_1)}{3}}\phi^2(y_1^2,y_2^2,y_3^2)\,\delta(y_1+y_2+y_3)\,d^4y_1\,d^4y_2\,d^4y_3 = f(\bar{q}^2)\,. \tag{3.18}$$

На основании условия нормировки (2.25) $f(0) = 1.$ (3.19)

Итак,

$$A'_\nu(\bar{x}) = \int e^{i(\bar{q}\bar{x})}f(\bar{q}^2)\tilde{A}_\nu(q)\,d\bar{q}\,. \tag{3.20}$$

Поскольку

$$f(\Box_x)e^{i(\bar{q}\bar{x})} = f(-\Delta_x)e^{i(\bar{q}\bar{x})} = f(\bar{q}^2)e^{i(\bar{q}\bar{x})}\,,$$

можем написать:

$$A'_\nu(x) = \{f(\Box_x)A_\nu(x)\}\,. \tag{3.21}$$

Аналогично

$$F'^{\nu,\mu}(x) = \int e^{i(\bar{q}\bar{x})}f(\bar{q}^2)\tilde{F}^{\nu,\mu}(q)\,d\bar{q} = \{f(\Box_x)F^{\nu,\mu}(\bar{x})\}\,. \tag{3.22}$$

На основании (3.8), (3.9)

$$\Phi_{a_1,a_2,a_3}(x) = \int \phi_0(y_1,y_2)\,\psi_{a_1,a_2,a_3}(x,y_1,y_2)\,d^4y_1\,d^4y_2 \tag{3.23}$$

и поэтому из (3.2) следует, что

$$(1-\rho_1\rho_2)\,\Phi = (1-\rho\rho_3)\,\Phi = (1-\rho_2\rho_3)\,\Phi\,. \tag{3.24}$$

Как было сделано выше, эти дополнительные условия можно представить в следующей форме:

$$\rho_1\Phi = \rho_2\Phi = \rho_3\Phi\,. \tag{3.25}$$

Мы получили уравнение БНССТШ в форме (3.16), исходя из неквадрированного уравнения (1.6). Нетрудно показать, что этот результат может быть также получен на основании из квадрированного уравнения вида:

$$\{(\partial_1^2-M^2)(\partial_2^2-M^2)(\partial_3^2-M^2)+M^2(M^2-V)^2\}\psi = 0\,. \tag{3.26}$$

Раскрывая это уравнение, найдем, разделив его на M^4,

$$\{ (\partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2 - 2V) + \frac{V^2 - \partial_1^2\partial_2^2 - \partial_1^2\partial_3^2 - \partial_2^2\partial_3^2}{M^2} + \frac{\partial_1^2\partial_2^2\partial_3^2}{M^4} \} \psi = 0 .$$

Отсюда, совершив формальный переход к пределу при $M \to \infty$, получим:

$$(\partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2 - 2V)\psi = 0 .$$

Как видно, это уравнение совпадает с уравнением (3.1), если положить $V = \frac{2}{3} U$. Повторяя предыдущие рассуждения, мы опять придем к уравнению (3.16). Существенное отличие будет состоять в том, что таким путем мы не получим дополнительных условий (3.25), с помощью которых мы можем освободить уравнение БНССТШ от дираковских матриц γ и оставить в нем только двумерные спиновые матрицы, действующие на индексы спиновых состояний. Действительно, по определению тензора $F^{\nu,\mu}$

$$F^{0,\mu} = - F^{\mu,0} = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^0} - \frac{\partial A_0}{\partial x^\mu} = E_\mu \qquad (\mu = 1,2,3),$$

$$F_{1,2} = - F_{2,1} = H_3 ,$$

$$F_{2,3} = - F_{3,2} = H_1 ,$$

$$F_{3,1} = - F_{1,3} = H_2 ,$$

где E_μ и H_μ -компоненты электрического и магнитного полей. Далее:

$$\sigma^{0,\mu} = - \sigma^{\mu,0} = i\gamma^\rho \gamma^\mu = i\rho\, s^{(\mu)} \quad ; \qquad \mu = 1,2,3.$$

$$\sigma^{\mu,\nu} = i\gamma^\nu\gamma^\mu = - i\, s^{(\nu)} s^{(\mu)} \quad ; \qquad \mu, \nu = 1,2,3 ; \quad \mu \neq \nu .$$

$$-i\, s^{(1)} s^{(2)} = s^{(3)} \quad ; \quad -i\, s^{(2)} s^{(3)} = s^{(1)} ; \qquad -i\, s^{(3)} s^{(1)} = s^{(2)} .$$

Таким образом, $\frac{1}{2} \sum_{\nu,\mu} \sigma^{\nu,\mu} F^{\nu,\mu} = i\rho\, \bar{s}\, \bar{E} + \bar{s}\, \bar{H}$,

и поэтому в уравнении (3.16) член, содержащий дираковские матрицы, будет иметь вид:

$$-\frac{3}{2} \sum_{\nu,\mu} (e_1 \sigma_1^{\nu,\mu} + e_2 \sigma_2^{\nu,\mu} + e_3 \sigma_3^{\nu,\mu}) F'^{\nu,\mu}(x)\Phi =$$

$$= -3 \{ i \sum_{k=1}^{3} e_k \rho_k \bar{s}_k \bar{E}'(x) + \sum_{k=1}^{3} e_k \bar{s}_k \bar{H}'(x) \} \Phi , \tag{3.27}$$

где $E'(x) = f(\Box_x) E(x)$; $H'(x) = f(\Box_x) H(x)$.

Но в силу условий (3.25) все ρ_k при действии на спинор Φ равны. Поэтому, если мы перейдем к представлению Φ, в котором диагональна ρ,

$$\Phi = \begin{vmatrix} \Phi^{(1)}_{j_1, j_2, j_3} \\ \Phi^{(2)}_{j_1, j_2, j_3} \end{vmatrix} \qquad (j = 1,2), \tag{3.28}$$

то для каждой компоненты $\Phi^{(\alpha)}$ получим отдельное уравнение:

$$\{ \Box_x + m^2 - (e_1 + e_2 + e_3) \sum_{\nu=0}^{3} g^{\nu\nu} i \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} A'_\nu(x) + A'_\nu(x) \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) -$$

$$- 3i\, \epsilon_\alpha \sum_{\nu=1}^{3} e_k \bar{s}_k \bar{E}'(x) - 3 \sum_{k=1}^{3} e_k \bar{s}_k \bar{H}'(x) \} \Phi^{(\alpha)}_{j_1, j_2, j_3} = 0, \tag{3.29}$$

где $\epsilon_1 = 1$, $\epsilon_2 = -1$.

В полученном уравнении остались лишь двумерные спиновые матрицы $s_k^{(\nu)}$, действующие на k-й индекс спинового состояния j_k .

В заключение автор выражает глубокую благодарность Н.Н. Боголюбову за поставленную задачу и внимание.

Литература

1. Н.Н. Боголюбов, Нгуен Ван Хьеу, Д. Стоянов, Б.В. Струминский, А.Н. Тавхелидзе, В.П. Шелест. Препринт ОИЯИ, Д-2075, Дубна, 1965.
2. П.Н. Боголюбов. Препринт ОИЯИ, Р-2098, Дубна, 1965.
3. Н.Н.Боголюбов, Б.В.Струминский, А.Н.Тавхелидзе. Препринт ОИЯИ, Д-1968, Дубна, 1965.
4. M.A.Beg, A.Pais. Phys. Rev. Lett., 14, 267 (1965).

Рукопись поступила в издательский отдел
22 мая 1965 г.