ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р-2152

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Д.И. Блохинцев

МЕТРИКА ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ И НЕЛИНЕЙНЫЕ ПОЛЯ

1965

P-2152

Д.И. Блохинцев

МЕТРИКА ПРОСТРАНСТВА-ВРЕМЕНИ И НЕЛИНЕЙНЫЕ ПОЛЯ

В основе мероопределения пространства–времени в специальной теории относительности (СТО) лежит предположение о постоянстве скорости света в физическом вакууме. Между тем это предположение, вообще говоря, не выполнено в нелинейных теориях поля /1–4/, хотя бы они и удовлетворяли формальным требованиям лоренцевской инвариантности.

Определенные требования к линейности сигнала, неявно содержащиеся в СТО, обычно упускаются из виду. А. Эйнштейн не раз отмечал, что на самом деле нам дана только сумма "геометрия+физика", а не каждое слагаемое отдельно.

Рассмотрим эту "сумму" на примере абстрактного мира, в котором существует лишь один вид материи – скалярное поле $\phi(x)$, распределенное в пространстве $R_4(x)$ $(x = x_1, x_2, x_3, x_4)$.

Метрика этого пространства первоначально не определена, однако закон распределения поля $\phi(x)$ мы будем считать заданным с помощью вариационного принципа:

$$\delta \int L d\omega = 0 , \tag{1}$$

где $d\omega = dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$,

а L есть плотность лагранжиана, зависящая от поля ϕ и его первых производных $\phi_i = \dfrac{\partial \phi}{\partial x_i}$ $(i=1,2,3,4)$. Из (1) вытекает уравнение поля:

$$a_{ik} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \, \partial x_k} + b_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + c = 0, \tag{2}$$

где

$$a_{ik} = + \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \, \partial x_k} , \quad b_i = \frac{\partial L}{\partial \phi \partial x_i} , \quad c = - \frac{\partial L}{\partial \phi} \tag{3}$$

суть функции ϕ и ϕ_i, так что уравнение (2), вообще говоря, нелинейно. Для установления метрических соотношений в рассматриваемом нами абстрактном мире мы можем использовать только "физику" поля $\phi(x)$. Если уравнение (2) является уравнением эллиптического типа, так что

$$a_{ik} \xi_i \xi_k > 0 \tag{4}$$

(ξ_i – произвольный, действительный вектор), то вообще нельзя разделить множество $\mathfrak{R}_4(x)$ на пространство и время. В этом случае вариация поля $\delta\phi(P)$ в окрестности какой-либо точки $P(x_1, x_2, x_3, x_4)$ ведет к изменению поля ϕ в любой области

$\mathcal{G}$, ограниченной замкнутой поверхностью Γ , окружающей точку P . В этом случае ни одно из направлений в $\mathcal{R}_4(x)$ не выделено и разделение на пространство и время невозможно.

Если же уравнение (2) является уравнением гиперболического типа, так что

$$a_{ik}\,\xi_i\,\xi_k \leq 0, \tag{4}$$

то вариация поля $\delta\phi(P)$ в окрестности точки $P(x_1, x_2, x_3, x_4)$ вызывет вариацию поля ϕ только в тех точках $\mathcal{R}_4(x)$, которые лежат внутри характеристического конуса (конуса влияния), образованного характеристиками уравнения (2). В этом случае направления в пространстве $\mathcal{R}_4(x)$ разделятся на временные (лежащие внутри конуса влияния) и на пространственные (лежащие вне его). Вместе с этим появляется и понятие времени: мы можем теперь говорить о распространении сигнала из точки P . Временные точки достигаются сигналом из P , пространственные - нет.

Заметим, что под сигналом мы понимаем поверхность слабого разрыва поля ϕ, /5/ $s = s(x_1, x_2, x_3, x_4) = \text{const}$. Семейство этих поверхностей определяется из уравнения

$$a_{ik}\,\frac{\partial s}{\partial x_i}\,\frac{\partial s}{\partial x_k} = 0. \tag{5}$$

Ввиду нелинейности уравнения (1) характеристики уравнения (линии ортогональные к $s = \text{const}$) будут зависеть от поля его производных ϕ_i . Поэтому и разделение множества $\mathcal{R}_4(x)$ на пространство и время будет зависеть от величины поля ϕ и его производных.

Известно, что в пространстве с метрикой

$$ds^2 = g_{ik}\,dx_i\,dx_k \tag{6}$$

сигнал (слабый разрыв) распространяется в согласии с уравнением

$$g^{ik}\,\frac{\partial s}{\partial x_i}\,\frac{\partial s}{\partial x_k} = 0, \tag{7}$$

/6/

где g^{ik} – контравариантный метрический тензор .

Сравнение (7) и (5) показывает, что метрика в $\mathcal{R}_4(x)$ должна быть согласована с законом распространения сигнала (5). Это согласование требует, чтобы

$$g^{ik} = \lambda\, a^{ik}, \tag{8}$$

где λ – общий масштабный множитель. Таким образом, метрический тензор g^{ik} будет функцией поля ϕ и его производных:

$$g^{ik} = g^{ik}(\phi, \phi_i). \tag{9}$$

Метрика $\mathcal{R}_4(x)$ оказывается зависящей от поля ϕ .

Допустим теперь, что, помимо поля ϕ , существует еще и другое поле ψ , подчиняющееся также уравнению вида (2).

Поле ϕ , если его использовать как сигнал для упорядочения событий в $\mathcal{R}_4(x)$, определит другую метрику, отличную от (9). Какую метрику мы должны предпочесть?

Ясно, что мы должны назвать временем ту область, которая достигается любым сигналом (ψ или ϕ). Иными словами, разделение $\mathcal{R}_4(x)$ на пространство и время должно быть сделано с помощью того сигнала, который имеет конус влияния, включающий в себя все остальные, возможные (см. рис. 2).

Естественно считать, что в области малых полей должна быть справедлива обычная метрика, принятая в СТО.

Поэтому вдали от источника P –характеристики должны выпрямляться, как это показано на рис. 3. Это выпрямление может происходить двумя существенно различными способами. Скорость сигнала может стремиться к c со стороны меньших скоростей (на рис. 3 случай ϕ) или со стороны больших скоростей (на рис.3 случай ψ). В последнем случае метрика пространства-времени $\mathcal{R}_4(x)$ должна быть переопределена применительно к закону распространения этого поля вблизи точки P . Таким образом, поле ϕ , которое определяет метрику пространства, будет взаимодействовать со всеми другими полями через метрический тензор

$$g^{ik} = g^{ik}(\phi_j\ \phi_j) \ .$$

/7/

В заключение заметим, что уравнение Клейна:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x_4^2} - \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial x_3^2}\right) - m^2\phi = 0 \tag{10}$$

с отрицательным $-m^2$ ("мнимая масса"), как обычно считают, приводит к движению частиц со скоростью, большей скорости света c . С точки зрения описанного выше определения времени (область, достигаемая сигналом (см. рис. 4)) в случае уравнения (10) следует считать, что мы имеем одну пространственную координату и три временных: x_1, x_2, x_3 . Роль частоты должна играть величина $\omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2$, так что $\omega^2 = k_4^2 + m^2$. При таком определении времени скорости частиц, описываемых уравнением (10), будут меньше скорости света c .

Литература

1. M. Born. Proc.Roy.Soc. A 143, 410 (1934).
2. Д. Блохинцев. Доклады АН СССР, 32, 553 (1956).
3. Д. Блохинцев и В.Орлов. ЖЭТФ, 25, 503 (1953).
4. D.Blokhintsev. Nuovo Cim., Cim Suppl., vol. 3, 629 (1953).
5. В.И. Смирнов. Курс высшей математики, т. IV, Физматгиз, 1958.
6. В.А.Фок. Теория пространства, времени и тяготения, ГИТТЛ, 1955.
7. В.И.Огиевецкий и И.В.Полубаринов. Препринт ОИЯИ, Р-2106, Дубна, 1965.

Рукопись поступила в издательский отдел
29 апреля 1965 г.

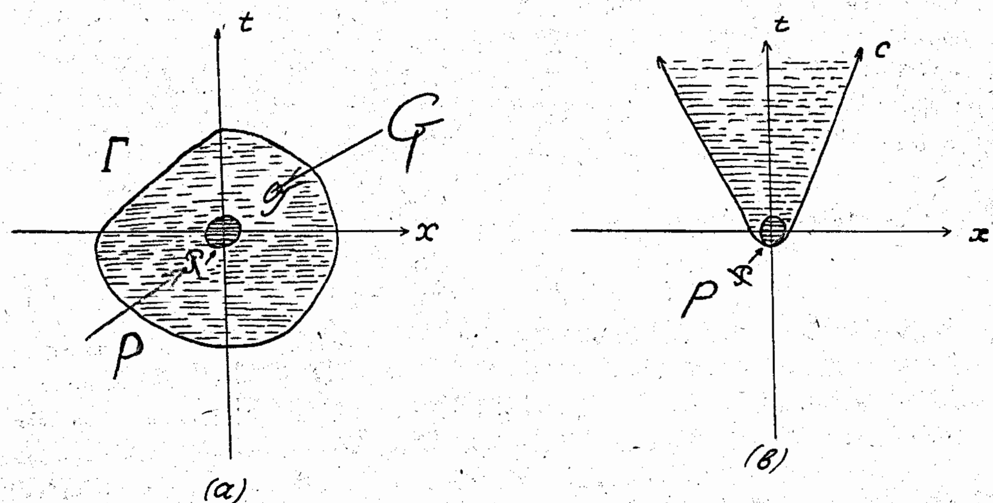

Рис. 1. (а) Случай эллиптического уравнения; во множестве $\mathfrak{R}_2(t,x)$ нет выделенных направлений.
(в) Случай гиперболического уравнения; множество $\mathfrak{R}_2(t,x)$ разделяется конусом влияния cPc на время (заштриховано) и пространство (вне конуса cPc).

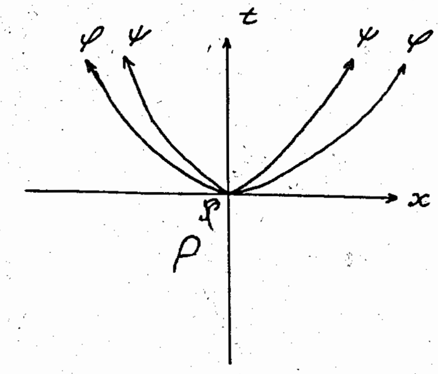

Рис. 2. Характеристики поля ϕ и ψ . Конус влияния находится внутри конуса влияния ϕ . Поэтому для разделения $\mathfrak{R}_2(t,x)$ на пространство и время надо предпочесть сигнал поля ϕ .

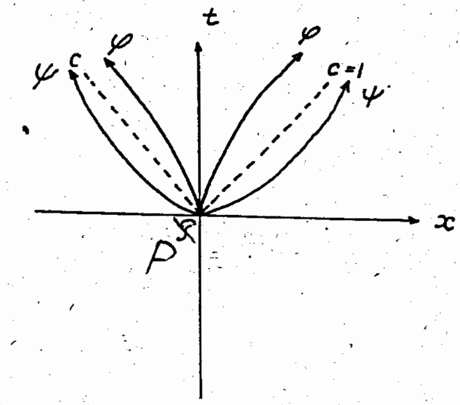

Рис. 3. Пунктиром C – обозначен конус влияния СТО (скорость света в пустоте принята постоянной). Конус ϕ совместим с метрикой, принятой в СТО. Конус, определяемый полем ψ , на малых расстояниях от P требует изменения метрики СТО.

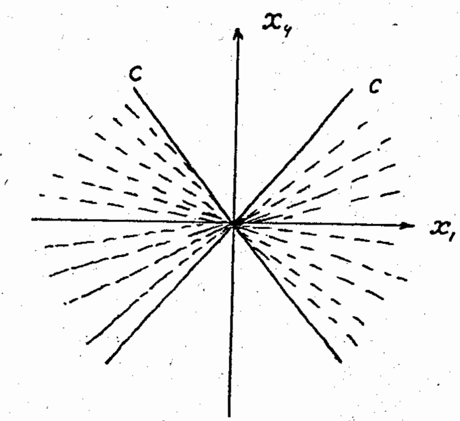

Рис. 4. Пунктиром заштрихована область влияния для уравнения Клейна с $m^2<0$. В этом случае измерение x_4 следует считать пространством и измерение x_1 (а также x_2 и x_3) – временем.