ОБЪЕДИНЕННЫЙ
ИНСТИТУТ
ЯДЕРНЫХ
ИССЛЕДОВАНИЙ

Дубна

Р-2151

Б.М. Барбашов, Н.А. Черников

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СКАЛЯРНОЙ ДВУМЕРНОЙ МОДЕЛИ ПОЛЯ БОРНА-ИНФЕЛЬДА

ЛАБОРАТОРИЯ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

1965

P-2151

Б.М. Барбашов, Н.А. Черников

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СКАЛЯРНОЙ ДВУМЕРНОЙ МОДЕЛИ ПОЛЯ БОРНА-ИНФЕЛЬДА

§ 1. Введение

Со времени появления работ Борна и Инфельда /1/ по нелинейной электродинамике свободного поля стало ясно, что нелинейная теория приводит к качественно новым и гораздо более богатым физическим представлениям, нежели теория линейная. Поэтому представляет принципиальный интерес решение и исследование нелинейных моделей теории поля.

В математике известны точные решения лишь для специального класса нелинейных уравнений. К числу последних принадлежит уравнение минимальных поверхностей /2/

$$(1+\phi_y^2)\phi_{xx} - 2\phi_x\phi_y\phi_{xy} + (1+\phi_x^2)\phi_{yy} = 0 . \qquad (1)$$

Это уравнение всегда эллиптического типа и поэтому оно может описывать лишь не изменяющиеся во времени явления, такие как, например, натяжение мыльной пленки на заданный контур или некоторые стационарные движения жидкости и газа. Однако нетрудно составить аналогичное уравнение

$$(1-\phi_t^2)\phi_{xx} + 2\phi_x\phi_t\phi_{xt} - (1+\phi_x^2)\phi_{tt} = 0 , \qquad (2)$$

которое может описывать развивающиеся во времени процессы, так как оно гиперболического типа при условии $1+\phi_x^2-\phi_t^2>0$. Уравнение (2) получается из уравнения (1) заменой $y = iy$. Замечательным является то, что это уравнение оказывается двумерным аналогом нелинейных уравнений электродинамики Борна-Инфельда. Подобные уравнения рассматривались Д.И.Блохинцевым /3/ и В.Гайзенбергом /4/. Нашей целью является решение задачи Коши для уравнения (2). Это решение, помимо того, что оно интересно само по себе, дает возможность проквантовать поле, описываемое нелинейным уравнением (2).

С геометрической точки зрения решение уравнения (1) $z = \phi(x,y)$ определяет в евклидовом пространстве минимальную поверхность, т.е. поверхность минимальной площади, ограниченную заданным контуром. В координатах x, y, z площадь поверхности равна

$$S = \iint \sqrt{1+\phi_x^2+\phi_y^2}\, dx\, dy \qquad (3)$$

и уравнение (1) является условием экстремума интеграла (3). Аналогично уравнение (2) является условием экстремума интеграла

$$S=\iint\sqrt{1+\phi_x^2-\phi_t^2}\,dx\,dt\,, \tag{4}$$

который выражает площадь поверхности $z=\phi(x,y)$ в псевдоевклидовом пространстве с метрикой $ds^2=dt^2-dx^2-dz^2$. Таким образом, уравнение (2) можно рассматривать как уравнение экстремальных поверхностей в псевдоевклидовом пространстве. Из (4) следует, что скалярное поле, подчиняющееся уравнению (2), имеет лагранжиан типа Борна-Инфельда

$$\mathfrak{L}=\sqrt{1+\phi_x^2-\phi_t^2}\,. \tag{5}$$

§ 2. Решение частной задачи Коши

Найдем решение уравнения (2), удовлетворяющее начальным условиям

$$\phi\big/_{t=0}=a(x);\qquad \frac{\partial\phi}{\partial t}\Big/_{t=0}=b(x). \tag{6}$$

Условие гиперболичности уравнения (2) для начальных данных означает, что

$$1+a'^2(x)-b^2(x)>0\,. \tag{7}$$

Попытаемся упростить уравнение (2), вводя новые переменные $\alpha,\beta: x=x(\alpha,\beta)$, $t=t(\alpha,\beta)$. Тогда $z=\phi(x(\alpha,\beta),t(\alpha,\beta))=z(\alpha,\beta)$. Таким образом, мы ищем решение уравнения (2) в параметрическом виде $\vec r=\vec r(\alpha,\beta)$, где $\vec r$ вектор с компонентами t,x,z; $\vec r=\{t,x,z\}$. Если обозначить через $(\vec r_1\vec r_2)$ скалярное произведение векторов $\vec r_1$ и $\vec r_2$ $(\vec r_1\vec r_2)=t_1t_2-x_1x_2-z_1z_2$, то уравнение (2) запишется следующим образом x)

$$\vec r_\alpha^{\,2} D_{\beta\beta}-2(\vec r_\alpha\vec r_\beta)D_{\alpha\beta}+\vec r_\beta^{\,2} D_{\alpha\alpha}=0\,, \tag{8}$$

---

x) При переходе от уравнения (2) к уравнению (8) мы воспользовались известными формулами:

$$Dz_x=\begin{vmatrix} z_\alpha & t_\alpha\\ z_\beta & t_\beta\end{vmatrix};\qquad Dz_t=\begin{vmatrix}x_\alpha & z_\alpha\\ x_\beta & z_\beta\end{vmatrix};\qquad D=\begin{vmatrix}x_\alpha & t_\alpha\\ x_\beta & t_\beta\end{vmatrix}$$

$$D^3z_{xx}=t_\alpha^2D_{\beta\beta}-2t_\alpha t_\beta D_{\alpha\beta}+t_\beta^2D_{\alpha\alpha}$$

$$D^3z_{xt}=-x_\alpha t_\alpha D_{\beta\beta}+(x_\alpha t_\beta+x_\beta t_\alpha)D_{\alpha\beta}-x_\beta t_\beta D_{\alpha\alpha}$$

$$D^3z_{tt}=x_\alpha^2 D_{\beta\beta}-2x_\alpha x_\beta D_{\alpha\beta}+x_\beta^2 D_{\alpha\alpha}$$

где

$$D_{i,k}=\begin{vmatrix} t_{ik}&x_{ik}&z_{ik}\\ t_\alpha&x_\alpha&z_\alpha\\ t_\beta&x_\beta&z_\beta\end{vmatrix}$$

$$\vec r_\alpha=\frac{\partial\vec r}{\partial\alpha};\qquad \vec r_\beta=\frac{\partial \vec r}{\partial\beta};$$

$$\vec r_{\alpha,\alpha}=\frac{\partial^2\vec r}{\partial\alpha^2};\qquad \vec r_{\alpha,\beta}=\frac{\partial^2 r}{\partial\alpha\partial\beta};\qquad \vec r_{\beta,\beta}=\frac{\partial^2\vec r}{\partial\beta^2}.$$

Мы построим гиперболическое решение уравнения (8), удовлетворяющее нашим начальным данным; в силу известной теоремы /5/ это решение будет единственным. Гиперболичность уравнения (8) означает, что

$$(\vec r_\alpha\vec r_\beta)^2-\vec r_\alpha^{\,2}\vec r_\beta^{\,2}>0\,. \tag{9}$$

Уравнение (8) имеет следующие простые уравнения характеристик

$$\vec r_\alpha^{\,2}=0;\qquad \vec r_\beta^{\,2}=0. \tag{10}$$

Эти "характеристические" уравнения вместе с основным уравнением (8) можно рассматривать как систему трех уравнений для трех функций $t(\alpha,\beta)$, $x(\alpha,\beta)$, $z(\alpha,\phi)$. Из (8), (9) и (10) следует, что

$$D_{\alpha,\beta}=0. \tag{11}$$

Это означает, в общем случае, линейную зависимость между строками детерминанта $D_{\alpha,\beta}$, т.е.

$$\vec r_{\alpha,\beta}=A(\alpha,\beta)\vec r_\alpha+B(\alpha,\beta)\vec r_\beta. \tag{12}$$

Покажем, что $A=B=0$. Для этого умножим скалярно (12) на $\vec r_\alpha$ и $\vec r_\beta$ и учтем (9) и (10), получим

$$B(\alpha,\beta)(\vec r_\alpha\vec r_\beta)=(\vec r_\alpha,\vec r_{\alpha\beta})=\tfrac12\frac{\partial}{\partial\beta}\vec r_\alpha^{\,2}=0$$

$$A(\alpha,\beta)(\vec r_\beta\vec r_\alpha)=(\vec r_\beta\vec r_{\alpha\beta})=\tfrac12\frac{\partial}{\partial\alpha}\vec r_\beta^{\,2}=0\,.$$

Так как $(\vec r_\alpha\vec r_\beta)=0$, то, следовательно, $A=B=0$. Итак, мы получили систему уравнений

$$\vec r_\alpha^{\,2}=0;\qquad \vec r_\beta^{\,2}=0;\qquad \vec r_{\alpha,\beta}=0, \tag{13}$$

или

$$t_\alpha^2-x_\alpha^2-z_\alpha^2=0\qquad t_{\alpha,\beta}=0$$
$$x_{\alpha,\beta}=0$$
$$t_\beta^2-x_\beta^2-z_\beta^2=0\qquad z_{\alpha,\beta}=0$$

для трех функций $t(\alpha,\beta)$, $x(\alpha,\beta)$, $z(\alpha,\beta)$. Поскольку каждая из функций t , x и z подчиняется уравнению второго порядка, то должны быть заданы начальные значения функций и их производных. Как будет видно из дальнейшего, первые два уравнения (13) являются условиями на начальные данные, из которых определяются недостающие данные для функций $t(\alpha,\beta)$ и $x(\alpha,\beta)$.

Общим решением последнего уравнения (13) является

$$\vec{r}(\alpha,\beta) = \vec{r}_1(\alpha) + \vec{r}_2(\beta) , \tag{14}$$

где $r_1(\alpha)$ и $r_2(\beta)$ – произвольные функции. Из первых двух уравнений (13) получаем

$$\vec{r}_1^{\,\prime\,2}(\alpha) = 0 ; \qquad \vec{r}_2^{\,\prime\,2}(\beta) = 0 . \tag{15}$$

Сформулируем задачу Коши (6) в новых переменных α и β . Следующее обстоятельство позволяет предельно упростить параметрическое представление начальных данных (6). Именно, легко заметить, что выбор параметров α и β определен уравнениями (13) с точностью до преобразования $\alpha = A(\alpha')$, $\beta = B(\beta')$, где A и B произвольные функции с единственным ограничением $A'(\alpha')\,B'(\beta') \neq 0$ x). Поэтому, если выразить α и β как функции от x и t , $\alpha = \alpha(x,t)$, $\beta = \beta(x,t)$ и положить $A(x) = \alpha(x,0)$, $B(x) = \beta(x,0)$, то условие $t = 0$ выразится в виде $\alpha' = \beta' = x$. Опуская штрихи, мы можем без ограничения общности считать, что при $t=0$ $\alpha=\beta=x$. Поэтому начальные данные запишутся так:

$$\begin{aligned} t(\alpha,\alpha) &= t_1(\alpha) + t_2(\alpha) = 0 \\ x(\alpha,\alpha) &= x_1(\alpha) + x_2(\alpha) = \alpha \\ z(\alpha,\alpha) &= z_1(\alpha) + z_2(\alpha) = a(\alpha) . \end{aligned} \tag{16}$$

Кроме того, выражая $\frac{\partial\phi}{\partial t}$ через производные по α и β t,z,x имеем

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{\begin{vmatrix} x_\alpha & z_\alpha \\ x_\beta & z_\beta \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_\alpha & t_\alpha \\ x_\beta & t_\beta \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} x'_1(\alpha) & z'_1(\alpha) \\ x'_2(\beta) & z'_2(\beta) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x'_1(\alpha) & t'_1(\alpha) \\ x'_2(\beta) & t'_2(\beta) \end{vmatrix}}$$

---

x) Действительно, $d\vec{r}^{\,2} = 2(\vec{r}_\alpha \vec{r}_\beta)\,d\alpha\,d\beta$, но при $t=0$ $d\vec{r}^{\,2} = -[1 + a'^2(x)]\,dx^2$, $d\alpha\,d\beta = A'(\alpha)\,B'(\beta)\,d^2x^2$
и, следовательно, $A'B' = \frac{1+a'^2}{2(r_\alpha r_\beta)} \neq 0$.

и, следовательно, при $\alpha = \beta$

$$b(\alpha) = \frac{\begin{vmatrix} x'_1(\alpha) & z'_1(\alpha) \\ x'_2(\alpha) & z'_2(\alpha) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x'_1(\alpha) & t'_1(\alpha) \\ x'_2(\alpha) & t'_2(\alpha) \end{vmatrix}} . \tag{17}$$

Наконец, привлекая уравнения (15) при $\alpha = \beta$

$$t'^2_1(\alpha) - x'^2_1(\alpha) - z'^2_1(\alpha) = 0 ; \qquad t'^2_2(\alpha) - x'^2_2(\alpha) - z'^2_1(\alpha) = 0 , \tag{18}$$

получаем шесть уравнений (16), (17) и (18) для шести функций $t_1(\alpha)$, $x_1(\alpha)$, $z_1(\alpha)$, $t_2(\alpha)$, $x_2(\alpha)$ $z_2(\alpha)$. Если искомое решение записать в виде:

$$\vec{r}(\alpha,\beta) = \frac{1}{2}(\vec{\rho}(\alpha) + \vec{\rho}(\beta)) + \frac{1}{2}\int_\beta^\alpha \vec{\pi}(\lambda)\,d\lambda , \tag{19}$$

то функция $\vec{\rho}(\alpha)$ легко определяется из равенства (16):

$$\vec{\rho}(\alpha) = \{0, \alpha, a(\alpha)\} .$$

Функция $\vec{\pi}(\alpha) = \{\pi_t(\alpha), \pi_x(\alpha), \pi_z(\alpha)\}$ определяется из равенств (17) и (18)

$$\pi_x = \frac{a'b}{1+a'^2}\,\pi_t ; \quad \pi_z = \frac{b}{1+a'^2}\,\pi_t ; \quad \pi_t = \pm\frac{1+a'^2}{\sqrt{1+a'^2-b^2}} .$$

Выбор знака π_t несуществен, так как он меняется при замене $\alpha \rightleftarrows \beta$. Выбрав знак "–" , получим

$$\pi_t = -\frac{1+a'^2}{\sqrt{1+a'^2-b^2}} ; \quad \pi_x = \frac{a'b}{\sqrt{1+a'^2-b^2}} ; \quad \pi_z = \frac{-b}{\sqrt{1+a'^2-b^2}} .$$

Таким образом, решение задачи Коши для уравнения (2) имеет вид:

$$\begin{aligned} t(\alpha,\beta) &= \tfrac{1}{2}\int_\alpha^\beta \frac{1+a'^2(\lambda)}{\sqrt{1+a'^2(\lambda)-b^2(\lambda)}}\,d\lambda \\ x(\alpha,\beta) &= \frac{\alpha+\beta}{2} - \tfrac{1}{2}\int_\alpha^\beta \frac{a'(\lambda)\;b(\lambda)}{\sqrt{1+a'^2(\lambda)-b^2(\lambda)}}\,d\lambda \\ z(\alpha,\beta) &= \frac{a(\alpha)+a(\beta)}{2} + \tfrac{1}{2}\int_\alpha^\beta \frac{b(\lambda)}{\sqrt{1+a'^2(\lambda)-b^2(\lambda)}}\,d\lambda . \end{aligned} \tag{20}$$

Функции π_t , π_x , π_z имеют важный физический смысл. Функция π_z – это канонический импульс поля $\phi(x,t)$ при $t=0$. Действительно, как нетрудно проверить

$$\pi_x = \pi(x,0) = \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \phi_t}\Big/_{t=0} = -\frac{b(x)}{\sqrt{1+a'^2(x)-b^2(x)}}\,, \tag{21}$$

где, $\mathfrak{L}=\sqrt{1+\phi_x^2-\phi_t^2}$ – плотность лагранжиана (5) поля $\phi(x,t)$, при $t=0$ $\mathfrak{L}=\sqrt{1+a'^2(x)-b^2(x)}$, π_x – плотность импульса поля $\phi(x,t)$ при $t=0$.

$$\pi_x = G(x,0) = -\pi(x,0)\,a'(x) = \frac{a'(x)\,b(x)}{\sqrt{1+a'^2(x)-b^2(x)}}. \tag{22}$$

Наконец, π_t – плотность гамильтониана поля $\phi(x,t)$ при $t=0$

$$\pi_t = H(x,0) = (\pi\phi_t - \mathfrak{L})_{t=0} = -\frac{1+a'^2}{\sqrt{1+a'^2-b^2}} = -\sqrt{(1+a'^2)(1+\pi^2)}\,. \tag{23}$$

Интересно отметить, что уравнение (2) имеет два честных решения: $\phi=U(x+t)$ и $\phi=V(x-t)$, где U и V – произвольные функции. Это легко увидеть, если записать уравнение (2) в координатах $u=x+t$ и $v=x-t$:

$$\phi_{uv} - \phi_u^2\phi_{vv} - \phi_v^2\phi_{uu} + 2\phi_u\phi_v\phi_{uv} = 0\,. \tag{2 a}$$

Эти решения описывают бегущие волны произвольной формы. Они получаются из общего решения (20), если положить $b(x)=a'(x)$, $a(x)=U(x)$ и $b(x)=-a'(x)$, $a(x)=V(x)$.

§ 3. Решение общей задачи Коши

Начальные данные Коши (6) можно геометрически истолковать как кривую

$$z=a(x),\quad t=0 \tag{24}$$

в псевдоевклидовом пространстве t, x, z, снабженную в каждой точке касательной плоскостью

$$dz = a'(x)\,dx + b(x)\,dt\,. \tag{25}$$

Условие гиперболичности (7) означает, что плоскость (25) пересекает изотропный конус

$$dt^2-dx^2-dz^2=0 \tag{26}$$

по двум прямым. И, вообще, условие гиперболичности $1+z_x^2-z_t^2>0$ означает, что касательная плоскость к интегральной поверхности пересекает конус (26) по двум прямым. В предыдущем параграфе мы нашли интегральную поверхность уравнения (2), проходящую через кривую (24) и касательную плоскостей (25).

Решим задачу Коши общего вида, а именно: задача в параметрическом виде произвольная пространственно-подобная кривая

$$t=f(\lambda),\quad x=g(\lambda),\quad z=h(\lambda)\,, \tag{27}$$

снабженная в каждой точке касательной плоскостью

$$\begin{aligned} dt &= f'(\lambda)\,d\lambda + f_1(\lambda)\,dr \\ dx &= g'(\lambda)\,d\lambda + g_1(\lambda)\,dr \\ dz &= h'(\lambda)\,d\lambda + h_1(\lambda)\,dr\,, \end{aligned} \tag{28}$$

пересекающей изотропный конус (26) по двум прямым; требуется найти интегральную поверхность уравнения (2), проходящую через кривую (27) и касающуюся плоскостей (28). Условие пространственной подобности кривой (27) означает

$$f'^2(\lambda)-g'^2(\lambda)-h'^2(\lambda)<0\,. \tag{29}$$

Требование пересечения плоскостями (28) изотропного конуса по двум прямым (требование гиперболичности) выражается неравенством:

$$\begin{aligned} &[f'(\lambda)\,f_1(\lambda)-g'(\lambda)\,g_1(\lambda)-h'(\lambda)\,h_1(\lambda)]^2- \\ &-[f'^2(\lambda)-g'^2(\lambda)-h'^2(\lambda)][f_1^2(\lambda)-g_1^2(\lambda)-h_1^2(\lambda)]>0\,. \end{aligned} \tag{30}$$

Если обозначить $\vec\rho(\lambda)=\{f(\lambda),g(\lambda),h(\lambda)\}$ и $\vec\rho_1(\lambda)=\{f_1(\lambda),g_1(\lambda),h_1(\lambda)\}$, то данные Коши (27) и (28) выразятся в виде:

$$\vec r=\vec\rho(\lambda)\,,\qquad d\vec r=\vec\rho\,'(\lambda)\,d\lambda+\vec\rho_1(\lambda)\,dr\,, \tag{31}$$

а условия (29) и (30) в виде:

$$\vec\rho\,'^2(\lambda)<0\;;\qquad (\vec\rho\,'\vec\rho_1)^2-\vec\rho\,'^2\vec\rho_1^{\,2}>0\,. \tag{32}$$

Как и в частной задаче Коши, искомая интегральная поверхность – гиперболического типа, и на ней в каждой точке имеется два изотропных направления. При подходящем выборе параметров α и β можно считать, что эти направления задаются векторами $\vec r_\alpha$ и $\vec r_\beta$, входящими в уравнение (8). Равенство (10) и означает, что векторы $\vec r_\alpha$ и $\vec r_\beta$ изотропны. Таким образом, мы снова приходим к системе уравнений (13), откуда, так же как и ранее, следует (14) и (15).

Ввиду того, что выбор параметров α и β определен с точностью до преобразования $\alpha=A(\alpha')$, $\beta=B(\beta')$, можно без ограничения общности считать, что кривая $\vec r=\vec\rho(\lambda)$ задается уравнениями $\alpha=\beta=\lambda$. В самом деле, если кривая $\vec r=\vec\rho(\lambda)$ определяется на интегральной поверхности условиями $\beta=B(\lambda)$, $\beta=B(\lambda)$, то, переходя к параметрам α', β', получим $\alpha'=\beta'=\lambda$.

Таким образом,

$$\vec r_1(\lambda) + \vec r_2(\lambda) = \vec\rho(\lambda), \qquad (33)$$

а, следовательно,

$$\vec r\,'_1(\lambda) + \vec r\,'_2(\lambda) = \vec\rho\,'(\lambda). \qquad (34)$$

Вводя вектор

$$\vec\pi(\lambda) = \vec r\,'_1(\lambda) - \vec r\,'_2(\lambda), \qquad (35)$$

мы можем записать искомое решение в виде (19). Из (34) следует, что

$$\pi^2(\lambda) = -\vec\rho\,'^2(\lambda), \quad (\vec\pi(\lambda)\,\vec\rho\,'(\lambda)) = 0. \qquad (36)$$

Вектор $\vec\pi(\lambda)$ лежит в плоскости векторов $\vec\rho\,'(\lambda)$ и $\vec\rho_1(\lambda)$, а, следовательно,

$$\vec\pi(\lambda) = C_1(\lambda)\,\vec\rho\,'(\lambda) + C_2(\lambda)\,\vec\rho_1(\lambda). \qquad (37)$$

Из (36) и (37) получаем

$$C_1(\lambda) = \frac{-(\vec\rho\,'\vec\rho_1)}{\sqrt{(\vec\rho\,'\vec\rho_1) - \vec\rho\,'^2}}; \qquad C_2(\lambda) = \frac{\vec\rho\,'^2}{\sqrt{(\vec\rho\,'\vec\rho_1) - \vec\rho\,'^2}}, \qquad (38)$$

т.е.

$$\vec\rho(\lambda) = \frac{\vec\rho\,'^2\vec\rho_1 - (\vec\rho\,'\vec\rho_1)\,\vec\rho\,'}{\sqrt{(\vec\rho\,'\vec\rho_1) - \vec\rho\,'^2}}. \qquad (39)$$

Подставляя (39) в (19), получим для компонент искомого вектора $\vec r(\alpha,\beta)$ окончательные выражения (сравни с (2))

$$t(\alpha,\beta) = \frac{f_1(\alpha) + f(\beta)}{2} + \tfrac12\int_\beta^\alpha \frac{\vec\rho\,'^2 f_1(\lambda) - (\vec\rho\,'\vec\rho_1)\,f'(\lambda)}{\sqrt{(\vec\rho\,'\vec\rho_1)^2 - \vec\rho\,'^2\rho_1^2}}\,d\lambda$$

$$x(\alpha,\beta) = \frac{g(\alpha) + g(\beta)}{2} + \tfrac12\int_\beta^\alpha \frac{\vec\rho\,'^2 g_1(\lambda) - (\vec\rho\,'\vec\rho)\,g'(\lambda)}{\sqrt{(\vec\rho\,'\vec\rho)^2 - \vec\rho\,'^2\vec\rho_1^{\,2}}}\,d\lambda \qquad (40)$$

$$z(\alpha,\beta) = \frac{h(\alpha) + h(\beta)}{2} + \tfrac12\int_\beta^\alpha \frac{\vec\rho\,'^2 h_1(\lambda) - (\vec\rho\,'\vec\rho)\,h'(\lambda)}{\sqrt{(\vec\rho\,'\vec\rho)^2 - \vec\rho\,'^2\vec\rho_1^{\,2}}}\,d\lambda.$$

§ 4. Лагранжева формулировка параметрического представления решения уравнения (2)

Изложенный метод решения Коши для уравнения (2) наводит на мысль о том, что с самого начала можно рассматривать систему трех полей $t(\alpha,\beta)$, $x(\alpha,\beta)$, $z(\alpha,\beta)$

с лагранжианом[x)]

$$\mathfrak{L} = \sqrt{(\vec r_\alpha\vec r_\beta)^2 - \vec r_\alpha^{\,2}\vec r_\beta^{\,2}}, \qquad (41)$$

который приводит к уравнению (8). Действительно, уравнения Эйлера для этих полей

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\vec r_\alpha} + \frac{\partial}{\partial\beta}\frac{\partial\mathfrak{L}}{\partial\vec r_\beta} = 0 \qquad (42)$$

можно записать в виде:

$$\frac{\partial\vec{\mathfrak{L}}_\alpha}{\partial\alpha} + \frac{\partial\vec{\mathfrak{L}}_\beta}{\partial\beta} - \frac{1}{2\mathfrak{L}^2}\left(\vec{\mathfrak{L}}_\alpha\frac{\partial\mathfrak{L}^2}{\partial\alpha} + \vec{\mathfrak{L}}_\beta\frac{\partial\mathfrak{L}^2}{\partial\beta}\right) = 0, \qquad (43)$$

где

$$\vec{\mathfrak{L}}_\alpha = \tfrac12\frac{\partial\mathfrak{L}^2}{\partial\vec r_\alpha} = (\vec r_\alpha\vec r_\beta)\,\vec r_\beta - \vec r_\beta^{\,2}\vec r_\alpha \qquad (44)$$

$$\vec{\mathfrak{L}}_\beta = \tfrac12\frac{\partial\mathfrak{L}^2}{\partial\vec r_\beta} = (\vec r_\alpha\vec r_\beta)\,\vec r_\alpha - \vec r_\alpha^{\,2}\vec r_\beta.$$

Выполняя дифференцирование в формуле (43), получим уравнение

$$\vec r_\alpha^{\,2}\vec r_{\beta\beta} - 2(\vec r_\alpha\vec r_\beta)\,\vec r_{\alpha\beta} + \vec r_\beta^{\,2}\vec r_{\alpha\alpha} - N\vec{\mathfrak{L}}_\alpha - M\vec{\mathfrak{L}}_\beta = 0, \qquad (45)$$

где

$$N = \frac{1}{\mathfrak{L}^2}\left[\vec r_\alpha^{\,2}(\vec r_{\beta\beta}\vec r_\alpha) - 2(\vec r_\alpha\vec r_\beta)(\vec r_{\alpha\beta}\vec r_\alpha) + \vec r_\beta^{\,2}(\vec r_{\alpha\alpha}\vec r_\alpha)\right]$$

$$M = \frac{1}{\mathfrak{L}^2}\left[\vec r_\alpha^{\,2}(\vec r_{\beta\beta}\vec r_\beta) - 2(\vec r_\alpha\vec r_\beta)(\vec r_{\alpha\beta}\vec r_\beta) + \vec r_\beta^{\,2}(\vec r_{\alpha\alpha}\vec r_\beta)\right].$$

Учитывая равенства

$$(\vec r_\alpha\vec{\mathfrak{L}}_\alpha) = (\vec r_\beta\vec{\mathfrak{L}}_\beta) = \mathfrak{L}^2$$

$$(\vec r_\alpha\vec{\mathfrak{L}}_\beta) = (\vec r_\alpha\vec{\mathfrak{L}}_\beta) = 0,$$

нетрудно показать, что проекции левой части уравнения (45) на векторы $\vec r_\alpha$ и $\vec r_\beta$ тождественно равны нулю. Проектируя левую часть уравнения (45) на вектор $\vec R$[xx)].

$$\vec R = \begin{vmatrix} \vec e_t & -\vec e_x & -\vec e_z \\ t_\alpha & x_\alpha & z_\alpha \\ t_\beta & x_\beta & z_\beta \end{vmatrix}$$

---

x) Так как параметры α и β независимы, то векторы $\vec r_\alpha$ и $\vec r_\beta$ неколлинеарны

xx) Векторы $\vec\ell_t$, $\vec\ell_x$, $\vec\ell_z$ составляют собственный базис

$$\vec\ell_t = \{1,0,0\}, \quad \vec\ell_x = \{0,1,0\}, \quad \vec\ell_z = \{0,0,1\}.$$

перпендикулярный к векторам $\vec r_\alpha$ и $\vec r_\beta$, получим уравнение

$$\vec r_\alpha^{\,2}(\vec r_{\beta\beta}\vec R) - 2(\vec r_\alpha \vec r_\beta)(\vec r_{\alpha\beta}\vec R) + \vec r_\beta^{\,2}(\vec r_{\alpha\alpha}\vec R) = 0 , \tag{46}$$

которое в точности совпадает с уравнением (8), так как $(\vec r_{ik}\vec R) = D_{ik}$.

Таким образом, исходя из лагранжиана (41), мы получили только одно уравнение (46) для полевых функций $t(\alpha,\beta)$, $x(\alpha,\beta)$, $z(\alpha,\beta)$ и, следовательно, наша система недоопределена. Недоопределенность системы уравнений (45) связана с произволом в выборе параметров α, β. Выберем параметры так, чтобы максимально упростить метрическую форму $d\vec r^{\,2} = \vec r_\alpha^{\,2}\, d\alpha^2 + 2(\vec r_\alpha \vec r_\beta)\, d\alpha\, d\beta + \vec r_\beta^{\,2}\, d\beta^2$ поверхности. Такое упрощение достигается в изотропных координатах α, β, когда

$$\vec r_\alpha^{\,2} = 0, \qquad \vec r_\beta^{\,2} = 0 , \qquad d\vec r^{\,2} = 2(\vec r_\alpha \vec r_\beta)\, d\alpha\, d\beta . \tag{47}$$

Из (47) видно, что изотропные координаты осуществляют конформное отображение поверхности на псевдоевклидову плоскость с метрической формой $d\alpha d\beta$. При этом уравнение (45) доопределяется и принимает вид:

$$\vec r_{\alpha,\beta} = 0 . \tag{48}$$

Уравнения (48) возникают также в результате варьирования лагранжиана

$$\mathfrak{L} = (\vec r_\alpha \vec r_\beta) = t_\alpha t_\beta - x_\alpha x_\beta - z_\alpha z_\beta , \tag{49}$$

который получается из (41) с учетом (47) и состоит из лагранжианов для свободных полей $t(\alpha,\beta)$, $x(\alpha,\beta)$, $z(\alpha,\beta)$. Тензор энергии-импульса для этих полей равен

$$\begin{aligned} T_{\alpha\alpha} &= \vec r_\alpha^{\,2}; \quad T_{\alpha\beta} = 0 \\ T_{\beta\alpha} &= 0 ; \quad T_{\beta\beta} = \vec r_\beta^{\,2} . \end{aligned} \tag{50}$$

Следовательно, условия (47) означают, что тензор энергии-импульса равен нулю. Существенно отметить, что мы имеем систему трех полей $t(\alpha,\beta)$, $x(\alpha,\beta)$, $z(\alpha,\beta)$ с индефинитной метрикой, и требование равенства нулю полного тензора энергии-импульса не означает еще, что равен нулю тензор энергии-импульса каждого поля в отдельности.

Если вместо изотропных координат α, β ввести конформно-галилеевы координаты ξ, τ по формулам

$$\alpha = \xi - \tau , \qquad \beta = \xi + \tau , \tag{51}$$

то лагранжиан (49) будет равняться

$$\mathfrak{L} = \tfrac12(\vec r_\tau^{\,2} - \vec r_\xi^{\,2}) = \tfrac12(t_\tau^2 - t_\xi^2) - \tfrac12(x_\tau^2 - x_\xi^2) - \tfrac12(z_\tau^2 - z_\xi^2), \tag{52}$$

а уравнения поля (48) примут вид:

$$\vec r_{\xi\xi} - \vec r_{\tau\tau} = 0 . \tag{53}$$

Тензор энергии-импульса полей в координатах ξ, τ равен

$$\begin{aligned} T_{\tau\tau} &= T_{\xi\xi} = \frac{\vec r_\tau^{\,2} + \vec r_\xi^{\,2}}{2} = H = H_t - H_x - H_z \\ T_{\tau\xi} &= T_{\xi\tau} = (\vec r_\tau \vec r_\xi) = -G = -G_t + G_x + G_z , \end{aligned} \tag{54}$$

где H и G — плотности энергии и импульса поля. Условия $\vec r_\alpha^{\,2} = 0$, $\vec r_\beta^{\,2} = 0$ эквивалентны условиям

$$\vec r_\tau^{\,2} + \vec r_\xi^{\,2} = 0 \quad \text{и} \quad (\vec r_\tau \vec r_\xi) = 0 . \tag{55}$$

Легко показать, что, если равенства (55) выполняются в начальный момент времени $\tau=0$, то они справедливы и для любого момента времени τ. В самом деле, из (48) следует, что $\vec r = \vec r_1(\alpha) + \vec r_x(\beta)$, а значит, $\vec r_\alpha = \vec r_1{}'(\xi - \tau)$, $\vec r_\beta = \vec r_2{}'(\xi+\tau)$. Таким образом, если r_α^2 и r_β^2 равны нулю при $\tau = 0$, то они равны нулю и при любом значении τ.

Канонические импульсы полей $t(\xi,\tau)$, $x(\xi,\tau)$, $z(\xi,\tau)$ составляют контрвариантный вектор $\vec\pi = \{\pi_t, \pi_x, \pi_z\} = \frac{\partial \vec r}{\partial \tau}$. Если в начальный момент времени $\tau=0$ заданы $\vec r\,/_{\tau=0} = \vec\rho(\xi)$ и $\frac{\partial \vec r}{\partial\tau}\,/_{\tau=0} = \vec\pi(\xi)$, то решение уравнения (57) записывается в виде (19). Частными случаями задачи Коши для уравнения (53) являются задачи, рассмотренные в § 2 и § 3. В случае § 2

$$\begin{aligned} &\vec\rho(\xi) = \{0, \xi, a(\xi)\} \\ &\vec\pi(\xi) = \left\{-\frac{1 + a'^2(\xi)}{\sqrt{1 + a'^2(\xi) - b^2(\xi)}}, \frac{a'(\xi)\, b(\xi)}{\sqrt{1 + a'^2(\xi) - b^2(\xi)}}, \frac{-b(\xi)}{\sqrt{1 + a'^2(\xi) - b^2(\xi)}}\right\}; \end{aligned} \tag{56}$$

В случае § 3 $\rho(\xi)$ — произвольно, а $\pi(\xi)$ определяется формулой (39). В обоих случаях выполняется условие равенства нулю тензора энергии-импульса (58).

Замечательно, что в случае (56) канонический импульс поля π_t при $\tau=0$ совпадает с плотностью гамильтониана поля $t(\xi,\tau)$ при $t=0$, канонический импульс π_x поля $x(\xi,\tau)$ при $\tau=0$ совпадает с плотностью импульса поля $\phi(x,t)$ при $t=0$ и, наконец, канонический импульс π_z поля $z(\xi,\tau)$ при $\tau=0$, совпадает с каноническим импульсом поля $\phi(x,t)$ при $t=0$ (ср. (60) с (21), (22), (23)).

§ 4. Предельный переход к линейной теории поля

В уравнении (2) производные поля ϕ выражены в абсолютных единицах, т.е. в отношении к некоторой характеристической константе κ (абсолютный масштаб поля). Введем в лагранжиан константу κ явным образом: